E. PASCAL

REPERTORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK

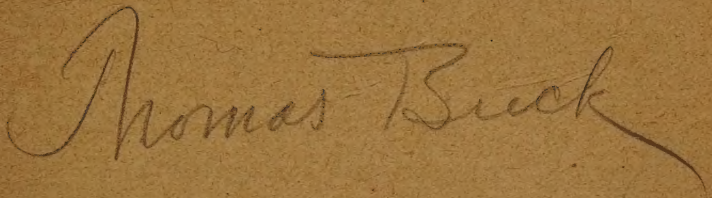
II. GEOMETRIE

ERSTE HÄLFTE

GRUNDLAGEN UND EBENE GEOMETRIE

UNIVERSITY OF MAINE
LIBRARIES

Bequest of
PROFESSOR THOMAS BUCK
CLASS OF 1901


Thomas Buck

E. PASCAL
PROFESSOR AN DER KGL. UNIVERSITÄT ZU NEAPEL

REPERTORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK

ZWEITE VÖLLIG UMGEARBEITETE AUFLAGE DER DEUTSCHEN AUSGABE, UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER MATHEMATIKER

HERAUSGEGEBEN VON

P. EPSTEIN UND H. E. TIMERDING
IN STRASSBURG IN BRAUNSCHWEIG

ZWEITER BAND
GEOMETRIE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Pascal, Ernesto

REPERTORIUM
DER HÖHEREN GEOMETRIE

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

L. BERZOLARI IN PAVIA · R. BONOLA IN PAVIA · E. CIANI IN GENUA · M. DEHN IN MÜNSTER · F. DINGELDEY IN DARMSTADT · F. ENRIQUES IN BOLOGNA G. GIRAUD IN TURIN · G. GUARESCHI IN PAVIA · L. HEFFTER IN KIEL W. JACOBSTHAL IN BERLIN · H. LIEBMANN IN LEIPZIG · J. MOLLERUP IN KOPENHAGEN · J. NEUBERG IN LÜTTICH · U. PERAZZO IN TURIN O. STAUDE IN ROSTOCK · E. STEINITZ IN BERLIN · H. WIELEITNER IN PIRMASENS · K. ZINDLER IN INNSBRUCK

HERAUSGEGEBEN VON

H. E. TIMERDING

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

ZWEITE AUFLAGE

ERSTE HÄLFTE

GRUNDLAGEN UND EBENE GEOMETRIE

MIT 54 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1910

COPYRIGHT 1910 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

VORWORT.

Das Repertorium der höheren Geometrie, das hier als zweiter Band von Pascals Repertorium der höheren Mathematik erscheint, befolgt die Grundsätze, die durch den früher in Angriff genommenen, aber noch nicht vollendeten ersten Band gegeben waren. Die erste Auflage des Werkes bildete im italienischen Original und in der ziemlich wortgetreuen deutschen Übersetzung wesentlich eine einfache Zusammenstellung von Definitionen, Formeln, Lehrsätzen und Literaturnachweisen, die der Verfasser mit großem Geschick und bewundernswertem Fleiße ausgeführt hatte. So verdienstvoll und zweckmäßig ein solches Werk an sich ist, so sprachen doch gegen eine wenig veränderte und nur in einigen Punkten ergänzte Neuausgabe gewichtige Bedenken. Die gleichmäßige, gründliche Beherrschung eines so gewaltigen Gebietes ist von einem einzigen Menschen allein nicht zu erwarten, sie ist aber notwendig, wenn das Buch dem Anfänger ein berufener Lehrmeister und dem Weiterstrebenden ein verständiger Führer sein will. Ein einzelner wird auch immer gewisse Teile bevorzugen und dafür andere vernachlässigen; erst durch das Zusammenwirken mehrerer wird eine gleichmäßige Durchdringung des ganzen, ungeheuren Stoffes ermöglicht, um so mehr, als es geboten schien, bis an die heute erreichten Grenzen der Forschung vorzudringen und gerade auf die modernen Ideen und Tendenzen besonderen Nachdruck zu legen, damit so der Studierende mitten auf das Arbeitsfeld der Gegenwart geführt wird und ihm das Buch auch bei selbständiger wissenschaftlicher Arbeit ein zuverlässiger Helfer ist. Aber von dem Augenblicke an, wo ein Hinaufsteigen auf die Höhen der mathematischen Spekulation beabsichtigt wurde, erschien eine einfache Aneinanderreihung von Sätzen und Formeln unmöglich und zwecklos. Denn nur aus einem großen Zusammenhange heraus sind die einzelnen Resultate zu verstehen, und dieser Zusammenhang darf nicht verloren gehen, wenn das Werk mehr sein will als ein Exzerpt aus den landläufigen Lehrbüchern zum Zweck einer bequemen Repetition. Aus diesen Gründen schien es geboten, die leitenden Gedanken in einer kurzen, aber flüssigen Darstellung zu entwickeln, die das Werk auch zu einer ersprießlichen wissenschaftlichen Lektüre macht. Dementsprechend sind

die Anforderungen an das Auffassungsvermögen des Lesers in den einzelnen Abschnitten sehr verschieden, sie sind ganz gering in den elementaren Partien und größer in den weitergehenden Entwicklungen: ich will hier nur an die allgemeine Theorie der algebraischen Kurven erinnern, die in den letzten Jahren eine ungeahnte Bereicherung und eine völlige Umwandlung der Grundanschauungen erfahren hat. So kann das Werk schon von dem Anfänger in die Hand genommen werden und ihm von Wert bleiben, wie weit ihn auch seine Studien führen.

Das sind in Kürze die Gesichtspunkte, welche die Herausgeber leiteten. Die Möglichkeit der Ausführung wurde aber erst gewährleistet durch das selbstlose Interesse der Herren, die sich der mühevollen und in ihrem ganzen Werte selten gewürdigten Arbeit unterzogen, ein größeres oder kleineres Wissensgebiet mit der geforderten Kürze und doch klar und lesbar darzustellen. Den Mitarbeitern dieses Bandes gebührt daher mein innigster Dank, ganz besonders auch für die Opferwilligkeit, mit der sie sich zu den aus Rücksicht auf die angrenzenden Kapitel unvermeidlichen Kürzungen und Änderungen in ihren Arbeiten verstanden haben. Die Bearbeiter dieser ersten Hälfte verteilen sich auf Deutschland, Italien und Dänemark. Das Schwinden des geometrischen Interesses in Deutschland ließ es nicht anders möglich erscheinen. Aber ich kann es, abgesehen von der Übersetzerarbeit, die es mir auferlegte, nicht bedauern, im Gegenteil, ich freue mich, wenn hierdurch ein weniges dazu beigetragen wird, das Band gemeinsamer wissenschaftlicher Arbeit zwischen den einzelnen Nationen noch enger zu schlingen.

Man wird zweifellos an dem Buche, auch was Anlage und Form betrifft, manches vermissen und manches zu tadeln finden. Für die Mitteilung tatsächlicher Unrichtigkeiten werde ich immer dankbar sein. Daß sie unvermeidlich sind und mit dem Umfange des behandelten Gebietes zunehmen, wird der Einsichtige wohl begreifen.

Den zweiten Halbband hoffe ich in Jahresfrist folgen lassen zu können. Er wird am Schlusse auch das Register enthalten. Die Verlagshandlung hat den Druck des Buches mit der gewohnten Sorgfalt behandelt und allen meinen Wünschen ein hilfreiches Entgegenkommen gezeigt, wofür ich ihr von Herzen danke.

Braunschweig, Weihnachten 1909.

H. E. TIMERDING.

INHALTSVERZEICHNIS.

ERSTER ABSCHNITT.

Grundlagen.

Kapitel I.

Grundlagen der Elementargeometrie.

Von *J. Mollerup* in Kopenhagen.

		Seite
§ 1.	Die graphischen Axiome	4
§ 2.	Die Teilung der Ebene durch Polygone	7
§ 3.	Die Teilung des Raumes durch ein Tetraeder	9
§ 4.	Die Anordnungssätze der Ebene	10
§ 5.	Die Axiome der Kongruenz	13
§ 6.	Parallelenaxiom	15
§ 7.	Die Lehre von den geometrischen Proportionen und das Rechnen mit Strecken	16
§ 8.	Der Flächeninhalt eines ebenen Polygons	20
§ 9.	Rektifikation und Quadratur des Kreises	21
§ 10.	Konstruktiv unausführbare Aufgaben	22
§ 11.	Kongruenz und Symmetrie	23

Kapitel II.

Ebene Kreisgeometrie.

Von *H. Liebmann* in Leipzig.

§ 1.	Folgerungen aus dem Satz vom Peripheriewinkel	26
§ 2.	Die Lehre von den Polaren. Steiners Linealkonstruktionen mit festem Kreis	28
§ 3.	Kreisbüschel, Kreisbündel und die Aufgabe des Apollonius	33
§ 4.	Das Malfattische Problem	38
§ 5.	Die stereographische Projektion und die Kreisverwandtschaften	40
§ 6.	Die Konstruktionen von Mascheroni	46

Kapitel III.

Übergang zur neueren Geometrie.

Von *H. Timerding* in Straßburg und *L. Heffter* in Kiel.

A. Metrischer Urprung der projektiven Geometrie.

Von *H. Timerding.*

§ 1.	Ansatz der neueren Geometrie	48
§ 2.	Doppelverhältnisse	50
§ 3.	Involutionen	52
§ 4.	Projektive Eigenschaften der Figuren	54

B. Gruppentheoretische Begründung der Euklidischen Geometrie.

Von *L. Heffter.*

Seite

§ 5. Bedeutung der Transformationen für die Charakterisierung der Geometrie 57
§ 6. Uneigentliche Elemente 57
§ 7. Projektive Gruppe und projektive Geometrie 58
§ 8. Affine Gruppe und affine Geometrie 59
§ 9. Äquiforme Gruppe und äquiforme Geometrie 60
§ 10. Parallel- und Orthogonalmetrik als spezialisierte projektive Geometrie 61

Kapitel IV.

Grundlagen der analytischen Geometrie.

Von *G. Guareschi* in Pavia.

§ 1. Koordinaten der Punkte einer Ebene. Richtungskosinus . 65
§ 2. Gerade Linien in einer Ebene. Koordinatentransformation. Polarkoordinaten 68
§ 3. Koordinaten der Punkte im Raum 73
§ 4. Ebenen- und Linienkoordinaten 77
§ 5. Normalform der Ebenengleichung. Winkel zwischen Ebenen 80
§ 6. Koordinatentransformation. Polarkoordinaten. Projektive Ebenenbüschel und Punktreihen 83
Historische und bibliographische Notizen 86

Kapitel V.

Grundlagen der affinen Geometrie.

Von *H. Timerding* in Straßburg.

§ 1. Der Desarguessche Satz 88
§ 2. Die Pascalsche Geometrie 91
§ 3. Affinitäten 95

Kapitel VI.

Grundlagen der projektiven Geometrie.

Von *G. Guareschi* in Pavia.

§ 1. Uneigentliche Elemente. Das Axiomensystem der projektiven Geometrie 102
§ 2. Grundlegende Sätze. Dualitätsprinzip. Harmonische Elemente 106
§ 3. Projektive Beziehungen zwischen Grundgebilden erster Stufe 112
§ 4. Projektive Beziehungen zwischen Grundgebilden zweiter Stufe 118
§ 5. Projektive Beziehungen zwischen Grundgebilden dritter Stufe 122

Kapitel VII.

Projektive Koordinaten.

Von *G. Guareschi* in Pavia.

Seite

§ 1. Projektive Koordinaten in den Grundgebilden erster Stufe 127
§ 2. Projektive Koordinaten in den Grundgebilden zweiter Stufe 134
§ 3. Projektive Koordinaten in den Grundgebilden dritter Stufe 142
§ 4. Linienkoordinaten 149

Kapitel VIII.

Geometrische Rechnungsarten.

Von *H. Timerding* in Straßburg.

§ 1. Geometrische Theorie der komplexen Zahlen 152
§ 2. Die Quaternionen. Vektoren. Äußere und innere Produkte 155
§ 3. Die Graßmannsche Punktrechnung 161
§ 4. Theorie der Matrices 167

Kapitel IX.

Topologie.

Von *M. Dehn* in Münster i. W.

§ 1. Einleitung 174
§ 2. Complexus 177
§ 3. Nexus 183
§ 4. Connexus 187
§ 5. Isotopie 189
§ 6. Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten 192

ZWEITER ABSCHNITT.

Ebene Geometrie.

Kapitel X.

Elementare Erzeugungsweisen und Eigenschaften der Kegelschnitte.

Von *F. Dingeldey* in Darmstadt.

§ 1. Die Kegelschnitte im griechischen Altertum 197
§ 2. Schnitt von Kegel und Ebene, Scheitelgleichung 198
§ 3. Konstante Summe 0 der Differenz der Abstände von zwei festen Punkten 200
§ 4. Gestalt der Ellipse 201
§ 5. Gestalt der Hyperbel 203

Seite

§ 6. Definition der Kegelschnitte durch Brennpunkt und Leitlinie 204
§ 7. Gestalt der Parabel 206
§ 8. Elementare Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte 207
§ 9. Quadratur 209
§ 10. Rektifikation 209
§ 11. Kegelschnittzirkel 211

Kapitel XI.

Allgemeine Theorie der Kegelschnitte.

Von *F. Dingeldey* in Darmstadt.

§ 1. Einleitende Bemerkungen 213
§ 2. Gleichung der Kurve 2. Ordnung 214
§ 3. Schnittpunkte mit einer Geraden. Pol und Polare . . . 215
§ 4. Gleichung in Linienkoordinaten 217
§ 5. Zerfallende Kurven 219
§ 6. Kurve zweiter Klasse 220
§ 7. Polardreieck. Polarviereck 221
§ 8. Verhalten zur unendlich fernen Geraden 222
§ 9. Konjugierte Durchmesser. Mittelpunkt 223
§ 10. Transformation der Mittelpunktskegelschnitte auf die Achsen, der Parabel auf Achse und Scheiteltangente . . 224
§ 11. Kriterien der Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse 228
§ 12. Asymptoten. Gleichseitige Hyperbel 229
§ 13. Direktorkreis. Ähnliche Kegelschnitte 230
§ 14. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser 231
§ 15. Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel oder Punktreihen . 232
§ 16. Satz von Pascal 234
§ 17. Eingeschriebene Polygone. Schließungssatz von Poncelet 238
§ 18. Neuere Definitionen der Brennpunkte 240
§ 19. Normalen der Kegelschnitte 241
§ 20. Krümmungskreis 243
§ 21. Krümmungskreise zu verschiedenen Stellen einer Ellipse. Evolute der Kegelschnitte 245

Kapitel XII.

Kegelschnittsysteme.

Von *F. Dingeldey* in Darmstadt.

A. Kegelschnittbüschel.

§ 1. Geradenpaare des Büschels. Polardreieck 246
§ 2. Satz von Desargues und Sturm 247
§ 3. Polkegelschnitt einer Geraden 248
§ 4. Im Büschel enthaltene Kurvenarten 249
§ 5. Einige geometrische Örter 251
§ 6. Doppelverhältnis der Grundpunkte 253

B. Kegelschnittscharen und sonstige Kegelschnittsysteme erster Stufe.

Seite

§ 7. Dualität zwischen Kegelschnittschar und Kegelschnittbüschel 253
§ 8. In der Schar enthaltene Kurvenarten 255
§ 9. Einige geometrische Örter 256
§ 10. Konfokale Kegelschnitte 257
§ 11. Büschelschar einander doppelt berührender Kegelschnitte 260
§ 12. Sonstige Kegelschnittsysteme 260

C. Kegelschnittnetze und Kegelschnittgewebe.

§ 13. Kegelschnittnetze 262
§ 14. Kegelschnittgewebe 263

D. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme in konjugierter Lage.

§ 15. Einzelne Kegelschnitte in konjugierter Lage 264
§ 16. Kegelschnittsysteme in konjugierter Lage 266
Zusammenstellung abkürzender Bezeichnungen 268

Kapitel XIII.

Allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Kurven.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

Bibliographische Notizen 270
§ 1. Algebraische ebene Kurven und ihre reelle Darstellung . 271
§ 2. Definitionen und elementare Eigenschaften der ebenen algebraischen Kurven 273
§ 3. Elementare Lehrsätze über lineare Kurvensysteme . . . 276
§ 4. Polareigenschaften 278
§ 5. Apolarität 280
§ 6. Kovariante Kurven 282
§ 7. Die Plückerschen Formeln 285
§ 8. Erzeugung algebraischer Kurven. Rein geometrische Untersuchungen 287
§ 9. Systeme von einfach unendlich vielen Kurven. Charakteristikentheorie 289
§ 10. Auflösung der Singularitäten. Zweige. Reihenentwicklungen 291
§ 11. Das Geschlecht und die adjungierten Kurven. Erweiterung der Plückerschen Formeln. Plückersche Äquivalente . . 297
§ 12. Reelle Züge einer ebenen algebraischen Kurve 303

Kapitel XIV.

Die Geometrie auf einer ebenen algebraischen Kurve.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

§ 1. Der Noethersche Fundamentalsatz 306
§ 2. Die linearen Scharen von Punktgruppen 307
§ 3. Der Restsatz. Voll- und Teilscharen. Operationen mit linearen Scharen 310

Seite

§ 4. Speziale und nicht-speziale Scharen 312
§ 5. Erweiterungen und spezielle Fälle 315
§ 6. Das Problem der Spezialgruppen und ausgezeichneten Gruppen 316
§ 7. Normalkurven 317
§ 8. Die Moduln einer Klasse von algebraischen Kurven. . . 319
§ 9. Anwendungen des Abelschen Theorems. Schnittpunktsätze 320
§ 10. Berührungsaufgaben 322
§ 11. Rationale Kurven 326
§ 12. Elliptische und hyperelliptische Kurven 332
§ 13. Invariante Eigenschaften der ebenen linearen Kurvensysteme. 334
§ 14. Reduktion der linearen Kurvensysteme auf bestimmte Typen 337
§ 15. Büschel, Netze und Komplexe von Kurven 338

Kapitel XV.

Die Punktkorrespondenzen zwischen algebraischen Kurven.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

§ 1. Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven. Zeuthensche Formel. 342
§ 2. Korrespondenzen zwischen rationalen Kurven. Chaslessches Korrespondenzprinzip. 344
§ 3. Korrespondenzen zwischen Kurven von beliebigem Geschlecht. Das Cayley-Brillsche Korrespondenzprinzip . . 345
§ 4. Das Hurwitzsche Korrespondenzprinzip. 347
§ 5. Algebraische Scharen von Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve. Involutionen 350
§ 6. Birationale Transformationen einer Kurve in sich. . . . 352

Kapitel XVI.

Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei Ebenen.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

§ 1. Rationale und birationale Transformationen 356
§ 2. Quadratische Transformationen 362
§ 3. Zerlegung einer birationalen Transformation in Faktoren. Gruppen birationaler Transformationen 365
§ 4. Mehrdeutige Transformationen 366
§ 5. Zyklische birationale Transformationen. Involutionen . . 368
§ 6. Algebraische Korrespondenzen (α, β) zwischen zwei Ebenen 371

Kapitel XVII.

Allgemeine Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung.

Von *G. Giraud* in Turin.

§ 1. Grundeigenschaften. Steinersche Polygone 373
§ 2. Polarentheorie. Hessesche und Cayleysche Kurve. Mehrfache Berührungen. 378

Seite
§ 3. Erzeugung und Konstruktion der Kurve dritter Ordnung . 382
§ 4. Die Konfiguration der Wendepunkte. Syzygetische Büschel. Kanonische Gleichung 384
§ 5. Gestalt und Klassifikation der Kurven 3. Ordnung . . . 388
§ 6. Anwendung der elliptischen Funktionen. Die kubischen Ternärformen 391

Kapitel XVIII.

Allgemeine Theorie der ebenen Kurven vierter Ordnung.

Von *E. Ciani* in Genua.

§ 1. Klassifikation, Gestalt und Erzeugung 397
§ 2. Polarentheorie 399
§ 3. Invariante Gebilde 401
§ 4. Die einhüllenden Systeme von Kegelschnitten und Kurven dritter Ordnung 406
§ 5. Die Konfiguration der Doppeltangenten 408

Kapitel XIX.

Projektive Spezialisierungen von Kurven vierter und dritter Ordnung.

Von *E. Ciani* in Genua und *H. Wieleitner* in Pirmasens.

§ 1. Die selbstprojektiven Kurven vierter Ordnung 415
§ 2. Andere bemerkenswerte Kurven vierter Ordnung vom Geschlechte 3 418
§ 3. Hyperelliptische und elliptische Kurven vierter Ordnung 421
§ 4. Rationale Kurven vierter Ordnung 423
§ 5. Rationale Kurven dritter Ordnung 425

Kapitel XX.

Metrische Eigenschaften algebraischer Kurven.

Von *H. Wieleitner* in Pirmasens.

§ 1. Gerad- und krummlinige Asymptoten 428
§ 2. Transversalentheorie 430
§ 3. Affin metrische Begründung der Polarentheorie. Durchmesser, Mittelpunkte 432
§ 4. Brennpunkte. Potenz 436

Kapitel XXI.

Besondere Erzeugungsarten ebener Kurven.

Von *H. Wieleitner* in Pirmasens.

§ 1. Kissoiden und Konchoiden. Kurven erster Kategorie . . 439
§ 2. Evoluten und Evolventen. Algebraisch und rational rektifizierbare Kurven. Parallelkurven 441
§ 3. Anallagmatische Kurven. Fußpunktskurven 443
§ 4. Kaustiken. Isoptische Linien. Kurven gleicher Potenz . 444
§ 5. Kinematische Gesichtspunkte. Rollkurven 446
§ 6. Natürliche Koordinaten. Methode der Koordinatenverwandlung 448

Kapitel XXII.

Metrisch spezialisierte ebene Kurven.

Von *H. Wieleitner* in Pirmasens.

		Seite
§ 1.	Besondere rationale Kurven dritter Ordnung	453
§ 2.	Rationale Kurven vierter Ordnung, vorzugsweise als Kissoiden und Konchoiden	457
§ 3.	Bizirkulare Kurven vierter und zirkulare Kurven dritter Ordnung vom Geschlechte 1	462
§ 4.	Zyklische Kurven	465
§ 5.	Spezielle zyklische und andere Kurven mit kinematischer Erzeugung	471
§ 6.	Rollkurven verschiedener Art	475
§ 7.	Die Methode der Koordinatenverwandlung	478

Kapitel XXIII.

Ebene Differentialgeometrie.

Von *H. Liebmann* in Leipzig.

§ 1.	Tangenten, Asymptote, Normale	484
§ 2.	Berührung höherer Ordnung zwischen zwei Kurven. Krümmungskreis, Evolute, Evolvente	488
§ 3.	Natürliche Geometrie. Differentialinvarianten	492
§ 4.	Kurvenscharen. Einhüllende Kurve. Striktionslinie	495
§ 5.	Kurvennetze in der Ebene. Abbildungsaufgaben	497
§ 6.	Sätze über zweifach unendliche Kreisscharen. Kurvennetze ohne Umwege, Isogonal- und Äquitangentialkurven	500

Kapitel XXIV.

Die nichteuklidische Geometrie.

Von *J. Mollerup* in Kopenhagen.

§ 1.	Einleitung	505
§ 2.	Die projektive Maßgeometrie	508
§ 3.	Die elliptische Maßbestimmung in den Grundgebilden zweiter Stufe	510
§ 4.	Die hyperbolische Maßbestimmung in der Ebene	515
§ 5.	Die hyperbolischen Bewegungen	519
§ 6.	Andere Verwirklichungen der nichteuklidischen Geometrie	521
§ 7.	Die nichtarchimedischen nichteuklidischen Geometrien nach F. Schur	522
§ 8.	Die nichtarchimedische Geometrie nach M. Dehn	528
§ 9.	Die Hjelmslevsche Begründung der ebenen Geometrie	531

Verzeichnis der hauptsächlichsten Abkürzungen

die bei den Zitaten angewandt sind.

Acta Math.	Acta Mathematica (Stockholm)
Amer. J.	American Journal of Mathematics (Baltimore)
Ann. di Mat.	Annali di Matematica pura ed applicata (Milano)
Ann. of Math.	Annals of Mathematics (Cambridge)
Ann. éc. norm.	Annales scientifiques de l'école normale supérieure (Paris)
Arch. Math. Phys.	Archiv der Mathematik und Physik (Leipzig)
Berl. Abh.	Abhandlungen der kgl. preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin
Berl. Monatsber.	Monatsberichte der kgl. preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin
Berl. Sitzungsber.	Sitzungsberichte der kgl. preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin
Bibl. Math.	Bibliotheca Mathematica (Leipzig)
Bull. Am. M. S.	Bulletin of the American Mathematical Society (New York)
Bull. Sc. M.	Bulletin des sciences mathématiques et physiques élémentaires
Bull. Soc. M.	Bulletin de la Société Mathématique de France (Paris)
C. R.	Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris)
Dublin Proc.	Proceedings of the Royal Irish Academy
Dublin Trans.	Transactions of the Royal Irish Academy
Edinb. M. S. Proc.	Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society
Edinb. R. S. Proc.	Proceedings of the Royal Society of Edinburgh
Edinb. Trans.	Transactions of the Royal Society of Edinburgh
Enzykl.	Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften
Fortschr. d. Math.	Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik
Giorn. di Mat.	Giornale di Matematiche di Battaglini (Napoli)
Gött. Abh.	Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen
Gött. Nachr.	Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen
J. éc. polyt.	Journal de l'école polytechnique (Paris)
J. de Math.	Journal de mathématiques pures et appliquées (Paris)
J. f. Math.	Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle (Berlin)
Ist. Lomb. Rend.	Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti (Milano)
Leipz. Abh.	Abhandlungen der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig
Leipz. Ber.	Berichte über die Verhandlungen der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig

Lond. M. S. Proc.	Proceedings of the London Mathematical Society
Lond. R. S. Proc.	Proceedings of the Royal Society of London
Math. Ann.	Mathematische Annalen, begründet 1868 durch A. Clebsch (Leipzig)
Math.-Ver.	Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung (Leipzig)
Mess. of Math.	The Messenger of Mathematics (London)
Monatsh. f. Math.	Monatshefte für Mathematik und Physik (Wien)
Münch. Abh.	Abhandlungen der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München
Münch. Ber.	Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München
Nouv. Ann.	Nouvelles Annales de Mathématiques (Paris)
Nova Acta	Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldinae Carolinae (Halle)
Phil. Mag.	The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of Science
Phil. Trans.	Philosophical Transactions of the Royal Society of London
Prag. Ber.	Sitzungsberichte der kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften
Quart. J.	The Quarterly Journal of pure and applied mathematics (London)
Rev. de Math.	Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica) publiée par G. Peano (Turin)
Rev. de Math. spéc.	Revue de Mathématiques spéciales (Paris)
Rom. Acc. L. Mem.	Memorie della R. Accademia dei Lincei
Rom. Acc. L. Rend.	Atti della R. Accademia dei Lincei. Rendiconti
Torino Atti	Atti della R. Accademia delle scienze di Torino
Torino Mem.	Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino
Trans. Am. M. S.	Transactions of the American Mathematical Society (Lancaster und New York)
Zschr. Math. Phys. (*Zschr. f. Math.*)	Zeitschrift für Mathematik und Physik, begründet 1856 durch O. Schlömilch (Leipzig)
Zschr. f. math. Unt.	Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Leipzig)

Die eingeklammerten Ortsnamen geben in einzelnen Fällen den gegenwärtigen Erscheinungsort an. Die Akademieschriften beziehen sich überall, wo mehrere Abteilungen vorhanden, auf die mathematisch-physikalische Klasse.

Eine eingeklammerte Ziffer bezeichnet in den Zitaten die Serie, eine fette Zahl den Band, eine gewöhnliche Zahl die Seite der periodischen Veröffentlichung.

ERSTER ABSCHNITT

GRUNDLAGEN

Kapitel I.

Grundlagen der Elementargeometrie.

Von *Johannes Mollerup* in Kopenhagen.

Das Wesen einer axiomatischen Darstellung besteht darin, daß sie nicht damit anfängt, die zu behandelnden Begriffe zu definieren. Die Definition eines Begriffes ist seine Zurückführung auf schon bekannte Begriffe; halten wir z. B. die Begriffe des Punktes, der Geraden und der Strecke für bekannt, dann können wir den Begriff des Dreiecks so definieren: „ein Dreieck ist die Gesamtheit von drei nicht in einer Linie liegenden Punkten samt den verbindenden Strecken." Von Hause aus gibt es aber keine geometrischen Begriffe, und „Punkt" und „Gerade" bleiben deshalb undefiniert. Sagt man, ein Punkt sei die Grenze einer Strecke, dann setzt man die Begriffe der Grenze und der Strecke voraus; sagt man, ein Punkt sei die Grenze eines Körpers, der sich immer mehr zusammenzieht, so setzt man ebenso eine Reihe von Begriffen voraus, die viel komplizierter als der zu definierende Begriff des Punktes sind. Derselbe Einwand gilt für die Definition der Geraden als die Punktmenge, die immer fest bleibt, wenn zwei ihrer Punkte festgehalten werden. Man läßt daher in den Axiomen die elementaren geometrischen Begriffe undefiniert auftreten. Wenn Euklid seine *„Elemente"* mit Definitionen beginnt wie die folgende: „Ein Punkt ist, was nicht geteilt werden kann," „Eine Linie ist eine Länge ohne Breite" usw., dann sind diese nicht als Definitionen im eigentlichen Sinne aufzufassen; vielmehr will er nur die Aufmerksamkeit auf die bequemste Veranschaulichung richten.

Unser Wissen von den grundlegenden geometrischen Begriffen beschränkt sich auf das, was in den Axiomen enthalten ist und was wir aus den Axiomen deduzieren können.

Die Axiome beschreiben die gegenseitigen Beziehungen der undefinierten geometrischen Grundbegriffe; an sie können wir die folgenden Forderungen stellen:

1. *Die Axiome müssen widerspruchslos sein,* d. h. es soll unmöglich sein, durch logische Schlüsse von ihnen ausgehend zu irgendeinem Widerspruch zu gelangen.

2. *Die Axiome sollen Ausdrücke unserer einfachsten geometrischen Empfindungen sein,* wie wir sie aus den Kenntnissen von den Dingen, die wir im täglichen Leben mit den Worten „Punkt" und „Gerade" in Verbindung bringen, erworben haben.

3. *Sämtliche Axiome müssen ein vollständiges System bilden,* d. h. jedes Ding, welches ihnen genügt, soll selbst als Punkt oder Gerade konstruierbar sein.

4. *Die Axiome müssen voneinander unabhängig sein,* d. h. es darf nicht möglich sein, ein Axiom oder einen Teil eines solchen als Lehrsatz mittelst der anderen Axiome zu beweisen.

M. Pasch hat in seinen *„Vorlesungen über neuere Geometrie"*, Leipzig 1882, besonders auf die zweite Forderung das Gewicht gelegt; er hat sich damit begnügt, solche Tatsachen als Axiome aufzustellen, die innerhalb eines endlichen Raumstückes der Erfahrung zugänglich sind, und die erste Forderung nicht beachtet. Es sind aber die geometrischen Empfindungen nicht als hinreichend scharf anzusehen, damit die erste Forderung überflüssig sein könne. D. Hilbert hat deshalb in seinen *„Grundlagen der Geometrie"*, 1899, 2. Aufl. 1903, das Hauptgewicht auf die erste Forderung gelegt. Ohne die zweite Forderung hätte indessen die Aufgabe, die Geometrie axiomatisch zu begründen, allzu viele Lösungen.

Der Behauptung, daß die Axiome das ganze Beweismaterial der abzuleitenden Geometrie enthalten, indem jede Benutzung der Anschauung auf logische Anwendung der Axiome zurückgeführt werden kann, ist noch hinzuzufügen, daß wir die Idee der beliebigen ganzen Zahl als ausgebildet und die Arithmetik sowie die Analysis als dadurch begründet ansehen.

Wir benutzen bei der Formulierung unserer Sätze die klare und unmißverständliche Terminologie der Mengenlehre. Wir unterscheiden drei Arten von Axiomen: die graphischen Axiome, die Kongruenzaxiome und das Parallelenaxiom. Hierzu kommt noch ein ergänzendes Axiom.

§ 1. Die graphischen Axiome.

Diese Axiome werden auch Axiome der Verknüpfung und Anordnung oder auch noch die projektiven Axiome genannt; sie lauten nach Peano, *„Sui fondamenti della Geometria," Riv. di*

mat. **4**, 51 (1894), und F. Schur, *Über die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann.* **55**, 265 (1901):

1. Es gibt mindestens zwei verschiedene Punkte.

2. Zwei voneinander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade AB.

3. Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

4. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt auch B zwischen C und A.

5. Wenn A und B zwei verschiedene Punkte sind, dann enthält die Gerade AB einen Punkt C, der nicht zwischen A und B liegt.

6. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.

7. Wenn A und B verschiedene Punkte sind, gibt es einen Punkt C außer der Geraden AB.

8. Wenn A, B, C drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte sind, D ein Punkt zwischen B und C, E ein Punkt zwischen A und D, dann enthält die Gerade BE einen Punkt F zwischen A und C.

9. Wenn A, B, C drei Punkte sind, die nicht in einer Geraden liegen, D ein Punkt zwischen A und B, E ein Punkt zwischen B und C, dann haben die beiden Geraden CD und AE einen Punkt gemein, der zwischen C und D und zwischen A und E liegt.

10. Wenn A, B, C drei Punkte sind, die nicht in einer Geraden liegen, dann gibt es stets einen Punkt D, so daß, wenn E ein Punkt zwischen B und C ist, die Gerade DE keinen Punkt mit AC oder mit AB gemein hat.

Die Axiome 1—6 heißen die *linearen*, 7—9 die *ebenen Axiome*, 10 das *räumliche Axiom*.

Mittelst dieser Axiome werden nun (Schur, *Ann.* **55**, 269) die graphischen Tatsachen hergeleitet, die in den nachfolgenden *Definitionen* und *Lehrsätzen* enthalten sind.

Definition 1. Eine *Strecke* (AB) ist die Menge zweier Punkte A und B; nach Axiom 5, 7, 8 liegen zwischen A, B immer Punkte der Geraden AB, diese Punkte liegen *innerhalb* oder *auf* der Strecke, oder sie *gehören der Strecke an*; A und B sind die Endpunkte der Strecke und gehören auch derselben an. Ein Punkt der Geraden, der nicht der Strecke angehört, liegt *außerhalb* der Strecke. Die Strecke (AB) und ein Punkt C der Geraden AB, wo B zwischen A und C liegt, definieren eine Menge, *die Verlängerung* der Strecke (AB); ein Punkt D gehört zu der Verlängerung der Strecke (AB), wenn B zwischen A und D liegt.

Def. 2. Eine *Ebene* ist eine Menge von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C; ein Punkt D liegt *in* der Ebene ABC, wenn entweder die Gerade AD einen Punkt der Strecke BC, oder die Gerade BD einen Punkt der Strecke CA, oder die Gerade CD einen Punkt der Strecke AB enthält.

Eine Ebene ABC enthält also jeden Punkt jeder der Strecken (AB), (BC), (CA).

Eine Gerade gehört einer Ebene an, wenn jeder Punkt der Geraden in der Ebene liegt.

Zwei Ebenen heißen *identisch*, wenn jeder Punkt der einen Ebene der anderen angehört.

Def. 3. Ein *Dreieck* ist die Menge von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C und den Strecken AB, BC, CA. Ein Punkt D liegt *innerhalb des Dreiecks*, wenn es einen Punkt E der Strecke AB bzw. BC bzw. CA gibt, so daß D ein Punkt der Strecke CE bzw. AE bzw. BE ist. Nach Ax. 8 sind diese drei Fälle identisch.

Satz 1. Ist ABC ein Dreieck und sind D, E, F drei Punkte der Ebene ABC, die nicht in einer Geraden liegen, dann sind die Ebenen ABC und DEF identisch.

Def. 4. Ein Dreieck ABC und ein Punkt P innerhalb des Dreiecks bestimmen eine Menge (ABC), *das Innere des Dreiecks*; jeder Punkt innerhalb des Dreiecks gehört zu (ABC).

Sind AD und BC Strecken, die sich im Punkte E schneiden, dann sagen wir: D wird von A aus auf BC in E projiziert. Ein Dreieck ABC und ein Punkt P der Ebene ABC, der von A auf die Strecke BC in P_1 projiziert wird, wo A zwischen P und P_1 liegt, bestimmen eine Menge (A); ein Punkt Q gehört oder liegt in (A), wenn Q dieselbe Bedingung wie P erfüllt.

Ein Dreieck ABC und ein Punkt P der Ebene, der aus C auf die Strecke AB in P_1 projiziert wird, wo P_1 zwischen P und C liegt, bestimmen eine Menge (AB); ein Punkt Q gehört zu (AB) oder liegt in (AB), wenn Q dieselbe Bedingung wie P erfüllt.

Satz 2. Jeder Punkt einer Ebene ABC, der nicht auf einer der Geraden AB, BC, CA liegt, gehört zu einer und nur einer der 7 Mengen:

$$(ABC),\ (A),\ (B),\ (C),\ (AB),\ (BC),\ (CA).$$

Def. 5. Eine Gerade a und ein Punkt A außerhalb der Geraden definieren eine *Seite* oder eine *Halbebene* $\{aA\}$ der Geraden; ein Punkt B der Ebene (aA) liegt auf der Seite $\{aA\}$, wenn die Strecke AB die Gerade a nicht schneidet. Zwei Seiten

einer Geraden sind identisch, wenn jeder Punkt der einen Seite der anderen Seite angehört und umgekehrt.

Satz 3. Sei ABC ein gegebenes Dreieck; es wird dann jede Gerade der Ebene, welche die Strecke BC schneidet, entweder den Punkt A oder einen anderen Punkt der Strecken AB oder AC enthalten.

Satz 4. In einer gegebenen Ebene hat eine Gerade zwei und nur zwei nicht identische Seiten; eine Strecke, die zwei Punkte derselben Seite verbindet, schneidet die Gerade nicht, während eine Strecke, die zwei Punkte verschiedener Seiten verbindet, die Gerade immer schneidet.

Satz 5. Jede Menge von n verschiedenen Punkten einer Geraden kann in der Weise wohlgeordnet werden, daß, wenn $A_1 A_2 \dots A_n$ die Wohlordnung angibt und A_p, A_q, A_r irgend drei Punkte der Menge sind, A_q immer dann zwischen A_p und A_r liegt, wenn $p < q < r$. Außer dieser Wohlordnung gibt es noch eine und nur eine, die umgekehrte, mit derselben Eigenschaft (vgl. E. H. Moore, *Trans. of the Amer. Math. Society* **3**, 150 (1902)).

§ 2. Die Teilung der Ebene durch Polygone.

Def. 6. Ein *Polygon* ist eine wohlgeordnete Menge von n Punkten einer Ebene, von denen keine drei aufeinander folgende in einer Geraden liegen; ist das Polygon $ABC \dots K$, so setzen wir

$$ABC \cdots K = BC \cdots KA = C \cdots KAB = \cdots = K \cdots CBA.$$

Die Strecken $AB, BC \dots KA$ sind die *Seiten* des Polygons; die wohlgeordnete Menge dieser Strecken heißt der *Umfang* des Polygons. Die Punkte $ABC \dots K$ heißen die *Ecken* des Polygons; eine Strecke zwischen zwei Ecken, die keine Seite ist, heißt eine *Diagonale*. Ein Polygon heißt *konvex*, wenn alle Ecken, mit Ausnahme von irgend zwei aufeinanderfolgenden Ecken, auf derselben Seite von der Verbindungslinie dieser zwei Ecken liegen. Ein Dreieck ist immer konvex.

Es läßt sich sehr einfach zeigen, daß es immer ein konvexes n-Eck gibt.

Def. 7. Das *Innere* des konvexen Polygons $ABC \dots JK$ ist die Menge, die aus dem Innern der Dreiecke $ABC, ACD, \dots, AJK$ und den Diagonalen $AC, AD, \dots, AJ$ besteht; ein Punkt *gehört* dem Innern des Polygons *an*, wenn derselbe einer der genannten Teilmengen angehört. Ein Punkt, der weder dem Innern

noch dem Umfang des Polygons angehört, liegt *außerhalb* des Polygons.

Es zeigt sich leicht, daß man ebensogut das Innere durch die Dreiecke bestimmen kann, die eine gemeinsame Ecke in $B, C, \ldots$ oder K haben. Auch kann man nun ohne Schwierigkeit die der Anschauung sofort zugänglichen Tatsachen des Schneidens eines konvexen Polygons mit einer Geraden herleiten.

Def. 8. Wenn die Ecken eines Polygons sämtlich verschieden sind, keine drei dieser Ecken in eine gerade Linie fallen und endlich irgend zwei nicht zusammenstoßende Seiten des Polygons keinen Punkt miteinander gemein haben, so heißt das Polygon *einfach*. Es sei FG eine beliebige Seite eines einfachen Polygons und $K_1 K_2 \ldots K_n$ die wohlgeordnete Menge (Satz 5) der Schnittpunkte der Geraden FG mit den Seiten des Polygons; fällt K_q in eine Ecke des Polygons, so setzen wir $K_{q+1} = K_q$. Wir markieren: 1. die ungeteilten Seiten des Polygons, 2. die Strecken, in welche die anderen Seiten zerlegt werden, 3. die Strecken $K_1 K_2$, $K_3 K_4, \ldots, K_{2\mu-1} K_{2\mu}$, wenn $n = 2\mu$, oder $G K_1, K_2 K_3, \ldots, K_{2\mu} K_{2\mu+1}$, wenn $n = 2\mu + 1$. Es werden nun auch die Verlängerungen aller anderen Seiten jedesmal mit den übrigen Seiten des Polygons zum Schnitt gebracht und die zu markierenden Strecken bestimmt. Die letzteren bestimmen eine Anzahl konvexer Polygone, deren Ecken sind: 1. die gegebenen Ecken, 2. Schnittpunkte der Verlängerung einer Seite mit einer anderen Seite, 3. Schnittpunkte zweier Verlängerungen der Seiten. Diese konvexen Polygone, die eindeutig durch das gegebene Polygon bestimmt werden, heißen die *Teilpolygone* des gegebenen Polygons.

Das *Innere* eines einfachen Polygons besteht aus dem Innern und dem Umfang der konvexen Teilpolygone, ausgenommen den Umfang des gegebenen Polygons.

Ein *äußerer* Punkt ist ein Punkt der Ebene des Polygons, der weder dem Umfange noch dem Innern angehört.

Der Umfang und ein äußerer Punkt bestimmen eine Menge, die das *Äußere* des Polygons heißt; ein äußerer Punkt *gehört* dem Äußern des Polygons *an*.

Ein *Streckenzug* ist eine wohlgeordnete Menge von Strecken $AB, BC, \ldots, KL$.

Satz 6 (Hilbert, *Grundlagen* S. 7). Ist ein einfaches Polygon, dessen Ecken sämtlich in einer Ebene liegen, gegeben, so hat jeder Streckenzug der Ebene, der einen Punkt A des Innern mit einem Punkte B des Äußern verbindet, mindestens einen Punkt mit dem Umfang gemein; sind dagegen A, A' zwei Punkte des

Innern und B, B' zwei Punkte des Äußern, so gibt es stets Streckenzüge der Ebene, die A mit A' und B mit B' verbinden und keinen Punkt mit dem Umfang gemein haben. Es gibt Gerade der Ebene, die ganz im Äußern des Polygons verlaufen, dagegen keine solche Gerade, die ganz im Innern des Polygons verläuft.

Dieser Satz bildet die Grundlagen des *Jordanschen Kurvensatzes* (C. Jordan, *Cours d'Analyse* **I**, 92 (1893)).

§ 3. Die Teilung des Raumes durch ein Tetraeder.

Def. 9. Nach Axiom 10 liegen nicht alle Punkte in derselben Ebene ABC. Ein *Tetraeder* ist die Menge von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten $ABCD$ und den Strecken, die je zwei der Punkte verbinden. Die Punkte $ABCD$ sind die *Ecken*, die Strecken zwischen je zwei der Ecken sind die *Kanten*, die Dreiecke, die von irgend drei Ecken bestimmt werden, heißen die *Flächen* des Tetraeders. AB und CD z. B. sind *gegenüberliegende* Kanten, ebenso liegen die Ecke A und die Fläche BCD gegenüber.

Ein Punkt E liegt *innerhalb* des Tetraeders $ABCD$, wenn E entweder einer Strecke zwischen A und einem innern Punkte des Dreiecks BCD oder einer Strecke zwischen B und einem innern Punkt des Dreiecks ACD usw. angehört. Die vier Fälle sind nach Axiom 8 identisch.

Das Tetraeder und ein innerer Punkt bestimmen eine Menge, das *Innere* des Tetraeders, welche jeden innern Punkt enthält. Aus Axiom 8 folgt nunmehr, daß ein Punkt der Verbindungsstrecke von Punkten zweier gegenüberliegender Kanten dem Innern angehört. Umgekehrt schneidet die Ebene, die durch eine Kante und einen innern Punkt bestimmt wird, die gegenüberliegende Kante.

Def. 10. Raum heißt die Menge von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten A, B, C, D; ein Punkt E gehört dem Raum an oder liegt *innerhalb* des Raumes, wenn die Ebene durch den Punkt und eine Kante die gegenüberliegende Kante schneidet (wir sagen auch: wenn der Punkt aus einer Kante auf die gegenüberliegende Kante projiziert wird). Eine Gerade oder eine Ebene gehören dem Raume an, wenn jeder Punkt der Geraden oder der Ebene dem Raume angehört.

P gehört der Menge (BCD) an, wenn P von A auf das Innere des Dreiecks BCD in Q projiziert wird und Q zwischen A und P liegt; liegt dagegen A zwischen P und Q, dann gehört P einer Menge (A) an. P gehört einer Menge (AB) an, wenn die Ebene (PAB) die Kante CD in Q schneidet und wenn P im

Dreieck (QAB) der Menge (AB) angehört. In dieser Weise entstehen im ganzen $4 + 4 + 6 + 1 = 15$ Mengen; kein Punkt ist zwei dieser Mengen gemeinsam, und jeder Punkt des Raumes, der keiner Kante angehört, gehört einer dieser Mengen an. — Eine Ebene α und ein Punkt A bestimmen einen Raum (αA).

Satz 7. Ist $ABCD$ ein Raum und sind E, F, G, H vier Punkte dieses Raumes, die nicht in einer und derselben Ebene liegen, dann sind die Räume $ABCD$ und $EFGH$ identisch.

Def. 11. Eine Ebene α und ein Punkt A außerhalb der Ebene definieren eine Menge $\{\alpha A\}$, die wir *eine Seite der Ebene* α oder *einen Halbraum* nennen; ein Punkt B des Raumes (αA) liegt auf der Seite $\{\alpha A\}$, wenn die Strecke AB die Ebene α nicht schneidet. Zwei Seiten einer Ebene sind identisch, wenn jeder Punkt der einen Seite der andern Seite angehört und umgekehrt.

Satz 8. In einem gegebenen Raum hat eine Ebene zwei Seiten; eine Strecke, die zwei Punkte derselben Seite verbindet, schneidet die Ebene nicht, während eine Strecke, die zwei Punkte verschiedener Seiten verbindet, die Ebene immer schneidet.

Aus diesem Satze folgt nunmehr der Hauptsatz:

Satz 9. Zwei Ebenen eines Raumes, die einen Punkt gemein haben, haben auch eine Gerade gemein.

Die Beweise der vorstehenden Sätze finden sich bei F. Schur, *Math. Ann.* **55**, S. 264—270.

§ 4. Die Anordnungssätze der Ebene.

Nach Satz 5 (§ 1) ist jede endliche Menge von Punkten einer Geraden einer solchen Wohlordnung $A_1 A_2 \ldots A_n$ fähig, daß immer A_q zwischen A_p und A_r fällt, wenn $p < q < r$. Diese Wohlordnung wird eine *natürliche* genannt. Jede Gerade hat zwei natürliche Wohlordnungen.

Def. 12. Unter einem *Umlaufssinn* auf einer Geraden verstehen wir eine wohlgeordnete Menge von drei Punkten der Geraden. Die Umlaufssinne ABC und DEF derselben Geraden sind identisch oder verschieden, je nachdem diese Wohlordnungen mit derselben natürlichen Wohlordnung der *sämtlichen* Punkte $ABCDEF$ übereinstimmen oder nicht. Sind die Punkte D, E, F nicht alle von A, B, C verschieden, so können wir doch dieselbe Erklärung beibehalten.

α) Drei Punkte einer Geraden, A, B, C, bestimmen zwei verschiedene Umlaufssinne:

$$ABC = BCA = CAB \quad \text{und} \quad ACB = CBA = BAC.$$

β) Sind $ABCD$ vier Punkte einer Geraden, dann ist der Umlaufssinn ADB entweder mit ABC oder ACB identisch.

γ) Wenn zwei Umlaufssinne mit demselben dritten identisch sind, dann sind sie auch miteinander identisch.

δ) Sind A, B, C, D vier Punkte einer Geraden und sind die Umläufe ADB und ABC identisch, so ist auch

$$ADC = DBC = ADB = ABC.$$

ε) Sind A, B, C, D vier Punkte einer Geraden a, Uml. ADB = Uml. ABC, und werden A, B, C, D aus einem Punkte S auf eine Gerade b in A, B_1, C_1, D_1 projiziert, dann ist auch Uml. AD_1B_1 = Uml. AB_1C_1.

Der letzte Satz wird unter besonderer Heranziehung der Axiome 8 und 9 bewiesen. Eine einfache Folge dieses Satzes ist der nachstehende:

Satz 10. Sind A, B, C, D vier Punkte einer Geraden a, ist Uml. ADB = Uml. ABC, und werden A, B, C, D aus einem Punkte S in die vier Punkte $A_1B_1C_1D_1$ einer Geraden b projiziert, dann ist auch Uml. $A_1D_1B_1$ = Uml. $A_1B_1C_1$.

Def. 13. Sind A und B zwei Punkte, so nennen wir die Menge, die aus der Strecke AB und deren Verlängerung über B hinaus besteht, einen *Halbstrahl* mit dem Endpunkt A; es gilt dann der einleuchtende Satz:

Jeder Punkt einer Geraden teilt dieselbe in zwei Halbstrahlen mit diesem Punkt als gemeinsamem Endpunkt.

Ein *Eineck* (ab) besteht aus zwei Halbstrahlen a und b mit gemeinsamem Endpunkt O, die *Ecke* des Einecks; ist A ein Punkt von a, B ein Punkt von b, dann bilden die Mengen (OAB), (AB) und die Strecke AB selbst *das Innere des Einecks* (ab). Sind a, b, c drei Halbstrahlen mit gemeinsamem Endpunkt und gehören b und c derselben Seite der Geraden a an, dann gehört entweder b dem Innern des Einecks (ac) oder c dem Innern des Einecks (ab) an.

Def. 14. Ein Umlaufssinn in einer Ebene um einen Punkt ist eine wohlgeordnete Menge von drei Halbstrahlen der Ebene, die von dem Punkte ausgehen. Zur Vergleichung zweier Umlaufssinne um denselben Punkt dienen die folgenden beiden Regeln: Ein Umlaufssinn ändert sich, wenn ein Halbstrahl durch den entgegengesetzten ersetzt wird, dann und nur dann, wenn einer der letzteren beiden Halbstrahlen dem Eineck der zwei andern angehört. Sind nun $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ sechs Halbstrahlen mit demselben Ausgangspunkt, $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2$ die entgegengesetzten

Halbstrahlen, welche die ersteren zu den Geraden a, b, c, d, e, f ergänzen, dann bestimmen wir unschwierig eine Gerade l, welche die Geraden in Punkten A, B, C, D, E, F schneidet. Gehören diese Punkte bzw. den Halbstrahlen $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta, e_\varepsilon, f_\varphi$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi = 1$ od. 2) an, dann sollen die Umlaufssinne $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ und $d_\delta e_\varepsilon f_\varphi$ identisch oder verschieden genannt werden, je nachdem die Umlaufssinne ABC und DEF der Geraden l identisch oder verschieden sind.

Auf Grund des Satzes 10 ist diese Bestimmung der zwei Umlaufssinne in der Ebene um einen Punkt herum von der Wahl der benutzten Geraden unabhängig.

Von dem Begriffe des Umlaufssinnes um einen Punkt gelten nun die den Sätzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und dem Satze 10 dualistisch entsprechenden Sätze:

α') Drei Halbstrahlen a_1, b_1, c_1 eines Punktes bestimmen zwei verschiedene Umlaufssinne:

$$a_1 b_1 c_1 = b_1 c_1 a_1 = c_1 a_1 b_1 \quad \text{und} \quad a_1 c_1 b_1 = c_1 b_1 a_1 = b_1 a_1 c_1 .$$

β') Sind a_1, b_1, c_1, d_1 vier Halbstrahlen eines Punktes, dann ist der Umlaufssinn $a_1 d_1 b_1$ entweder mit $a_1 b_1 c_1$ oder mit $a_1 c_1 b_1$ identisch.

γ') Wenn zwei Umlaufssinne mit demselben dritten identisch sind, dann sind sie auch untereinander identisch.

δ') Sind a_1, b_1, c_1, d_1 vier Halbstrahlen eines Punktes und Uml. $a_1 d_1 b_1 =$ Uml. $a_1 b_1 c_1$, dann ist auch

$$\text{Uml. } a_1 d_1 c_1 = \text{Uml. } d_1 b_1 c_1 = \text{Uml. } a_1 d_1 b_1 = \text{Uml. } a_1 b_1 c_1 .$$

ε') Sind a_1, b_1, c_1, d_1 vier Halbstrahlen eines Punktes O und Uml. $a_1 d_1 b_1 =$ Uml. $a_1 b_1 c_1$, a_1', b_1', c_1', d_1' vier Halbstrahlen eines Punktes O' und $(a_1 a_1')$, $(b_1 b_1')$, $(c_1 c_1')$, $(d_1 d_1')$ Punkte derselben Geraden, dann ist auch Uml. $a_1' d_1' b_1' =$ Uml. $a_1' b_1' c_1'$.

Um die Umlaufssinne der Ebene um zwei Punkte O und P zu vergleichen, nennen wir b_1 den Halbstrahl der Geraden PO, der von P aus über O geht; sind dann a_1 und a_1' je ein Halbstrahl durch O und P auf derselben Seite der Geraden PO, ebenso c_1 und c_1' zwei Halbstrahlen durch O und P, die beide auf der entgegengesetzten Seite von PO liegen, dann sind die Umlaufssinne $(a_1 b_1 c_1)$ und $(a_1' b_1 c_1')$ nach Verabredung identisch. Wenn nun ein Umlaufssinn um O sowohl mit einem Umlaufssinn um P als mit einem solchen um Q übereinstimmt, dann sind auch die beiden letzten Umlaufssinne identisch. So wird aus dem Umlaufssinn um einen Punkt herum der Umlaufssinn in einer Ebene.

Wenn man nun den graphischen Axiomen ein *Axiom der Stetigkeit* zur Seite stellt, dann läßt sich die ganze Geometrie, insbesondere die Kongruenzlehre, *definitionsmäßig* aufbauen; um aber nicht aus den elementaren Bahnen hinauszutreten, soll hier nur die *axiomatische* Behandlung der Kongruenzlehre gegeben werden.

§ 5. Die Axiome der Kongruenz.

Diese Axiome sind nach D. Hilbert (*Grundlagen* S. 7):

1. Sind A, B zwei Punkte auf einer Geraden a, ist ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a', so kann man auf a' nach jeder Seite von A hin stets einen und nur einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets

$$AB \equiv AB \quad \text{und} \quad AB \equiv BA.$$

2. Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch $A'B'$ kongruent $A''B''$.

3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder auf einer andern Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann

$$AB \equiv A'B' \quad \text{und} \quad BC \equiv B'C',$$

so ist auch stets

$$AC \equiv A'C'.$$

Unter einem Winkel $\sphericalangle(hk)$ verstehen wir im folgenden das System zweier Halbstrahlen h, k mit demselben Ausgangspunkt.

4. Es sei gegeben ein Winkel $\sphericalangle(hk)$ in einer Ebene α und ein Halbstrahl a' in einer Ebene α', so wie in dieser Ebene eine bestimmte Seite der Geraden, zu der der Halbstrahl gehört, dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so daß der Winkel (hk) kongruent oder gleich dem Winkel $(h'k')$ ist und zugleich alle innern Punkte des Winkels $(h'k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen:

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k').$$

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(hk) \quad \text{und} \quad \sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(kh).$$

5. Wenn ein Winkel (h,k) sowohl dem Winkel $(h'k')$ als auch dem Winkel $(h''k'')$ kongruent ist, so ist auch $(h'k')$ kongruent $(h''k'')$, d. h. aus

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k') \quad \text{und} \quad \sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h''k'')$$

folgt

$$\sphericalangle(h'k') \equiv \sphericalangle(h''k'').$$

6. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so sind auch stets die Kongruenzen $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ und $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$ erfüllt. In engerer Fassung hat Hilbert dieses Axiom *Grundlagen* Anh. II benutzt. Anstatt den Axiomen diese Form zu geben, kann man die Axiome der Bewegung aufstellen, wie Peano (*Riv. di mat.* **4** (1894)) und nach ihm F. Schur (*Math. Ann.* **55**, 274) getan hat. Die drei letzten Axiome Hilberts können nach J. Mollerup (*Math. Ann.* **58**, 479 (1904)) durch zwei andere ersetzt werden; es gelingt so, die Geometrie *ohne den Begriff der Winkelkongruenz* aufzubauen.

Es wird dann definiert: Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind kongruent, wenn $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$ und es werden die Axiome aufgestellt:

a) Es sei ein Dreieck ABC und eine Strecke $A_1C_1 \equiv AC$ gegeben; dann gibt es zwei und nur zwei Punkte B_1 und B_1', so daß

$$\Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta ABC \quad \text{und} \quad \Delta A_1B_1'C_1 \equiv \Delta ABC.$$

b) (Axiom V in Veroneses *„Grundzüge der Geometrie“*.) Es sei $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$; man trägt die paarweise kongruenten Strecken AD und A_1D_1 auf AB und A_1B_1 (oder A_1C_1) und AE und A_1E_1 auf AC und A_1C_1 (oder A_1B_1) ab; dann ist immer $DE \equiv D_1E_1$.

Hilbert beweist (*Grundl.* § 11) die Unabhängigkeit seines Axioms 6, indem er eine Geometrie angibt, in der die übrigen Axiome erfüllt sind, das Axiom 6 aber nicht (vgl. Eugen Meyer, *Über die Kongruenzaxiome*, *Math. Ann.* **64**, 197 (1907)).

Aus den Hilbertschen Kongruenzaxiomen leitet man nun ohne Schwierigkeit die gewöhnlichen Kongruenzsätze von Dreiecken her; ebenso leicht läßt sich der Begriff des rechten Winkels bestimmen; insbesondere beweist man mit Hilfe jener Axiome den Satz, den Euklid als Axiom hinstellt: „Alle rechten Winkel sind einander kongruent.“ Auch die Erweiterung der Kongruenz auf den Raum ist ohne ein weiteres Axiom möglich.

§ 6. Parallelenaxiom.

Sind in einer Ebene α eine Gerade a und ein Punkt A außer a gegeben, dann wird in der Ebene α eine durch A gehende Gerade, die a nicht schneidet, dadurch bestimmt, daß man zuerst A mit einem Punkte von a durch eine Gerade c verbindet und dann die gesuchte Gerade b durch A so annimmt, daß c die Geraden a, b unter gleichen Gegenwinkeln schneidet. Weil c beliebig bleibt, werden in dieser Weise zunächst unendlich viele nicht schneidende Geraden bestimmt. Daß dieselben sämtlich identisch sind, wird durch das *Parallelenaxiom* postuliert. Dieses lautet:

(Euklidisches Axiom) Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a, dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene α nur eine Gerade b, die durch A geht und a nicht schneidet; diese heißt die Parallele zu a durch A.

Nachdem man Jahrhunderte lang versucht hatte, das Parallelenaxiom als Lehrsatz zu beweisen, gelang es im Anfang des 19. Jahrhunderts Gauß, Lobatschefskij und Bolyai zu zeigen, daß es möglich ist, eine Geometrie ohne das euklidische Axiom aufzubauen, bei der in einer Ebene durch einen gegebenen Punkt unendlich viele Geraden gehen, die eine gegebene Gerade nicht schneiden (die *hyperbolische* oder Lobatschefskij-Bolyaische Geometrie). Für die Vorgeschichte dieser Geometrie vgl. Stäckel-Engel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß*, Leipzig 1895.

Aus dem Euklidischen Axiom folgen die Sätze:

1. Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die Gegenwinkel und Wechselwinkel gleich, und umgekehrt.

2. *Die Winkel eines Dreiecks machen zusammen zwei Rechte aus.*

In den Lehrbüchern der Elementargeometrie stellt man oft den letzten Satz als *Grundsatz* (Axiom) auf; in diesem Falle gelingt es, das Parallelenaxiom als Lehrsatz zu beweisen, aber nur unter Hinzunahme des sogenannten Archimedischen Axioms (s. u.).

Definition: Wenn M ein beliebiger Punkt in einer Ebene α ist, so heißt die Gesamtheit aller Punkte A, für welche die Strecken MA einander gleich sind, ein *Kreis; M heißt der Mittelpunkt des Kreises.*

Auf Grund dieser Definition folgen nun leicht die bekannten Sätze über den Kreis, insbesondere die Konstruktion eines Kreises durch irgend drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte, sowie der Satz über die Kongruenz aller Peripheriewinkel über der nämlichen Sehne und der Satz von den Winkeln im Kreisviereck.

§ 7. Die Lehre von den geometrischen Proportionen und das Rechnen mit Strecken.

Die arithmetische Behandlung geradliniger Strecken hat Euklid auf den Satz gegründet:

Größen haben zueinander ein Verhältnis, wenn sie sich durch Vervielfältigung übertreffen können. Daß die Strecken solche Größen sind, wird dann als selbstverständlich angesehen und darauf die Proportionenlehre begründet.

Heute wird dieses Prinzip allgemein *das Archimedische Axiom* genannt und nach Hilbert (*Grundlagen* S. 16) folgendermaßen formuliert:

Es sei A_1 irgendein Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man konstruiere dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ so, daß A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 usw. liegt und überdies die Strecken

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ \ldots$$

einander gleich sind, dann gibt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, daß B zwischen A und A_n liegt.

Den Aufbau der Streckenrechnung auf der Grundlage dieses Axioms findet man im *Lehrbuch der analytischen Geometrie* von F. Schur (1898). Aber schon die *Euklidischen Elemente* enthalten im fünften Buch eine Proportionenlehre, deren Gedankengang mit den modernen Gesichtspunkten durchaus übereinstimmt. *Die Definition der Proportionengleichheit* ist diese: Es wird

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

wenn für irgend zwei positive ganze Zahlen m, n mit

$$ma \gtreqless nb$$

auch

$$mc \gtreqless nd$$

wird.

Im Gegensatz zu dieser sogenannten *Archimedischen Proportionenlehre* hat es sich seit zehn Jahren herausgestellt, daß man die Sätze der elementar-geometrischen Proportionenlehre so wie auch die daraus fließenden Formeln der Trigonometrie und analytischen

Geometrie ebenso einfach ohne Gebrauch des Archimedischen Axioms begründen kann. Es ist dies zuerst von Veronese (*Grundzüge der Geometrie,* deutsche Ausgabe, Leipzig 1894) und in strenger Weise von Hilbert (*Grundl.* § 12) geschehen. Wir bringen hier die *nicht-archimedische Proportionenlehre* in der Form, die ihr von Kneser (*Sitzungsber. der Berl. Math. Ges.* **1**, 4 (1902)) und Mollerup (*Math. Ann.* **56**, 277 (1903), **58**, 479 (1904)) gegeben worden ist.

Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels O werden die Punkte A und B, auf dem andern C und D abgetragen; AC ist parallel zu BD. Diese Lage der vier Strecken OA, OB, OC, OD drücken wir in der Gleichung

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

aus; die einzelnen Verhältnisse haben vorläufig keine Bedeutung. Wir können auch schreiben:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} \quad \text{und} \quad \frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB}.$$

Die drei Glieder der Proportion bestimmen das vierte eindeutig. Aus dieser Definition folgt sofort der Satz: In ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind die entsprechenden Katheten proportional.

(1) *Das kommutative Gesetz*, daß, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ auch, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ist, zeigt sich entweder als eine Folge des Satzes über die Kongruenz aller Peripheriewinkel über der nämlichen Sehne oder des Satzes vom gemeinsamen Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks.

(2) *Das distributive Gesetz,* wonach aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ folgt, ergibt sich einfach aus der Definition der Proportionengleichung.

(3) *Das assoziative Gesetz*, daß aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{a}{e} = \frac{f}{d}$, $\frac{b}{e} = \frac{f}{c}$ folgt, stellt sich nach Kneser als eine formale Folge der andern Gesetze, insbesondere des kommutativen Gesetzes, heraus.

Aus (1) folgt unmittelbar: Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, dann ist auch $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$.

Aus (1) und (2): Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dann ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Aus diesen Sätzen (ohne das assoziative Gesetz) folgt nach Hilbert (*Grundl.* S. 36) der Hauptsatz von den ähnlichen Dreiecken: *In zwei ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Seiten proportional.*

Hieraus folgt wieder der spezialisierte *Desarguessche Satz: Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, daß je zwei entsprechende Seiten einander parallel sind, so laufen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch denselben Punkt oder sind einander parallel, und umgekehrt.*

Aus dem assoziativen Gesetze folgt unmittelbar der *Pascalsche Satz* in der speziellen Formulierung: *Es seien A, B, C bzw. A', B', C' je drei Punkte auf zwei sich schneidenden Geraden, die vom Schnittpunkte der Geraden verschieden sind; ist dann CB' parallel BC' und CA' parallel AC', so ist auch BA' parallel AB'.* Für diesen Satz findet man in den Hilbertschen Grundlagen zwei Beweise mittels der hier angeführten Axiome; die Streckenrechnung wird dann auf diesem Satze aufgebaut (vgl. Kap. V).

Nunmehr zeigt es sich, daß die Proportionen $\frac{a}{b}$ den Sätzen der reellen Arithmetik mit Ausnahme der Stetigkeitssätze genügen. Die Proportionen lassen sich somit selbst als Zahlen auffassen.

Um nun zu untersuchen, welche der gewöhnlichen reellen Zahlen sich unter den Proportionen der nicht-archimedischen Geometrie finden, kann man mit Hilbert (*Grundl.* Kap. VII) die innerhalb dieser Geometrie ausführbaren fundamentalen *Konstruktionen* bestimmen. Diese sind:

1. Zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden und den Schnittpunkt zweier nicht parallelen Geraden zu finden.

2. Eine gegebene Strecke auf einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkte aus abzutragen.

3. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade anzutragen.

4. Durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

5. Zu einer gegebenen Geraden eine Senkrechte zu ziehen.

Zur Ausführung dieser Aufgaben bedürfen wir des *Lineals* und des *Aichmaßes*, eines Instrumentes, welches das Abtragen einer einzigen bestimmten Strecke ermöglicht (J. Kürschák, *Math. Ann.* **55**, 597 (1902)).

Es zeigt sich dann, daß man auf diese Weise lediglich solche

Ausdrücke konstruieren kann, die sich aus gegebenen Parametern in der Weise durch Quadratwurzelziehung bestimmen lassen, daß eine n-fache Quadratwurzel für beliebige Werte der Parameter immer 2^n reelle Werte hat.

Der Satz ist von Hilbert in dem Falle bewiesen (*Grundl.* S. 79), wo der Ausdruck nur von einem gegebenen Parameter abhängt. Auf diese Weise ist die mittlere Proportionale nicht konstruierbar, weil $\sqrt{ab}$ für negative Werte des einen Parameters imaginär wird. Dagegen ist $\sqrt{a^2+b^2}$ konstruierbar und ebenso die gewöhnlichen regulären Polygone. — So ergibt sich: die Zahlen, die sich unter den nicht-archimedischen Proportionen finden, sind die reellen rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen, die nur von solchen Quadratwurzeln abhängen, welche lauter reelle Werte liefern.

Die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden und die Schnittpunkte zweier Kreise können, auch wenn sie reell sind, in unserer nicht-archimedischen Geometrie nicht nachgewiesen werden und müssen durch ein neues Axiom postuliert werden. Wird ein solches ergänzendes Axiom hinzugefügt — was auch dann notwendig ist, wenn das Archimedische Axiom vorausgesetzt wird —, so gelangt man zu allen Konstruktionen mit Lineal und Zirkel, und das zugehörige Zahlensystem enthält alle Quadratwurzeln. Dagegen ist das genannte Axiom überflüssig, wenn man von vornherein das Dedekindsche Axiom der Stetigkeit (s. u.) aufstellt.

Hilbert (*Grundl.* S. 22) hat bewiesen, daß das Archimedische Axiom von den übrigen angenommenen Axiomen unabhängig ist. Er konstruiert den Bereich $\Omega(t)$ aller derjenigen algebraischen Funktionen von t, welche aus t durch die fünf Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und durch die fünfte Operation $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$ hervorgehen, wobei ω selbst eine durch diese fünf Operationen entstandene Zahl ist. Ist c eine beliebige Funktion des Bereiches $\Omega(t)$, so kann sie nur für eine endliche Anzahl von Werten verschwinden; deshalb muß c für genügend große Werte von t entweder stets positiv oder negativ ausfallen. Je nachdem nun der erste oder letztere Fall eintritt, soll c positiv oder negativ heißen; sind a und b zwei Größen unseres Gebietes, dann heiße a größer oder kleiner als b, je nachdem $a-b$ nach der genannten Regel positiv oder negativ ausfällt.

Für die Zahlen unseres Gebietes gelten dann dieselben Regeln der Verknüpfung, Rechnung und Anordnung wie für die reellen Zahlen; dagegen gilt das Archimedische Axiom nicht. Z. B. ist

immer

$$1 + 1 + 1 + \cdots < t.$$

Brauchen wir nunmehr diese nicht-archimedischen Zahlen in gewöhnlicher Weise zum Aufbau einer analytischen Geometrie, so sind in dieser Geometrie die graphischen Axiome, die Axiome der Kongruenz und das Parallelenaxiom erfüllt, das Archimedische Axiom ist es aber nicht, womit die Unabhängigkeit dieses letzteren Axioms von den übrigen bewiesen ist.

§ 8. Der Flächeninhalt eines ebenen Polygons.

Man stellt sich hier die Aufgabe, jedem einfachen Polygon eine Zahl zuzuordnen, die das *Inhaltsmaß* genannt wird und die folgenden zwei Eigenschaften besitzt:

1. Kongruente Polygone haben dasselbe Inhaltsmaß.

2. Ist das Polygon P'' aus den beiden Polygonen P und P' zusammengesetzt, dann ist das Inhaltsmaß von P'' der Summe der Inhaltsmaße von P und P' gleich.

In der gewöhnlichen Darstellung der Lehrbücher geht man axiomatisch von der Existenz einer solchen Zahl aus [vgl. z. B. J. Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire* I, 238 (1906)].

Es ist indessen weder ein neues Axiom über Flächeninhalte noch das Archimedische Axiom notwendig, um eine Zahl mit den Eigenschaften 1. und 2. zu finden.

Wir brauchen vielmehr dazu nur die im vorigen Paragraphen skizzierte, nicht-archimedische Proportionenlehre.

Dieselbe gestattet eine Streckenrechnung, die den Gesetzen der Arithmetik gehorcht, wenn wir die Addition durch das Aneinanderfügen der Strecken definieren und die Multiplikation, indem wir die Gleichung $OC = OA \cdot OB$ durch die Proportion $OC : OB = OA : OE$, wo OE die Längeneinheit bedeutet, ersetzen. Mittels dieser Streckenrechnung bilden wir eine analytische Geometrie, indem wir jedem Punkte seine Abstände von zwei zueinander senkrechten Geraden, den Koordinatenachsen, als seine Koordinaten x, y zuweisen. Hat dann ein einfaches Polygon der Reihe nach die Ecken $(x_1 y_1)\ (x_2 y_2) \ldots (x_n y_n)$, so hat der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \tfrac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + \tfrac{1}{2}(x_n y_1 - x_1 y_n)$$

die Eigenschaften 1. und 2. Zuerst ist nämlich dieser Ausdruck von der Wahl der Koordinatenachsen unabhängig, woraus 1. hervorgeht; zweitens sieht man, daß, wenn ein Polygon durch eine Transversale zerlegt wird, die Summe der zwei Ausdrücke, die

den Teilpolygonen entsprechen, dem ursprünglichen Ausdruck gleich wird. Der aufgestellte Ausdruck ist dann das gesuchte Inhaltsmaß. Die gewöhnlichen Sätze von dem Inhaltsmaß eines Dreiecks, eines Parallelogramms usw., ebenso der pythagoreische Lehrsatz sind sofort abzuleiten.

Aus der Eigenschaft 2. folgt speziell, daß eine ganze Fläche numerisch größer ist als jeder Teil derselben, ein Satz, den Euklid (*Erstes Buch der Elemente,* Satz 39) ohne Beweis benutzt.

Setzt man nun auch das Archimedische Axiom voraus, dann läßt sich der Satz beweisen: *Haben zwei Polygone dasselbe Inhaltsmaß, so sind sie zerlegungsgleich,* d. h. sie zerfallen durch geeignete Einteilung in paarweise kongruente Teilpolygone.

Dagegen hat es sich herausgestellt (M. Dehn, *Über raumgleiche Polyeder, Gött. Nachr.* 1900, 345, sowie *Über den Rauminhalt, Math. Ann.* **55**, 465 (1902); vgl. auch Kagan, *Math. Ann.* **57**, 421 (1903)), daß die Lehre von den räumlichen Inhalten sich nicht in derselben Weise aufbauen läßt; es gelingt, zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen, und die sich auch durch Hinzufügung kongruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist.

§ 9. Rektifikation und Quadratur des Kreises.

Um die Länge der Kreisperipherie zu bestimmen, müssen wir die folgende Definition zugrunde legen: Ist ein Kreis gegeben, dann heißt der Umfang eines konvexen Polygons *ein äußerer Umfang,* wenn sämtliche Punkte desselben auf oder außerhalb der Kreisperipherie liegen; wenn aber sämtliche Punkte des Umfangs auf oder innerhalb der Kreisperipherie liegen, dann heißt der Umfang *ein innerer.*

Definition. Die Länge der Kreisperipherie ist eine Strecke, die größer als jeder innere Umfang und kleiner als jeder äußere Umfang ist.

Um zu beweisen, daß eine solche Strecke existiert, tragen wir die inneren und äußeren Umfänge auf einem Halbstrahl von dessen Endpunkte O aus auf. Wird die Richtung des Halbstrahls „rechts" genannt, „links" die entgegengesetzte Richtung, dann gelten die Sätze (vgl. Weber und Wellstein, *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik* II, 262—265 (1905)):

1. Jeder Endpunkt A eines äußeren Umfangs liegt rechts von jedem Endpunkt J eines inneren Umfangs.

2. Ist ε eine beliebige Strecke, dann können die Punkte A und J so bestimmt werden, daß $JA < \varepsilon$.

3. *Dedekindsches Axiom* (Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* 1892, S. 11): Zerfallen alle Punkte einer Geraden in zwei Mengen A_1 und A_2, so daß jeder Punkt von A_1 links von jedem Punkte der Menge A_2 liegt, dann gibt es immer einen bestimmten Punkt, der entweder zu A_1 gehört und dann rechts von allen andern Punkten der Menge A_1 liegt oder zu A_2 gehört und links von allen anderen Punkten der Menge A_2 liegt.

Die Menge A_2 wird jetzt durch die Punkte A, die Menge A_1 durch die übrigen Punkte der Geraden des Halbstrahls geliefert. Dann gibt es nach dem letzten Axiom hier einen Punkt C, der rechts für alle Punkte J und links für alle Punkte A liegt. OC ist sodann die gesuchte Länge der Kreisperipherie.

Das Verhältnis zwischen der Kreisperipherie und dem Durchmesser $2r$ ist eine Konstante, die mit π bezeichnet wird. π läßt sich dadurch bis auf n Dezimalen bestimmen, daß man zwei reguläre Umfänge findet, einen äußern und einen innern, deren Unterschied kleiner als $^1/_{10^n}$ Kreisdurchmesser ist.

In ganz ähnlicher Weise kann man das Inhaltsmaß der Kreisfläche durch Vergleichung mit den inneren und äußeren Polygonen bestimmen; dasselbe muß $\frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2$ sein.

Wegen dieser Paragraphen vergleiche man: Enriques e Amaldi, *Elementi di geometria,* Bologna 1903, 360—373.

§ 10. **Konstruktiv unausführbare Aufgaben.**

Schon im Altertum beschäftigte man sich viel mit der Aufgabe von der *Quadratur des Kreises*; im engern Sinne versteht man hierunter die Aufgabe, ein Quadrat von demselben Inhalt wie die Kreisfläche oder eine Strecke von derselben Länge wie die Kreisperipherie zu zeichnen. Ein algebraischer Ausdruck ist mittelst Zirkels und Lineals dann und nur dann konstruierbar, wenn er aus gewissen gegebenen Strecken durch ausschließliche Benutzung der vier Spezies und Quadratwurzelziehung entstehen kann; solcher Art müßte π sein, wenn die Quadratur des Kreises möglich wäre. Im Jahre 1882 bewies aber F. Lindemann (*Über die Ludolphsche Zahl, Berl. Sitzungsber. Jahrg. 1882,* I. Halbband, 679), daß π *transzendent*, nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist.

Ein viel behandeltes Problem ist auch *die Dreiteilung des Winkels.* Um die Unmöglichkeit der Lösung dieser Aufgabe

mittelst Lineals und Zirkels zu erkennen, brauchen wir einen Satz von der kubischen Gleichung $x^3 + ax + b = 0$, in der a und b rational sind. Derselbe lautet: Ist die Gleichung irreduzibel, d. h. hat sie keine rationale Wurzel, so ist sie auch nie durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar (Weber und Wellstein, *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik* I, 319 (1903)).

Aus der Formel

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

erhalten wir, wenn $\cos 3\theta = a$, $\cos\theta = x$ gesetzt werden,

$$4x^3 - 3x = a;$$

diese Gleichung gibt also dann und nur dann einen konstruierbaren Wert von x, wenn sie *eine* Wurzel hat, die rational durch a ausdrückbar ist. Dieses ist aber für unendlich viele Werte von a nicht der Fall, z. B. nicht für $a = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

Derselbe Satz zeigt auch die Unmöglichkeit der *Würfelverdoppelung,* die von der Gleichung $x^3 = 2$ abhängig ist.

Über die hier berührten Aufgaben vgl. man insbesondere das Sammelwerk: Enriques, *Fragen der Elementargeometrie,* Deutsche Ausgabe von Fleischer, Teil II, Leipzig 1907.

§ 11. Kongruenz und Symmetrie.

In der Hilbertschen Kongruenzlehre (*Grundl.* § 5 und 6) wird zwischen kongruenten Figuren mit demselben und mit verschiedenem Umlaufssinn nicht unterschieden; diese Unterscheidung findet man aber im Anhang II der *Grundlagen*: „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck". Wird der Unterschied festgelegt, so läßt sich sofort beweisen:

Wenn zwei ebene Figuren A und B mit demselben Umlaufssinn kongruent sind, so werden sie entweder durch eine *Drehung* um einen bestimmten Punkt, das *Drehzentrum,* oder durch eine *Parallelverschiebung* zur Deckung gebracht; sind sie aber vom entgegengesetzten Umlaufssinn, dann muß die eine Figur an einer Geraden *gespiegelt* werden.

Nach Hjelmslev (*Nyt Tidsskrift for Matematik B* **18**, 1 (1907) und *Math. Ann.* **64**, 449 (1907)) ist es aber möglich, eine Lehre von Kongruenz und Symmetrie in ganz anderer Weise zu begründen. *Wenn man auf die graphischen Tatsachen der Geometrie verzichten will, braucht man auch nicht die Feststellung derselben mittelst der Anordnungsaxiome* (jedenfalls nicht in der eukli-

dischen Geometrie). Das Axiomensystem der (nicht-archimedischen) Geometrie ist dann das folgende:

1. Durch irgend zwei Punkte geht eine und nur eine Gerade.

Definition: Das System von zwei Punkten A und B wird eine Strecke genannt.

2. Zwei Strecken, die einer dritten Strecke kongruent sind, sind untereinander kongruent.

3. Ist A ein gegebener Punkt einer gegebenen Geraden, so kann man auf dieser Geraden zwei und nur zwei Punkte B so bestimmen, daß die Strecke AB einer gegebenen Strecke kongruent wird.

Definition: Jede Beziehung, durch welche jeder Geraden eine Gerade und jedem Punkte auf der ersteren ein Punkt auf der letzteren eindeutig so zugeordnet wird, daß die in dieser Weise einander entsprechenden Strecken kongruent sind, soll eine Bewegung heißen.

4. Es gibt außer der Identität eine und nur eine Bewegung, bei welcher alle Punkte einer gegebenen Geraden a fest bleiben. Bei dieser Bewegung bleibt kein außerhalb a gelegener Punkt fest.

Definition: Jede solche Bewegung heißt eine Spiegelung.

5. Es gibt eine Bewegung, bei welcher ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck in sich selbst übergeht, so daß die Spitze fest bleibt und die beiden Schenkel vertauscht werden.

6. Jede Strecke hat einen und nur einen Mittelpunkt.

7. Das Parallelenaxiom.

Nach dem Axiom 4 wird, wenn A durch Spiegelung in B übergeht, auch B in A übergehen. Der Mittelpunkt M von AB gehört zu a; AB heißt senkrecht auf a in M. Es läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

In jedem Punkte einer Geraden gibt es eine und nur eine Senkrechte.

Die Hauptsätze über Spiegelungen sind die folgenden:

Zwei Spiegelungen S_a und S_b können durch zwei andere Spiegelungen dergestalt ersetzt werden, daß die Achse der ersten oder der zweiten dieser Spiegelungen in irgendeine gegebene Gerade c durch den Schnittpunkt von a und b fällt.

Irgend vier beliebige Spiegelungen können immer durch zwei ersetzt werden.

Drei Spiegelungen, deren Achsen nicht durch denselben Punkt gehen, können nicht durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden.

Hieraus folgt: Eine ungerade Anzahl von Spiegelungen läßt sich durch drei oder eine Spiegelung ersetzen. Eine gerade An-

zahl von Spiegelungen läßt sich durch zwei Spiegelungen (oder die Identität) ersetzen. Eine ungerade Anzahl von Spiegelungen kann nicht durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen ersetzt werden.

Drei Spiegelungen können einander nicht aufheben.

Definition: Zwei Figuren, welche durch die Aufeinanderfolge einer $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\\text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Spiegelungen ineinander übergehen, nennen wir $\left\{\begin{matrix}\text{kongruent}\\\text{symmetrisch}\end{matrix}\right\}$.

Zwei kongruente Figuren werden also durch zwei Spiegelungen zur Deckung gebracht. Schneiden sich die Achsen, dann ist der Schnittpunkt fest und wird der *Drehpunkt* genannt; die Bewegung heißt eine *Drehung*. Sind die Achsen parallel, so hat die Strecke zwischen zwei entsprechenden Punkten eine konstante Größe und Richtung, und die Bewegung heißt eine *Parallelverschiebung*.

Definition. Ein *vollständiger Winkel* (ab) ist ein geordnetes System von zwei Geraden a und b, die einen eigentlichen Punkt gemein haben.

Hjelmslev beweist nun den Satz: Wenn zwei kongruente Büschel mit verschiedenen Mittelpunkten nicht auseinander durch Parallelverschiebung hervorgehen, dann schneiden sich entsprechende Strahlen in den Punkten eines Kreises durch die beiden Mittelpunkte.

Hiermit ist aber der zweite Beweis für den Pascalschen Satz gültig, der in den Hilbertschen *Grundlagen* (S. 30) gegeben ist; die Proportionenlehre läßt sich genau wie früher aufbauen.

Es ist also hier gelungen, den Pascalschen Satz lediglich auf Grund der *Kongruenzaxiome* zu beweisen; dagegen hat Hilbert (*Grundl.* § 33, 24, 19) den fundamentalen Satz bewiesen: *Der Pascalsche Satz ist keine Folge der graphischen Axiome, selbst dann nicht, wenn man das Parallelenaxiom zu Hilfe nimmt.*

Kapitel II.

Ebene Kreisgeometrie.

Von *H. Liebmann* in Leipzig.

§ 1. Folgerungen aus dem Satz vom Peripheriewinkel.

Die Kreisgeometrie ist geeignet, in gewissem Sinne den Übergang von der elementaren zur höheren Geometrie zu vermitteln, indem sie aus Sätzen der Elementargeometrie Folgerungen zieht, die in der Art ihrer Formulierung auf die Ideengänge der neueren Geometrie vorbereiten. So ergeben sich aus dem Satze, daß im Kreis der Peripheriewinkel über einem gegebenen Bogen konstant ist, nämlich gleich dem halben Zentriwinkel über demselben Bogen, verschiedene Folgerungen, die hier als Grundlagen und Vorläufer für weitere Untersuchungen kurz zusammengestellt werden sollen.

1. *Lehrsatz des Ptolemaeus: Im Sehnenviereck ist die Summe der Produkte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten gleich dem Produkte der Diagonalen.*

Beweis: Sei $ABCD$ das Kreisviereck, so wird AC durch einen Punkt E derart geteilt, daß $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC$ und folglich $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ABD$ wird. Dann ist $\triangle ABE \sim \triangle DBC$, $\triangle EBC \sim \triangle ABD$ und somit

$$AE = \frac{AB \cdot CD}{BD}, \qquad EC = \frac{BC \cdot DA}{BD},$$

woraus, da $AE + EC = AC$ ist, sich ergibt:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

2. *Erzeugung des Kreises durch Zuordnung von Strahlbüscheln.* Sind A und B zwei gegebene Punkte, und ordnet man den Strahlen g durch A die Strahlen h durch B in der Weise zu, daß zunächst einem Anfangsstrahl g_0 ein bestimmter Anfangsstrahl h_0 entspricht, daß ferner $\sphericalangle g_0 g = \sphericalangle h_0 h$ ist, und die

Drehung von g_0 nach g in demselben Sinne erfolgt wie die von h_0 nach h, so ergibt die Umkehrung des Satzes vom Peripheriewinkel, daß der Ort der Schnittpunkte P entsprechender Geraden g und h ein Kreis durch A und B ist; dem Strahl $g = AB$ entspricht dabei die Tangente in B, dem Strahl $h = BA$ die Tangente in A. *Der Kreis ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier gleichsinnig-kongruenter Strahlbüschel.*

3. *Die Potenz.* Legt man durch einen nicht auf der Peripherie des Kreises K gelegenen Punkt P zwei Sekanten, welche K in A_1 und B_1, bezw. in A_2 und B_2 treffen, — man bezeichne so, daß, wenn P außerhalb liegt, die Reihenfolge PA_1B_1 und PA_2B_2 ist — so sind auf Grund des Satzes vom Peripheriewinkel die Dreiecke PA_1B_2 und PB_1A_2 einander ähnlich, daher

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2.$$

Dieses *für alle Sekanten durch P konstante Produkt* heißt die *Potenz* des Kreises K im Punkte P; man versieht es mit *negativem* oder *positivem* Vorzeichen, je nachdem P *innerhalb* oder *außerhalb* liegt.

Für einen Punkt außerhalb ist die Potenz auch gleich dem Quadrat PT_1^2 oder PT_2^2 der von P an den Kreis gelegten Tangenten (Fig. 1, Seite 29).

4. *Die Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen.* Zieht man von den Mittelpunkten M_1 und M_2 zweier Kreise K_1 und K_2 parallele gleichgerichtete Radien

$$M_1P_1 \parallel M_2P_2,$$

so treffen sich die Verbindungslinien P_1P_2 alle in einem Punkte A_{12} auf der verlängerten Zentrale, wie aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke folgt. Ist r_{12} der Zentralabstand M_1M_2 und ist etwa $r_1 < r_2$, so liegt M_1 zwischen M_2 und A_{12}, und es ist

$$M_1A_{12} = \frac{r_1 \cdot r_{12}}{r_2 - r_1}; \qquad M_2A_{12} = \frac{r_2 \cdot r_{12}}{r_2 - r_1}.$$

Liegt nicht ein Kreis völlig innerhalb des andern, so gehen durch A_{12} auch die gemeinsamen (äußeren) Tangenten, was wieder aus ähnlichen Dreiecken folgt. A_{12} heißt der *äußere Ähnlichkeitspunkt* der beiden Kreise K_1 und K_2.

Zieht man durch M_1 und M_2 die Paare *entgegengesetzt* gerichteter Radien

$$M_2P_2 \parallel P_1M_1,$$

so erhält man als Schnittpunkt aller Geraden P_1P_2 den *inneren Ähnlichkeitspunkt* J_{12} auf der Zentrale und es wird

$$M_1J_{12} = \frac{r_1 \cdot r_{12}}{r_1 + r_2}, \qquad M_2J_{12} = \frac{r_2 \cdot r_{12}}{r_1 + r_2}.$$

Liegt K_1 außerhalb K_2 (wie in Fig. 4, Seite 36, angenommen), so gehen durch J_{12} auch die gemeinsamen inneren Tangenten.

Später (§ 3, 3) werden wir uns nochmals mit den Ähnlichkeitspunkten beschäftigen, hier wollen wir nur noch den Satz anführen: *Die sechs Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen liegen viermal zu je dreien auf einer Geraden, einer sogenannten Ähnlichkeitsachse.*

Betrachten wir nämlich das Dreieck $M_1M_2M_3$ der Mittelpunkte, so liegt A_{12} auf M_1M_2, A_{23} auf M_2M_3, A_{31} auf M_3M_1 und es ist

$$\frac{A_{12}M_1}{A_{12}M_2} = \frac{r_1}{r_2}, \qquad \frac{A_{23}M_2}{A_{23}M_3} = \frac{r_2}{r_3}, \qquad \frac{A_{31}M_3}{A_{31}M_1} = \frac{r_3}{r_1},$$

daher

$$A_{12}M_1 \cdot A_{23}M_2 \cdot A_{31}M_3 = A_{12}M_2 \cdot A_{23}M_3 \cdot A_{31}M_1;$$

nach der Umkehrung des Satzes des Menelaos liegen also

$$A_{12}, \quad A_{23}, \quad A_{31}$$

auf einer Geraden; diese ist die *äußere Ähnlichkeitsachse.* (Vgl. z. B. Steiners *Vorl. üb. synth. Geom.*, Teil 1, S. 9 ff.)

Ebenso zeigt man, daß

$$A_{12}, \quad J_{23}, \quad J_{31};$$
$$J_{12}, \quad A_{23}, \quad J_{31};$$
$$J_{12}, \quad J_{23}, \quad A_{31}$$

auf je einer Geraden liegen. Für diesen Satz bringen wir später aus der Theorie der Kreisbündel einen anderen Beweis (§ 3, 3).

Die Sätze dieses Paragraphen gehören samt und sonders der Geometrie der Alten an, nur das Wort Potenz stammt von Steiner.

§ 2. Die Lehre von den Polaren. Steiners Linealkonstruktionen mit festem Kreis.

1. *Die harmonische Eigenschaft der Berührungssehne.* (Fig. 1.) Durch den Punkt P außerhalb des Kreises K (Radius r) im Abstand $MP = c > r$ legen wir die beiden Tangenten, welche K in

T_1 und T_2 berühren mögen; die Zentrale MP bringen wir zum Schnitt mit dem Kreis (A, B) und mit der *Berührungssehne* T_1T_2. Q ist die Mitte der letzteren.

Das rechtwinklige Dreieck MT_1P, auf dessen Hypotenuse MP die Gerade T_1QT_2 senkrecht steht, ergibt

$$QM = \frac{r^2}{c}.$$

(P und Q heißen *inverse* Punkte in bezug auf K, vgl. § 5, 2.) Es wird weiter

$$AQ = \frac{r(c-r)}{c},$$

$$QB = \frac{r(c+r)}{c},$$

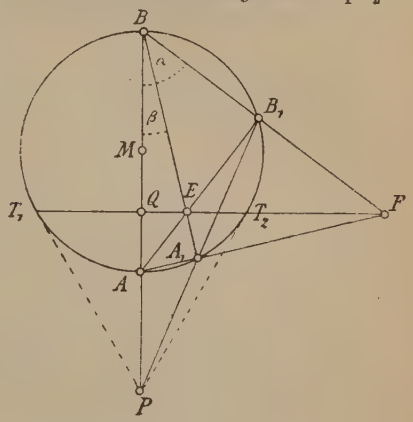


Fig. 1.

also

$$AQ : QB = c - r : c + r = PA : PB.$$

Unterscheidet man Strecken entgegengesetzter Richtung durch das *Vorzeichen*, setzt man also

$$QA = -AQ,$$

so folgt:

$$\frac{QA}{QB} : \frac{PA}{PB} = -1, \quad \text{oder} \quad \frac{QA \cdot PB}{QB \cdot PA} = -1.$$

Vier Punkte auf einer Geraden g, welche diese Bedingung erfüllen, heißen *harmonisch*; man sagt auch: P und Q sind durch A und B, oder A und B durch P und Q *harmonisch getrennt*. Hälftet A die Strecke PQ, dann liegt B unendlich fern; fallen A und B zusammen, dann fällt einer der beiden Punkte P und Q ebenfalls damit zusammen, die Lage des andern auf g ist *völlig unbestimmt*. —

Legt man durch P eine beliebige zweite Sekante, die mit der ersten den Winkel φ (in Fig. 1 ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \alpha - \beta$) einschließt, K in A_1 und B_1, T_1T_2 in Q_1 trifft, so wird

$$PQ_1 = \frac{PT_1^2}{PM \cdot \cos\varphi} = \frac{c^2 - r^2}{c \cdot \cos\varphi}.$$

Fällt man von M auf die zweite Sekante das Lot, so folgt

$$\frac{PA_1 + PB_1}{2} = c \cdot \cos\varphi;$$

§ 1, 3 endlich ergibt

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA \cdot PB = c^2 - r^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{Q_1A_1 \cdot PB_1}{Q_1B_1 \cdot PA_1} = \frac{PB_1 \cdot (Q_1P - A_1P)}{PA_1 \cdot (Q_1P - B_1P)} = \frac{PB_1(PA_1 - PQ_1)}{PA_1(PB_1 - PQ_1)}$$

$$= (c^2 - r^2)\left(1 - \frac{PB_1}{c\cos\varphi}\right) : (c^2 - r^2)\left(1 - \frac{PA_1}{c \cdot \cos\varphi}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(PA_1 - PB_1) : \tfrac{1}{2}(PB_1 - PA_1) = -1.$$

Es ist also bewiesen:

Schneidet man eine beliebige Sekante durch einen äußeren Punkt P mit dem Kreis in A_1, B_1 und mit der Berührungssehne in Q_1, so ergeben sich vier harmonische Punkte $PA_1Q_1B_1$.

2. *Pol und Polare.* Liegt P innerhalb K ($PM = c < r$), und man errichtet im Punkte Q, der zu P invers ist ($QM = r^2 : c$), das Lot p auf QM, so ergibt die entsprechende Betrachtung, daß eine beliebige Gerade durch P den Kreis (in A_1 und B_1) und p (in Q_1) so trifft, daß $PA_1Q_1B_1$ wieder vier harmonische Punkte sind. Anders gefaßt:

Legt man durch P alle möglichen Sekanten, die den Kreis in A', B' schneiden mögen, so ist der Ort der vierten harmonischen Punkte Q', d. h. derjenigen Punkte Q' auf den Sekanten, für die

$$\frac{Q'A'}{Q'B'} : \frac{PA'}{PB'} = -1,$$

eine Gerade p.

Diese Gerade heißt die *Polare* von P in bezug auf K, P ihr *Pol*. Ihre Definition findet man in *Pappus' Collectionis* liber VII, prop. 154. Die heutige Bezeichnungsweise stammt von Servois und Gergonne, *Gergonnes Annalen* **1** (1811), 337, **3** (1813), 293. Die Polare steht auf der Zentrale MP senkrecht und geht durch den zu P inversen Punkt Q auf MP. Es folgt unmittelbar:

Alle Geraden, welche durch einen Punkt P gehen, haben ihre Pole auf der Polaren p von P; alle Punkte auf einer Geraden p senden ihre Polaren durch den Pol P von p.

Wendet man dies auf die Punkte P innerhalb K an und berücksichtigt die Bedeutung der Polaren von äußeren Punkten als Berührungssehne, so erkennt man, daß die Polare eines inneren Punktes der Ort der Schnittpunkte der beiden Tangenten ist, welche den Kreis K in seinen Schnittpunkten T_1', T_2' mit irgendeiner durch P gelegten Geraden berühren.

3. *Konstruktion der Polare.* Um die Polare von P zu konstruieren (Fig. 1), zieht man zuerst die Zentrale, dann eine zweite Sekante durch P beliebig, bringt sodann BA_1 mit AB_1 zum Schnitt in E und AA_1 mit BB_1 in F. $\sphericalangle BB_1A$ und $\sphericalangle BA_1B$ sind dann als Peripheriewinkel über dem Durchmesser AB Rechte. Im Dreieck EBF sind EB_1 und FA_1 zwei Höhen, also ist A, das auf diesen beiden Linien liegt, der Höhenschnittpunkt, folglich ist BQ oder AP die dritte Höhe, und

$$QF \perp MP. \tag{1}$$

Führt man die Winkel $\sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle AB_1A_1 = \sphericalangle QFA = \beta$ und $\sphericalangle ABB_1 = \alpha$ ein und berücksichtigt, daß

$$\sphericalangle PAA_1 = \frac{\pi}{2} + \beta, \qquad \sphericalangle AA_1P = \alpha,$$

so ergibt der Sinussatz

$$\frac{PA}{\sin\alpha} = \frac{PA_1}{\cos\beta}, \qquad \frac{PB}{\cos\alpha} = \frac{PA_1}{\sin\beta},$$

also

$$PA : PB = \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta;$$

anderseits ist

$$AQ = FQ \operatorname{tang}\beta, \qquad QB = FQ \cot\alpha,$$

also

$$PA : PB = AQ : QB \; (= \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) zusammen folgt nach Nr. 2 dieses §, *daß EF die Polare von P ist.* Bei dieser Konstruktion ist außer dem gegebenen Kreise K *nur das Lineal* benutzt worden (vgl. Nr. 5 dieses §). Wendet man die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks an, wie sie im folgenden Kapitel gegeben werden, so zeigt sich, daß auch die erste Sekante PAB *ganz willkürlich* gewählt werden darf; sie braucht nicht Zentrale zu sein; immer wird die Verbindungslinie der Schnittpunkte E (von AB_1 und BA_1) und F (von AA_1 und BB_1) die Polare von P sein. Vgl. Steiners *Vorl. über. synth. Geom.*, 1. Teil, S. 24 ff.

4. *Involutionen auf dem Kreis.* Zwischen den Punkten A, B; A_1B_1 usw., die aus dem Kreis von den Sekanten durch einen festen Punkt P ausgeschnitten werden, besteht eine Beziehung, die *Involution* oder *involutorische Zuordnung* heißt. Liegt P außerhalb, so entsprechen T_1 und T_2 sich selbst (sie bilden die *Doppelpunkte der Involution*). —

Vier harmonische Punkte auf einer Geraden werden von einem Punkte S außerhalb durch *harmonische Strahlen* projiziert. Die letzteren haben die Eigenschaft, *jede* Gerade, die nicht durch ihren gemeinsamen Punkt geht, in vier harmonischen Punkten zu treffen. Verbindet man (Fig. 1) etwa T_1 oder T_2 mit P, Q, A_1 und B_1, so erhält man, weil ja P, A_1, Q, B_1 vier harmonische Punkte sind, demnach vier harmonische Strahlen; nimmt man noch eine beliebige Sekante durch P, die K in A' und B', T_1T_2 in Q' trifft, so sind auch T_1P, T_1A', T_1T_2, T_1B' immer vier harmonische Strahlen.

Projiziert man jetzt $T_1A'T_2B'$ von einem andern Punkte S der Peripherie aus, so lassen sich die Strahlen T_1P (Tangente in T_1), T_1A', T_1T_2, T_1B' durch Bewegung (vgl. § 1, 2) mit ST_1, SA', ST_2, SB' zur Deckung bringen; diese letzteren sind also ebenfalls harmonisch.

Allgemein heißt die Zuordnung der Strahlen, welche entsteht, wenn man die Punktepaare einer Involution auf dem Kreise $(A'B')$ mit einem Punkte S der Peripherie verbindet, die der Involution der Punkte auf dem Kreis zugeordnete *Strahleninvolution.*

Liegt P, der Schnittpunkt aller die Involution bestimmenden Sekanten, außerhalb, so heißt die Involution *hyperbolisch*, und es gibt dann, wie wir sahen, immer zwei *reelle Doppelelemente*, d. h. bei der Zuordnung sich selbst entsprechende Punkte bzw. Strahlen. *Jedes Paar zugeordneter Elemente wird durch die Doppelelemente harmonisch getrennt*, wie aus den vorausgeschickten Auseinandersetzungen hervorgeht.

Liegt P innerhalb, so heißt die Involution *elliptisch, es gibt dann keine reellen Doppelelemente.* —

Involutionen der Punkte einer Geraden werden durch Involutionen eines Strahlbüschels ausgeschnitten. Die weitere Theorie der Involutionen gehört in die *projektive Geometrie* (Kap. III), wo von anderen Definitionen ausgegangen wird.

5. *Die Steinerschen Konstruktionen mit dem Lineal bei gegebenem festem Kreis.* Auf die Polarentheorie stützen sich die von J. Steiner angegebenen *„Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises"*. (Berlin 1833, *Werke* **1**, 461, *Ostwalds Klassiker* Nr. 60.)

Um z. B. von M, dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises, ein Lot auf eine beliebige Gerade g zu fällen, wird man zunächst den Pol P von g als Schnittpunkt der nach Nr. 3 dieses § zu konstruierenden Polaren p_1 und p_2 zweier Punkte P_1 und P_2 auf g finden; PM steht auf g senkrecht.

Zu einem Durchmesser AMB konstruiert man die Parallele, die den gegebenen Punkt P enthält, mit Hilfe der Umkehrung des bekannten Satzes: Die Mitten der Abschnitte paralleler Geraden zwischen zwei gegebenen Geraden g und h liegen auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt von g und h geht; auf dieser Geraden liegen auch die Schnittpunkte der Sekanten (z. B. S_2A und PB in Fig. 2), welche die Endpunkte der parallelen Abschnitte verbinden. Es ergibt sich die Konstruktion: Man verbindet P mit A und B, nimmt S auf PA beliebig an, zieht noch SM, SB, PB; darauf AS_1, welche Gerade SB in S_2 trifft, dann ist PS_2 zu AB parallel.

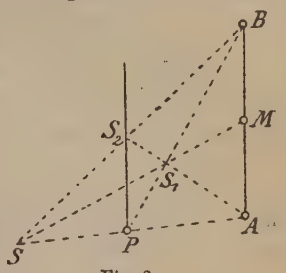


Fig. 2.

Hiernach kann man auch *von einem beliebigen Punkte P aus das Lot auf eine beliebige Gerade g fällen*, nämlich zunächst fällt man das Lot von M aus, und dann zieht man durch P die Parallele. — Mit diesen Aufgaben sind auch alle anderen Aufgaben der metrischen Geometrie, soweit sie nur gerade Linien betreffen, lösbar, wie man aus der Steinerschen Abhandlung ersehen kann.

§ 3. Kreisbüschel, Kreisbündel und die Aufgabe des Apollonius.

An das Problem des Apollonius hat die Entwicklung der modernen Kreisgeometrie angeknüpft, zu der Gaultier in einer Arbeit über jenes Problem (*Journ. école polyt.*, Cah. **16** (1813), 124) den Grund gelegt hat. Hieran schließt sich Steiner (*Einige geometrische Betrachtungen, Werke* **1**, 17). Das Nähere hierüber findet man in dem Bericht von Kötter über die *Entwicklung der synth. Geometrie, Math. Ver.* **5**, 1901.

1. *Elliptische und hyperbolische Kreisbüschel.* Unter einem elliptischen Kreisbüschel versteht man die Gesamtheit der Kreise, die durch zwei feste Punkte A und B gehen. Durch jeden anderen Punkt P geht *ein* Kreis des Büschels. Das Mittellot der Strecke AB ist die *Zentrale des Büschels*, auf der die Mittelpunkte aller Büschelkreise liegen. Die Linie AB, die *Chordale des Büschels*, hat die Eigenschaft, daß in einem beliebigen Punkte S von ihr die Potenz für alle Kreise des Büschels dieselbe, nämlich $= SA \cdot SB$, ist. Sie heißt deswegen auch die *Potenzlinie* des Büschels.

Legen wir an einen beliebigen Kreis K des Büschels (Mittelpunkt M) in einem Punkte P die Tangente, die AB in M' trifft,

und schlagen um M' mit $M'P$ als Radius den Kreis K', der AB in S_1 und S_2 trifft, so wird (Fig. 3)

$$M'P^2 = M'S_1^2 = M'S_2^2 = M'A \cdot M'B,$$

also werden A, B harmonisch getrennt durch S_1, S_2. Ferner wird

$$\sphericalangle BS_1P = \sphericalangle S_1PM' = \sphericalangle S_1PB + BPM' = \sphericalangle S_1PB + S_1AP;$$

anderseits ist dieser Winkel als Außenwinkel des Dreiecks AS_1P

$$= \sphericalangle S_1PA + \sphericalangle S_1AP,$$

also wird $\sphericalangle S_1PB = \sphericalangle S_1PA$, d. h. S_1 liegt auf der Halbierungslinie des Winkels $APB = \gamma$ und analog S_2 auf der Halbierungslinie des Nebenwinkels.

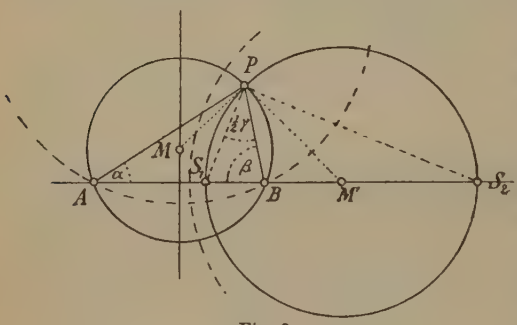


Fig. 3.

Da ferner die Tangente PM' des Kreises K der Radius des Kreises K' ist, schneiden die beiden Kreise einander rechtwinklig.

Durch jeden Punkt P geht ein Kreis K und ein Kreis K', und jeder Kreis K trifft jeden Kreis K' senkrecht.

Die Gesamtheit der Kreise K', zu denen als Ausartungen (*Nullkreise*, d. h. Kreise vom Radius Null) auch die Punkte A und B gehören, heißt ein *hyperbolisches Kreisbüschel*.

Für einen Punkt M auf der Zentrale des Büschels (K) ist die Potenz aller Kreise K' demnach konstant, gleich dem Quadrat des Radius desjenigen Kreises K, dessen Mittelpunkt M ist; d. h.:

Die Zentrale des Büschels K ist die Potenzlinie des Büschels K' (und umgekehrt: die Potenzlinie des Büschels K Zentrale des Büschels K').

Zwei Kreise K_1 und K_2 haben stets eine gemeinsame Potenzlinie, sie bestimmen ein *elliptisches* Büschel, wenn sie sich schneiden, ein *hyperbolisches*, wenn sie sich nicht schneiden. Berühren K_1 und K_2 einander in A, so bestimmen sie ein *parabolisches Büschel*; dies besteht aus der Gesamtheit aller Kreise, die K_1 in A berühren.

Die Potenzlinie von K_1 und K_2 kann man, wenn K_1 und K_2 einander nicht schneiden, dadurch finden, daß man K_1 und K_2 mit einem beliebigen dritten Kreis K_3 zum Schnitt bringt; die beiden Chordalen von K_1 und K_3 und von K_2 und K_3 treffen sich in einem Punkt, in dem K_1, K_2 und K_3 gleiche Potenz haben (*Potenzpunkt* von K_1, K_2 und K_3). Die Potenzlinie von K_1 und K_2 ist dann das Lot von diesem Potenzpunkt auf die Zentrale M_1M_2, und ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Potenzlinie liegt, und der K_1 senkrecht schneidet, trifft M_1M_2 in den Nullkreisen des durch K_1 und K_2 bestimmten hyperbolischen Büschels.

2. *Kreisbündel.* Die Gesamtheit aller Kreise, welche in einem Punkte O dieselbe Potenz haben, heißt ein *Kreisbündel.* Ist die Potenz positiv (c^2), so schneiden die Kreise einen festen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius c, den *Orthogonalkreis*, senkrecht (*Orthogonalbündel*). Der Orthogonalkreis kann in eine Gerade ausarten, das Bündel besteht dann aus allen Kreisen, deren Mittelpunkte auf dieser Geraden liegen, oder in einen Punkt ($c = 0$), das Bündel besteht dann aus allen Kreisen durch diesen Punkt (*Nullbündel*).

Ist die Potenz in O negativ ($-c^2$), so besteht das Bündel aus allen Kreisen, welche den Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius c (*Diametralkreis*) in den Endpunkten eines Durchmessers treffen (*Diametralbündel*).

Da die Potenzlinie zweier Bündelkreise K_1K_2 stets durch O gehen muß, so haben umgekehrt alle Kreise des Büschels (K_1, K_2) in O dieselbe Potenz: *Je zwei Bündelkreise bestimmen ein Büschel, welches dem Bündel vollständig angehört.*

Ferner: Haben K_1 und K_2 gleiche Potenz sowohl in O_1 wie in O_2, so müssen alle Kreise, welche sowohl in O_1 wie O_2 dieselben Potenzwerte haben wie K_1 und K_2, dem Büschel K_1 und K_2 angehören:

Alle Kreise, die zwei Bündeln gleichzeitig angehören, bilden ein Büschel.

3. *Der Winkel zweier Kreise.* Ziehen wir von den Mittelpunkten M_1, M_2 zweier Kreise die Radien nach einem ihrer Schnittpunkte $M_1S\,(=r_1)$, $M_2S\,(=r_2)$, so ist der Schnittwinkel φ definiert als Supplement des Winkels M_1SM_2, daher:

$$\cos\varphi = \frac{r_{12}^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

Nach dieser Definition bilden zwei Kreise, die einander berühren, entweder den Winkel Null, wenn nämlich der Berührungs-

punkt zwischen den Mittelpunkten liegt ($r_{12} = r_1 + r_2$), oder den Winkel π, wenn der Berührungspunkt außerhalb liegt ($r_{12} = r_2 - r_1$).

Die Gesamtheit aller Kreise K', welche K_1 und K_2 unter gleichem Winkel treffen, oder unter Winkeln, die einander zu zwei Rechten ergänzen, hängt aufs engste zusammen mit den Ähnlichkeitspunkten A_{12}, J_{12} (§ 1, 4).

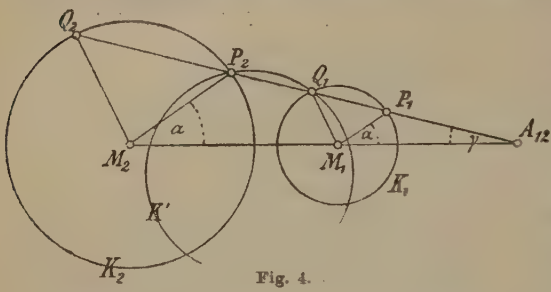


Fig. 4.

Legen wir durch A_{12} eine Sekante (Fig. 4), welche K_1 in $P_1 Q_1$ trifft und K_2 in $P_2 Q_2$, so daß (§ 1, 4)

$$M_1 P_1 \parallel M_2 P_2; \qquad M_1 Q_1 \parallel M_2 Q_2,$$

so ist

$$\sphericalangle\, Q_2 P_2 M_2 = \alpha + \gamma,$$

aber auch

$$\sphericalangle\, P_1 Q_1 M_1 = \sphericalangle\, Q_1 P_1 M_1 = \alpha + \gamma.$$

Hieraus folgt, daß $\sphericalangle\, M_2 P_2 M' = \sphericalangle\, M_1 Q_1 M'$, wenn $M' P_2 = M' Q_1$ ist, daß also *jeder Kreis K' durch P_2 und Q_1* (oder auch durch Q_2 und P_1) *K_1 und K_2 unter gleichen Winkeln trifft.*

Die leicht zu beweisende Umkehrung lautet: *Trifft K' die Kreise K_1 und K_2 unter gleichen Winkeln, so gehen zwei der Verbindungslinien der vier Schnittpunkte von K', K_1 und K', K_2 durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt A_{12}.*

An Stelle von A_{12} tritt J_{12}, wenn die Winkel $(K' K_1)$ und $(K' K_2)$ supplementär sind.

Legt man durch P_2 und Q_1 im besondern den Kreis, welcher K_1, *daher auch* K_2 auf der Zentrale $M_1 M_2$ trifft, so erkennt man, *daß die Potenz aller Kreise K' für A_{12} konstant ist,* nämlich

$$A_{12} P_2 \cdot A_{12} Q_1 = A_{12} P_1 \cdot A_{12} Q_2 = \left(\frac{r_1 \cdot r_{12}}{r_2 - r_1} \pm r_1\right)\left(\frac{r_2 \cdot r_{12}}{r_2 - r_1} \mp r_2\right)$$
$$= r_1 r_2 \left\{\frac{r_{12}^2}{(r_2 - r_1)^2} - 1\right\}$$

(die gleichstehenden Vorzeichen gehören zusammen).

Alle Kreise K', welche K_1 und K_2 unter demselben Winkel treffen, gehören einem Bündel mit dem Potenzpunkt A_{12} und der Potenz

$$r_1 r_2 \left\{ \frac{r_{12}^2}{(r_2 - r_1)^2} - 1 \right\}$$

an. Hiervon gilt auch die Umkehrung. Der Orthogonalkreis des Bündels heißt der (äußere) Steinersche *Potenzkreis.*

Dem Bündel gehören im besondern auch die K_1 und K_2 senkrecht schneidenden und die gleichsinnig berührenden Kreise an.

Alle Kreise, welche K_1, K_2, K_3, drei beliebig gegebene Kreise, unter gleichen Winkeln treffen, bilden, weil sie zwei Bündeln angehören, ein Büschel (Nr. 2 dieses Paragraphen), und nach dem letzten Satz liegen sowohl A_{12} wie A_{23} und A_{31} auf der Potenzlinie des Büschels, *womit der Satz in* § 1, 4 *neu bewiesen ist.*

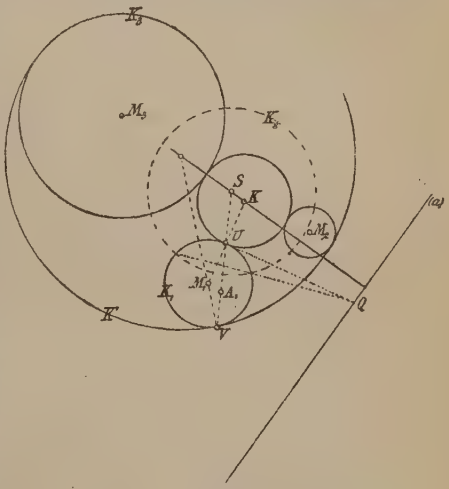


Fig. 5.

Von den andern drei Ähnlichkeitsachsen ist z. B. $A_{12} J_{23} J_{31}$ die Potenzlinie des Kreisbüschels, welches K_1 und K_2 unter gleichen, K_1 und K_3, daher auch K_2 und K_3 unter supplementären Winkeln trifft, usw.

4. *Die Apollonische Aufgabe.* Wir können jetzt leicht die *Apollonische Aufgabe* lösen, *die Kreise K zu bestimmen, welche drei Kreise* K_1, K_2, K_3 *berühren.* Weil Berührung in doppelter Weise möglich ist, gibt es acht solcher Kreise, entsprechend den Winkeln

	$(K' K_1)$	$(K' K_2)$	$(K' K_3)$
1.	0	0	0
2.	π	π	π
3.	π	0	0
4.	0	π	π
5.	0	π	0
6.	π	0	π
7.	0	0	π
8.	π	π	0.

Wir konstruieren hier (Fig. 5) das erste Kreispaar (0, 0, 0) und (π, π, π), diese beiden gehören einem Büschel an, von dem

wir bereits in drei Punkten $A_{12}A_{23}A_{31}$ die Potenz kennen. Hiernach kann die Konstruktion schon ausgeführt werden. Da im besondern der Orthogonalkreis K_s von K_1, K_2 und K_3 dem Büschel angehört, *so ist das von dem Potenzpunkt S der drei gegebenen Kreise auf die Potenzlinie des Büschels, d. h. die äußere Ähnlichkeitsachse gefällte Lot die Zentrale der gesuchten Kreise.*

Wird ferner K_1 von K (0, 0, 0) in U berührt, und trifft die gemeinsame Tangente die äußere Ähnlichkeitsachse a in Q, so haben in Q einerseits K_1 und K, andrerseits K und K_s dieselbe Potenz; durch Q geht also auch die Chordale von K_1 und K_s, da S der Pol dieser Chordalen in bezug auf K_1 ist und andrerseits U der Pol von UQ, so ist SU die Polare von Q in bezug auf K_1 (§ 2, 2), enthält also den Pol A_1 von a. Man hat also, um U zu finden, *nur den Pol A_1 von a in bezug auf K_1 zu konstruieren und mit S zu verbinden.* Der eine Schnittpunkt U dieser Geraden mit K_1 ist der Berührungspunkt mit K (0, 0, 0); der andere V der Berührungspunkt mit K' (π, π, π). Weil aber die Zentrale der Kreise K und K' bereits konstruiert ist, hat man unmittelbar die Mittelpunkte und die Kreise selbst.

Die sechs weiteren Kreise sind paarweise entsprechend zu finden; an Stelle von a treten hier die drei weiteren Ähnlichkeitsachsen (siehe § 1 am Ende).

Für die weitere Entwicklung dieser Probleme sind charakteristisch die folgenden Arbeiten: Gergonne, *Ann. de math.* **7** (1817), 289, Durrande, ibid. **11** (1821), 1, Poncelet, ibid. **11** (1821), 317, Fr. Neumann, *Okens Isis* 1826, p. 349, 466, Plücker, *Analytisch geometrische Entwicklungen* 1828, 1831, *Journ. f. Math.* **10** (1833), 293 (*Abhdlgn.* **I**, 251), Darboux, *Ann. éc. norm.* (2) **1** (1872), 323, Frobenius, *Journ. f. Math.* **79** (1875), 185, Study, *Math. Ann.* **49** (1897), 497.

§ 4. Das Malfattische Problem.

Ein anderes Berührungsproblem, das Malfattische, besteht in der Aufgabe (vgl. *Mem. della Soc. Ital. Modena* **10**$_1$ (1803), 235): *Es sollen in einem Dreieck drei Kreise gezeichnet werden, von denen jeder die beiden andern und zwei Dreiecksseiten berührt.*

Steiner gab eine äußerst elegante Lösung dieser Aufgabe (*Werke* **1**, 35), für die Schröter die Begründung nachtrug (*Journ. f. Math.* **77** (1874), 230). Die folgende *trigonometrische* Lösung rührt von Schellbach (*Journ. f. Math.* **45** (1853), 91) her:

Die Seiten des Dreiecks seien a, b, c $(a + b + c = 2s)$, die

gegenüberliegenden Winkel α, β, γ. Gesucht sind (Fig. 6) die Abstände

$$AF_1 = AE_2 = x, \quad BF_2 = BD_1 = y, \quad CE_1 = CD_2 = z$$

der Berührungspunkte der gesuchten Kreise (Radien r_1, r_2, r_3) von den Ecken. Es ergibt sich:

$$r_1 = x \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}, \quad r_2 = y \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}, \quad r_3 = z \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2},$$

außerdem

$$D_1D_2 = \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2} = 2\sqrt{r_2 r_3},$$

$$E_1E_2 = 2\sqrt{r_1 r_3}, \quad F_1F_2 = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Da $a = BD_1 + D_1D_2 + D_2C$, wird

$$(1) \qquad a = y + z + 2\sqrt{yz}\sqrt{\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}}.$$

Die weitere Rechnung vereinfacht sich, wenn man als *gegebene* Größen Hilfswinkel λ, μ, ν einführt durch

$$a = s \sin^2 \lambda,$$
$$b = s \sin^2 \mu,$$
$$c = s \sin^2 \nu,$$

und als *gesuchte* Größen Hilfswinkel φ, χ, ψ durch

$$x = s \sin^2 \varphi,$$
$$y = s \sin^2 \chi,$$
$$z = s \sin^2 \psi.$$

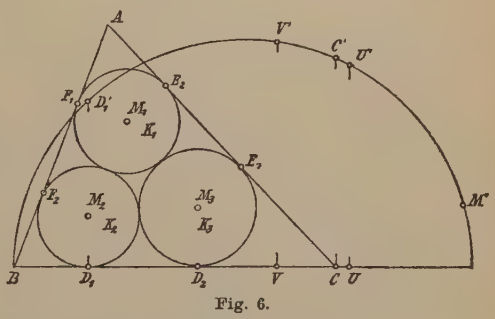


Fig. 6.

Benutzt man jetzt die trigonometrischen Formeln

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{usw.},$$

so folgt aus (1)

$$(2) \qquad \sin^2 \lambda = \sin^2 \chi + \sin^2 \psi + 2 \sin \chi \sin \psi \cos \lambda,$$

wozu zwei entsprechende Gleichungen treten.

Nach (2) liegt im Dreieck mit den Seiten $\sin \lambda$, $\sin \chi$, $\sin \psi$ der ersten Seite der Winkel $\pi - \lambda$ gegenüber, die beiden andern

Winkel sind, wie der umbeschriebene Kreis zeigt, λ und ψ. Also wird $\pi - \lambda + \chi + \psi = \pi$, oder

$$\chi + \psi = \lambda,$$

und ebenso

$$\varphi + \psi = \mu, \quad \varphi + \chi = \nu,$$

oder, wenn gesetzt wird

$$2\sigma = \lambda + \mu + \nu,$$

so kommt

$$\varphi = \sigma - \lambda, \quad \chi = \sigma - \mu, \quad \psi = \sigma - \nu.$$

Hieraus folgt z. B. für D_1 folgende *Konstruktion:* Über $BS = s$ als Durchmesser wird der Halbkreis konstruiert, ferner $BU = b$, $BV = c$ abgetragen, in U, V, C die Lote auf der Grundlinie errichtet und mit dem Halbkreis zum Schnitt gebracht (U', V', C'). Die zu den Bogen BC', BU', BV' gehörigen Zentriwinkel sind dann 2λ, 2μ, 2ν. M' sei der Punkt, zu dem der Zentriwinkel 2σ gehört, $M'D_1'$ gleich BU'; dann gehört zu BU' der Zentriwinkel $2(\sigma - \mu)\,(= 2\chi)$, und es trifft das von D_1' auf BC gefällte Lot BC im gesuchten Punkt D_1; denn

$$\sphericalangle BD_1'D_1 = \sphericalangle BSD_1' = \chi,$$

also

$$BD_1 = s \sin^2\chi.$$

Hiermit ist der in D_1 und F_2 berührende Malfattische Kreis gefunden, die andern ergeben sich entsprechend.

Auf die Kugel ist das Malfattische Problem erweitert von F. Mertens, *Journ. f. Math.* **76** (1873), 92.

Literatur zu diesen Problemen findet man bei Simon, *Bericht über die Entwicklung der Elementargeometrie* (*Math. Ver.*, Erg.-Bd. **1**, 1906, S. 97), Wölffing, *Math. Bücherschatz,* Leipzig 1903, S. 222 ff. Man vgl. ferner, auch zu dem folgenden, den Bericht von E. Kötter (*Math. Ver.* **5** (1901), 107).

§ 5. Die stereographische Projektion und die Kreisverwandtschaften.

1. *Die stereographische Projektion der Kugel.* So heißt die Abbildung der Kugel, welche entsteht, wenn man die Punkte Q der letzteren mit einem festen Punkt N (Nordpol) verbindet, und den Strahl NQ in P zum Schnitt bringt mit einer Ebene, *welche auf der durch N gehenden Kugelachse senkrecht steht.* Als Projektionsebene wählt man am besten die Äquatorebene. Ist O der

Mittelpunkt, a der Radius der Kugel, S der Südpol, so sind die rechtwinkligen Dreiecke NQS und NOP einander ähnlich, daher

$$NP \cdot NQ = 2a^2 = constans.$$

Was wird das Bild eines Kreises auf der Kugel? Q sei ein bestimmter Punkt, Q_i ein beliebiger Punkt dieses Kreises. Legt man durch den Kreis und das Bild P von Q eine Hilfskugel, so treffen die Strahlen NQ_i die Hilfskugel zum zweiten Mal in den Punkten P_i', für die (§ 1, 3)

$$NQ_i \cdot NP_i' = NQ \cdot NP = 2a^2,$$

d. h. P_i' fällt mit dem Bild P_i von Q_i zusammen; das Bild des Kreises auf der gegebenen Kugel ist also der Schnitt der Hilfskugel mit der Äquatorebene: *Durch die stereographische Projektion bilden sich die Kreise der Kugel auf Kreise in der Ebene ab.* (Die Bilder der Kreise durch N werden Gerade.)

Legt man durch Q und N die beiden Kreise $k_1 k_2$ auf der Kugel, welche in Q vorgeschriebene Tangenten haben und den Winkel φ einschließen, so entspricht diesem Winkel in der Projektionsebene der Winkel, welchen die Schnittgeraden der k_1 und k_2 projizierenden Ebenen und der Projektionsebene bilden, er ist gleich dem Winkel der Geraden, welche von den projizierenden Ebenen aus der Tangentialebene N ausgeschnitten werden, oder gleich dem Schnittwinkel von $k_1 k_2$ in N, d. h. auch ihrem Schnittwinkel in Q. *Die stereographische Projektion ist mithin winkeltreu.* Den Kreisbüscheln der Ebene entsprechen auf der Kugel Kreise; deren Ebenen gehen durch eine Gerade, die die Kugel trifft oder nicht trifft, je nachdem das Büschel elliptisch oder hyperbolisch ist; die Kreise eines Bündels in der Ebene sind Bilder von Kreisen auf der Kugel, deren Ebenen durch einen Punkt gehen, der außerhalb (*Orthogonalbündel*), innerhalb (*Diametralbündel*), auf der Kugel (*Nullbündel*) liegen kann.

Die Sätze über Bündel und Büschel § 3, 2 entsprechen den einfachen Beziehungen von Ebenen und Geraden.

Der Strahl, der N mit dem Mittelpunkt eines Kreises (K_e) in der Ebene verbindet, geht durch die Spitze des Kegels, welcher die Kugel längs des (K_e) entsprechenden Kreises berührt.

2. *Die Inversion.* Projiziert man den Punkt Q auf der Kugel vom Nordpol stereographisch in P und ebenso Q vom Südpol aus in P_1, so wird

$$OP_1 : OS = ON : OP,$$

oder

$$OP \cdot OP_1 = a^2$$

P und P_1 sind *inverse* Punkte (§ 2, 1), die entstehende Beziehung zwischen P und P_1 ist in der Ebene so definiert:

Gegeben ist ein Kreis vom Radius a mit dem Mittelpunkt O. P und sein Bild P_1 liegen auf demselben Strahl durch O, und die Entfernungen $OP = r$ und $OP_1 = r_1$ stehen in der Beziehung

$$r \cdot r_1 = a^2.$$

Diese Abbildung heißt *Inversion*, auch *Transformation durch reziproke Radien* oder *Spiegelung am Inversionskreis* (O, a).

Die Art, wie wir die Inversion durch doppelte stereographische Projektion gefunden haben, gibt den Satz:

Die Inversion ist eine eindeutige Abbildung, die Kreise als Kreise darstellt und winkeltreu (konform) ist.

Elliptische Kreisbüschel (Kreise durch A, B) gehen über in elliptische Kreisbüschel (Kreise durch die Bilder A_1, B_1 von A, B), hyperbolische Kreisbüschel, die aus den Orthogonalkreisen elliptischer Büschel bestehen, gehen bei der winkeltreuen Abbildung wieder in hyperbolische Kreisbüschel über; Kreisbündel gehen in Kreisbündel über.

Die Eigenschaften der Inversion hätten auch leicht ohne Anwendung der stereographischen Projektion begründet werden können, man würde zunächst aus

$$r r_1 = a^2$$

ableiten, daß Kreise, welche den Inversionskreis senkrecht schneiden, also in O die Potenz a^2 haben, in sich übergehen, weiter, daß *Gerade in Kreise durch O übergehen* und umgekehrt.

Aus § 3, 3 erkennt man sofort, daß O der äußere Ähnlichkeitspunkt des Kreises K und seines Bildkreises ist, und der Inversionskreis der äußere Steinersche Potenzkreis.

3. *Der Steinersche Schließungssatz.* Schneiden zwei Kreise K_1 und K_2 einander nicht, und sind A und B die im hyperbolischen Büschel $K_1 K_2$ enthaltenen *Nullkreise* (§ 3, 1), so wird nach Nr. 2 eine Inversion mit dem Zentrum A (oder B) das orthogonale hyperbolische Büschel in gerade Linien durch den Bildpunkt von B (oder A) verwandeln, K_1 und K_2 daher in konzentrische Kreise K_1', K_2'.

Gibt es nun eine Reihe von Kreisen $k_1 k_2 \ldots k_n$, welche sämtlich K_1 und K_2 berühren, und von denen jeder den folgenden, der letzte, k_n, aber wieder den ersten, k_1, berührt, so werden bei der Inversion daraus *kongruente* Kreise $k_1' k_2' \ldots k_n'$, welche wieder K_1' und K_2' berühren, und von denen jeder den folgenden berührt.

Dreht man die Kette der Kreise k' um den Mittelpunkt von K_1' und K_2', wobei der Drehwinkel völlig beliebig ist, so erhält man durch die Inversion wieder eine Kreiskette $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$ von derselben Beschaffenheit wie $k_1 k_2 \ldots k_n$, d. h.: *Konstruiert man unter der oben ausgesprochenen Voraussetzung irgendeinen Kreis $\varkappa_1$ der K_1 und K_2 berührt und mit keinem der Kreise k_i zusammenfällt, dann anschließend $\varkappa_2$, der $K_1 K_2$ und $\varkappa_1$ berührt,* usw., *so berührt $\varkappa_n$ wieder $\varkappa_1$*; die Figur *schließt sich immer,* bei beliebig gewähltem *Anfangskreis* $\varkappa_1$. Dieser *Schließungssatz* rührt von Steiner her (*Werke* **1**, 43).

Statt zu fordern, daß die Kette $k_1 \ldots k_n$ zwei bestimmte Kreise $K_1 K_2$ berührt, kann man auch allgemeiner voraussetzen, daß jeder Kreis $k_1 \ldots k_n$ je zwei bestimmte (für jedes k_i verschiedene) Kreise eines hyperbolischen Büschels berührt; die Schlußweise ändert sich dadurch nicht.

4. *Die allgemeine Kreisverwandtschaft.* Die Lehre der *allgemeinen Kreisverwandtschaften* ist von F. Möbius aufgestellt (zuerst *Leipz. Ber.* **5** (1853), 14, 176, dann ausführlich *Leipz. Abh.* **2** (1855), 529, *Gesammelte Werke* **2**, Leipzig 1886, S. 205, 219, 243), und gezeigt worden, daß die allgemeinste Kreisverwandtschaft, d. h. eindeutige Punkttransformation der Ebene, bei der Kreise wieder in Kreise (oder teilweise in gerade Linien) übergehen, sich aus Inversion, Bewegung, Spiegelung und ähnlicher Vergrößerung (Ähnlichkeitstransformation) aufbauen läßt. — Wir gehen hierauf nicht ein, ebensowenig auf die *imaginären Kreise,* die Moebius in einer klassischen Arbeit (*Leipz. Ber.* **9** (1857), 38, *Werke* **2**, 315) behandelt hat.

Bei der *Inversion* kehrt sich der Umlaufssinn eines Kreises um; durchläuft P die Kreisperipherie K *positiv,* d h. so daß das Innere zur Linken bleibt, so durchläuft P_1 die Peripherie K_1 negativ, so daß das Kreisinnere zur Rechten liegt.

Man führt daher, und das ist für die höhere Kreisgeometrie wichtig, *orientierte Kreise* ein; ein und derselbe Kreis ist zu zerspalten in zwei Kreise K_+ und K_- von entgegensetztem Umlaufssinn.

Beim positiven Umlauf ist das Kreisinnere zur Linken, beim negativen zur Rechten. K_+ und K_- kann man durch das Vorzeichen des Radius unterscheiden. Laguerre (*Nouv. Ann.* 1882, 1883, *Œuvres* **2**, p. 608, 651) hat die orientierten Kreise *Zykeln* genannt. Er stellt ihnen die orientierten Geraden als *Halbstrahlen* zur Seite und gelangt dann zu einer bemerkenswerten, der Inversion analogen Beziehung, die durch einen Zykel zwischen den

Halbstrahlen einer Ebene vermittelt wird, und die er als *Transformation durch reziproke Halbstrahlen* bezeichnet: Entsprechende Halbstrahlen schneiden sich hierbei auf einer festen Achse, der *Transformationsachse*, und sind gleichgerichtet mit zwei Tangenten des Zykels, d. h. zwei mit dem Umlaufssinne des Zykels übereinstimmenden und den Zykel berührenden Halbstrahlen, deren Berührungspunkte mit einem festen Pole in gerader Linie liegen. Parallelen Halbstrahlen entsprechen wieder parallele Halbstrahlen, und irgend zwei Paare entsprechender Halbstrahlen sind Tangenten eines Zykels. Gleitet ein Halbstrahl an einem beliebigen Zykel entlang, so umhüllt der entsprechende Halbstrahl einen anderen Zykel. Die Transformationsachse ist immer die Potenzlinie der beiden Zykeln, und ihre gemeinsamen Tangenten sind den aus dem Pol an den Grundzykel gelegten Tangenten, den „Haupttangenten", parallel. Insbesondere folgt: Den Halbstrahlen, die durch einen Punkt P gehen, entspricht ein (so dem Punkte P zugeordneter) Zykel π. Die Tangenten, die von P an π gehen, sind den Haupttangenten parallel und werden durch die Transformationsachse halbiert. Die Radien der Zykeln, die man so erhält, sind den Abständen ihrer Mittelpunkte von der Transformationsachse proportional. Irgend zwei einander entsprechende Paare von Zykeln haben gemeinsame Tangenten von gleicher Länge.

Sind α, β die Winkel, welche ein Halbstrahl mit den von einem seiner Punkte an einen Zykel gehenden Tangenten einschließt, so ist:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}=\frac{r-p}{r+p},$$

wenn r der Radius des Zykels und p der Abstand seines Mittelpunktes von dem Halbstrahl ist, positiv gerechnet, wenn der Halbstrahl eine positive Umkreisung des Mittelpunktes festlegt, negativ im entgegengesetzten Falle. Dieses Produkt, das sonach für alle Punkte eines Halbstrahls dasselbe ist, heißt nach Epstein (*Ztschr. f. math. Unt.* **37**, 1906, 499) die *Potenz* des Halbstrahls bez. des Zykels. Der gewöhnlichen Potenzlinie ist hier ein Potenzpunkt analog, durch den alle Halbstrahlen von gleicher Potenz bez. zweier Zykeln hindurchgehen. Dies ist der Schnittpunkt der beiden gemeinsamen Tangenten der Zykel, d. h. ihr Ähnlichkeitspunkt.

Die Apollonische Berührungsaufgabe verändert sich bei Einführung der Zykeln derart, daß zu drei Zykeln nur *zwei* sie alle

berührende Zykeln existieren können, da die Berührung auch immer gleichen Richtungssinn an der Berührungsstelle (als ob es sich um rotierende Friktionsräder handelte) einschließt. So haben zwei Zykeln auch höchstens *zwei* gemeinsame Tangenten und *einen* Ähnlichkeitspunkt, drei Zykeln also eine einzige Ähnlichkeitsachse. Die Lösung des Apollonischen Problems, die sich aus der Laguerreschen Theorie ergibt, findet man in dessen *Œuvres* **2**, p. 618, und bei Epstein, *l. c.*

Alle Zykeln, die zwei gemeinsame Tangenten besitzen, bilden eine *Zykelreihe*. Die Zykeln, deren Radien zu den Abständen der Mittelpunkte von einer festen Achse a in einem konstanten Verhältnisse stehen, bilden ein *Zykelnetz*. Für irgend drei Zykel des Netzes ist die Achse a die Ähnlichkeitsachse. In dem Zykelnetz sind doppelt unendlich viele Zykelreihen enthalten.

Die *Laguerresche Linieninversion* kann dadurch gekennzeichnet werden, daß sie die Punkte der Ebene in die Zykeln eines Netzes transformiert. Sie ist im Lieschen Sinne eine *Berührungstransformation* und als solche von Scheffers, *Leipz. Ber.* **51** (1899), 145, elementar behandelt worden. Aus dem Begriff der Linienpotenz folgt sofort, daß die Winkel α, β, die zwei korrespondierende Halbstrahlen mit der Transformationsachse a bilden, durch eine Relation

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \text{const.}$$

verknüpft sind. Da die Halbstrahlen sich ferner auf a schneiden, ist die Linieninversion so völlig bestimmt. Statt des Zykels, aus dem Laguerre sie ableitet, kann ein beliebiger Zykel aus einem bestimmten Netz mit der Achse a verwendet werden. Die Linieninversion transformiert jede Zykelreihe in eine Zykelreihe, jedes Zykelnetz in ein Zykelnetz.

Die Zykeln einer Ebene können mit den Punkten des Raumes in eindeutige Beziehung gebracht werden, indem man in ihrem Mittelpunkte auf ihrer Ebene ein Lot gleich ihrem Radius (bei positivem Radius nach oben, bei negativem nach unten) errichtet und dem Zykel den Endpunkt dieses Lotes zuweist. Dann entsprechen den Zykelreihen die geraden Linien, den Zykelnetzen die Ebenen des Raumes. Dies ist der Grundgedanke der Fiedlerschen *Zyklographie* (Leipzig 1882). Vgl. E. Müller, *Math. Ver.* **14** (1905), 574.

§ 6. Die Konstruktionen von Mascheroni.

Mascheroni hat in seiner *Geometria del compasso*, Pavia 1797 (Deutsche Übers. von Grüson: *Gebrauch des Zirkels*, Berlin 1825) ein Gegenstück oder vielmehr ein Vorbild für die Steinerschen Konstruktionen mit dem Lineal (§ 2, 5) geschaffen. Es werden die Fundamentalkonstruktionen an Kreisen und Punkten einer Ebene *mit Hilfe des Zirkels allein* ausgeführt. Eine gerade Linie kann so nur in Gestalt von einer endlichen Anzahl Punkte, die auf ihr liegen, auftreten. Eine Strecke $AB = a$ ist dabei nur durch ihre Endpunkte gegeben. Zur Charakterisierung dieser Geometrie mögen ein paar einfache Beispiele genügen.

Um AB zu verdoppeln, hat man um B einen Kreis mit dem Radius a zu konstruieren und auf ihm von A aus a dreimal abzutragen; so erhält man bekanntlich B_1, das mit A und B in einer Geraden liegt, und es ist $AB_1 = 2a$. Entsprechend kann man Strecken ver-n-fachen.

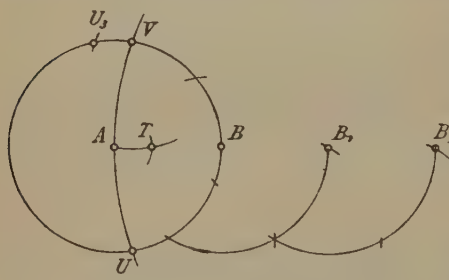


Fig. 7.

Die *Teilung einer Strecke $AB = a$ in n gleiche Teile* wird (für $n = 3$) so ausgeführt (Fig. 7): Es sei $AB_2 = 3a$, um B_2 beschreibe man den Kreis K_3 mit dem Radius AB_2, der mit dem Kreis um A (Radius a) zum Schnitt gebracht wird (U, V). Zu U wird der diametral gegenüberliegende Punkt U_3 konstruiert, man sieht dann sofort, daß U_3V zu AB parallel ist. Denkt man sich U_3V bis zum zweiten Schnitt V' mit K_3 verlängert, desgleichen AB_2 bis zum zweiten Schnitt A' mit K_3, so ist $\sphericalangle VAA' = \sphericalangle V'A'A$, U_3A daher parallel zu $V'A'$, und $U_3V' = AA' = 6a$. Die Potenz von K_3 für U_3 aber ist demnach:

$$U_3A \cdot U_3U (= 2a^2) = U_3V \cdot 6a,$$

woraus

$$U_3V = \tfrac{1}{3}a.$$

Die Kreise mit den Radien a (Mittelpunkt V) und $\frac{1}{3}a$ (Mittelpunkt A) geben also den gesuchten Teilpunkt.

Bogenhalbierung. (Fig. 8.) Um die Mitte des Bogens AB (Sehne $AB = s$) auf dem Kreis (Mittelpunkt O, Radius a) zu finden, konstruiert man zuerst C und D ($OC = OD = s$, $AC = BD = a$), COD liegen dann in einer Geraden. E ist so bestimmt, daß $CE = DE = CB (= DA)$ ist, also

$$CE^2 = CB^2 = \left(\frac{3}{2}s\right)^2 + \left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right) = r^2 + 2s^2;$$

daher

$$OE^2 = CE^2 - s^2 = r^2 + s^2.$$

Andrerseits ist der Abstand CM, wo M die gesuchte Mitte des Bogens AB ist, gegeben durch

$$CM^2 = r^2 + s^2,$$

also wird

$$CM = OE,$$

woraus sich M sofort ergibt.

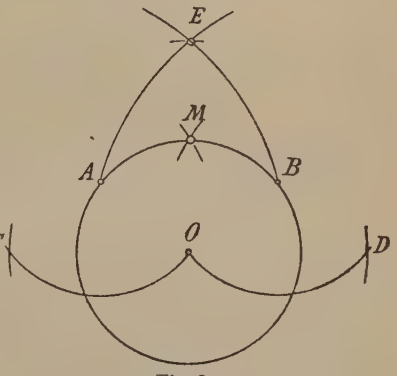


Fig. 8.

Mascheroni löst weiter die Aufgaben: den Fußpunkt des Lotes, das aus einem Punkte auf eine durch ihre Endpunkte gegebene Strecke gefällt wird, zu bestimmen, den Schnittpunkt zweier durch je zwei Punkte gegebenen Linien zu finden, er konstruiert alle Strecken, die sich aus gegebenen Strecken durch die Konstruktionen der euklidischen Geometrie finden lassen, er zeichnet die regulären Polygone usw. Das Genauere kann man in dem Originalwerke nachlesen.

Kapitel III.

Übergang zur neueren Geometrie.

Von *H. Timerding* in Straßburg und *L. Heffter* in Kiel.

A. Metrischer Ursprung der projektiven Geometrie.

Von *H. Timerding.*

§ 1. Ansatz der neueren Geometrie.

Aus der Geometrie der Alten hat sich die neuere Geometrie wesentlich dadurch entwickelt, daß gewisse systematische Gesichtspunkte in den Vordergrund gestellt wurden. Der Weg, den sie ging, mußte deswegen der sein, daß sie aus dem in den Schriften der alten Geometer, namentlich des Apollonius und Pappus, überlieferten Material diejenigen Sätze auswählte, welche einer besonderen systematischen Auffassung Spielraum gaben, und dann aus diesem zunächst spezialisierten Inhalte heraus zu völlig neuen Betrachtungen fortschritt, die den Umfang der alten Geometrie als ein eng umgrenztes Gebiet in sich schlossen. Dieser Gang der Entwicklung ist schon an den Arbeiten der älteren französischen Geometer, Desargues, Pascal, La Hire u. a., zu erkennen und tritt an den grundlegenden Werken, der *Géométrie de position* von Carnot (1803) und dem *Traité des propriétés projectives des figures* von Poncelet (1822) deutlich zutage. Des näheren vgl. man den Bericht von Kötter, *Math. Ver.* **5**, 1901.

Als den Ausgangspunkt kann man die etwas umgeformte Euklidische Streckenrechnung ansehen. Man unterscheidet an einer geraden Linie den doppelten Sinn, in welchem sie durchlaufen werden kann, und bezeichnet den einen als *positiv*, den anderen als *negativ*. Einer Strecke auf der Geraden gibt man dann das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem sie im positiven oder negativen Sinne durchlaufen werden soll. Bezeichnet man die Strecke durch die begrenzenden Punkte A, B, so nimmt man demgemäß $AB = -BA$ an.

Für irgend vier Punkte A, B, C, D gilt die *Eulersche Formel*

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0$$

und die *Simsonsche Formel*

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot CA + CD^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0.$$

Insbesondere betrachtet man solche Strecken, die von *einem* Punkte A ausgehen. Dann ergeben die drei verschiedenen Mittelwerte eine einfache Art, aus zwei Strecken eine dritte abzuleiten. Das *arithmetische Mittel*

$$AM = \tfrac{1}{2}(AB + AC)$$

liefert die Mitte der Strecke BC. Das *geometrische Mittel* ist nur dann anwendbar, wenn die Strecken AB und AC gleichen Sinn haben, und wird

$$AE = \sqrt{AB \cdot AC},$$

liefert also zwei Punkte E, E', so daß $AE = -AE'$ wird. Der Punkt E liegt hierbei immer zwischen B und M, wenn AB die kürzere Strecke ist. Das *harmonische Mittel* ergibt:

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right)$$

oder

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AD} = \frac{1}{AD} - \frac{1}{AC},$$

woraus

$$\frac{BD}{BA} = -\frac{CD}{CA} \quad \text{oder} \quad \frac{AB}{AC} = -\frac{DB}{DC}$$

folgt. Man sagt dann, die Punkte B, C werden durch A, D harmonisch getrennt, oder A, B, D, C bilden vier harmonische Punkte. Die verschiedenen Mittelwerte sind derart miteinander verknüpft, daß, wenn man wie oben

$$AM = \tfrac{1}{2}(AB + AC), \quad AE = \sqrt{AB \cdot AC}$$

setzt,

$$AM : AE = AE : AD$$

wird, und aus den Gleichungen für harmonische Punkte folgt:

$$MB^2 = MC^2 = MA \cdot MD.$$

Sind a, b, c, d die Abstände der vier harmonischen Punkte A, B, C, D von einem beliebigen Punkte ihrer Geraden, so gilt die Gleichung

$$ad - \tfrac{1}{2}(a + d)(b + c) + bc = 0.$$

§ 2. Doppelverhältnisse.

Wie $\frac{AB}{AC}$ als Proportion oder Verhältnis, so wird nun $\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC}$ als *Doppelverhältnis* (nach Moebius' Baryzentrischem Kalkul, 1827, *Doppelschnittverhältnis*) bezeichnet. Ist das Doppelverhältnis $= -1$, so sind die vier Punkte harmonisch. Das Doppelverhältnis kann nur dann verschwinden, wenn zwei der vier Punkte zusammenfallen.

Wir schreiben

$$\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = (AD, BC),$$

dann wird

$$(DA, CB) = (AD, BC), \quad (BC, AD) = (AD, BC);$$

ferner können wir ansetzen:

$$(AD, BC) = \lambda, \quad (AB, DC) = 1 - \lambda, \quad (AC, DB) = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$(AD, CB) = \frac{1}{\lambda}, \quad (AB, CB) = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad (AC, BD) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

So ergeben sich die sämtlichen Doppelverhältnisse, die sich aus vier Punkten einer Geraden bilden lassen.

Nach Moebius ergibt sich das Doppelverhältnis aus den Abständen eines der Punkte von den übrigen auf Grund der Formel

$$\frac{\lambda - 1}{AD} = \frac{\lambda}{AB} - \frac{1}{AC}.$$

(Vgl. *Moebius' Werke*, Bd. 4, S. 541.)

Das Doppelverhältnis wird zum einfachen Verhältnis, wenn einer der vier Punkte in unendliche Entfernung rückt.

Der entscheidende Gedanke war nun der, den Punkten, die auf einer Geraden liegen, die Geraden der Ebene, die durch einen Punkt gehen, gegenüber zu stellen. Die Gesamtheit der ersteren bezeichnet man als eine (gerade) *Punktreihe*, die Gesamtheit der letzteren als einen *Strahlenbüschel*.

Der Punkt S, durch den alle Strahlen des Büschels hindurchgehen, heißt dessen *Scheitel* oder *Mittelpunkt*. Ein Strahl kann das Büschel in einem doppelten Sinne durchlaufen, der als positiver und negativer Drehsinn geschieden wird. Der Winkel $(a\,b)$ zweier Strahlen a, b wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem a in b durch eine Drehung um den Scheitel in positivem oder negativem Sinne übergeht.

Für irgend vier Strahlen eines Büschels gilt die der Eulerschen Formel analoge Gleichung

$$\sin(bc)\sin(ad) + \sin(ca)\sin(bd) + \sin(ab)\sin(cd) = 0.$$

Als das dem Verhältnis $AB : AC$ bei drei Punkten analoge Verhältnis bei drei Strahlen a, b, c eines Büschels sieht man den Bruch $\frac{\sin(ab)}{\sin(ac)}$ an und entsprechend als das Doppelverhältnis von vier Strahlen a, b, c, d den Wert

$$\lambda = \frac{\sin(ab)}{\sin(ac)} : \frac{\sin(db)}{\sin(dc)}.$$

Aus dieser Definition folgt:

$$\frac{\lambda - 1}{\operatorname{tang}(ad)} = \frac{\lambda}{\operatorname{tang}(ab)} - \frac{1}{\operatorname{tang}(ac)}.$$

Wird $\frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} = -\frac{\sin(db)}{\sin(dc)}$, so sagen wir: die Strahlen b, c werden durch die Strahlen a, d harmonisch getrennt.

Dann gilt der fundamentale Satz: *Das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels ist gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis der Schnittpunkte dieser Strahlen mit irgendeiner geraden Linie, die nicht durch den Scheitel des Büschels geht, und umgekehrt, das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Punktreihe ist gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis der Strahlen, welche die vier Punkte aus irgendeinem außerhalb ihrer Geraden gelegenen Punkte projizieren.*

Dieser Satz bleibt im vollen Umfange richtig, wenn man auch eine Gesamtheit von parallelen Geraden als ein Strahlenbüschel bezeichnet, und dann definitionsweise als Doppelverhältnis von vier Strahlen eines solchen Büschels das Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit irgendeiner Geraden festsetzt.

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satze ist der Satz vom *vollständigen Vierseit*. Ein solches Vierseit wird gebildet durch vier Gerade, von denen keine drei einem Büschel angehören. Die Schnittpunkte dieser Geraden heißen die *Ecken* des Vierseits, die drei Verbindungslinien der Ecken, die keine Seiten des Vierseits sind, heißen dessen *Diagonalen*. Dann ergibt sich: *Die Ecken, die auf einer Diagonale liegen, werden harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte dieser Diagonale mit den beiden anderen.*

Diesem Satze steht gegenüber ein Satz vom *vollständigen Viereck*. Ein solches wird gebildet von vier Punkten, von denen keine drei

einer Geraden angehören. Die Verbindungslinien dieser Punkte heißen die *Seiten* des vollständigen Vierecks. Die drei Schnittpunkte der Seiten, die keine Ecken des Vierecks sind, heißen dessen *Diagonalpunkte.* Dann ergibt sich: *Die Seiten, die durch einen Diagonalpunkt gehen, werden harmonisch getrennt durch die Verbindungslinien dieser Diagonalpunkte mit den beiden anderen.*

§ 3. Involutionen.

Name und Begriff der Involutionen stammt von Desargues (*Brouillon project* etc. 1639, Œuvres p. 97). Die Punkte einer geraden Linie bilden eine *Involution,* wenn sie einander derart paarweise zugeordnet sind, daß die Abstände x, x' der Punkte P, P' eines Paares von einem festen Punkt O einer Gleichung von folgender Form genügen:

$$Axx' + B(x + x') + C = 0$$

oder, wenn $A \neq 0$,

$$xx' - a(x + x') + b = 0.$$

Legt man einen Punkt M durch seine *Abszisse* $OM = a$ fest, so folgt aus der vorigen Gleichung:

$$MP \cdot MP' = k,$$

wobei $k = a^2 - b$ positiv oder negativ sein kann. M heißt dann der *Mittelpunkt* der Involution. Der ihm in der Involution zugeordnete Punkt fällt in unendliche Entfernung.

Ist $k > 0$, so findet man zwei Punkte B, C, für die

$$MB^2 = MC^2 = K$$

wird. Dann werden B, C durch jedes Punktepaar der Involution *harmonisch getrennt* und heißen die *Doppelpunkte* der Involution, weil in jedem von ihnen ein Punktepaar der Involution sich vereinigt. In diesem Falle heißt die Involution *hyperbolisch.*

Ist $k < 0$, so werden die Doppelpunkte der Involution imaginär, und diese heißt *elliptisch.*

Die Involution ist in eindeutiger Weise bestimmt durch irgend zwei Punktepaare. Werden die Punkte des einen von diesen durch die Punkte des anderen getrennt, so ist die Involution elliptisch, im entgegengesetzten Falle hyperbolisch.

Sind $(P_1P_1')(P_2P_2')(P_3P_3')$ drei Punktepaare einer Involution, so wird

$$P_1P_2' \cdot P_2P_3' \cdot P_3P_1' = P_1P_3' \cdot P_2P_1' \cdot P_3P_2'.$$

Diese *Chaslessche Gleichung* kann auch durch die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse ausgedrückt werden; es ist nämlich

$$\frac{P_1P_1'}{P_1P_3'} : \frac{P_2P_1'}{P_2P_3'} = \frac{P_1P_1'}{P_1P_2'} : \frac{P_3P_1'}{P_3P_2'}.$$

Wird in der ersten Gleichung $A = 0$, so ist

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{C}{2A}.$$

Die Punktepaare der Involution haben alle denselben Mittelpunkt, und die Involution heißt *gleichseitig*. In diesem Falle wird in der Chaslesschen Gleichung $P_1P_2' = P_2P_1'$ usf.

Führt man in die Chaslessche Gleichung die Abstände aller Punkte von einem festen Punkte O ihrer Geraden ein, indem man $OP_i = x_i$, $OP_i' = x_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ setzt, so wird sie

$$(x_1 - x_2')(x_2 - x_3')(x_3 - x_1') = (x_1 - x_3')(x_2 - x_1')(x_3 - x_2')$$

oder in Determinantenform geschrieben

$$\begin{vmatrix} x_1x_1' & x_1 + x_1' & 1 \\ x_2x_2' & x_2 + x_2' & 1 \\ x_3x_3' & x_3 + x_3' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist die Involution durch die zwei Punktepaare mit den Abszissen (x_1, x_1'), (x_2, x_2') gegeben, so sind die Abszissen für irgendein weiteres Paar durch die quadratische Gleichung bestimmt

$$(x - x_1)(x - x_1') + \lambda(x - x_2)(x - x_2') = 0,$$

wobei λ ein von Paar zu Paar wechselnder Parameter ist. Die Diskriminante der Gleichung lautet:

$$D = (x_1 - x_1')^2 - 4[x_1x_1' - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_1')(x_2 + x_2') + x_2x_2']\lambda + (x_2 - x_2')^2\lambda^2.$$

Nur wenn $D > 0$, ergibt sich ein reelles Punktepaar. $D = 0$ liefert die zu den Doppelpunkten der Involution gehörenden Parameterwerte λ.

Der *Punktinvolution* steht die *Strahleninvolution*, welche die Strahlen eines Strahlenbüschels paarweise einander zuordnet, gegenüber. Sind p, p' zwei Strahlen eines Paares, m ein fester Strahl, so ist die Involution definiert durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}(mp) \cdot \operatorname{tang}(mp') = k \quad (k \gtrless 0).$$

Ist $k > 0$, so hat die Involution zwei *Doppelstrahlen*, d. h. sich selbst zugeordnete Strahlen b, c, die durch

$$\text{tang}^2\,(mb) = \text{tang}^2\,(mc) = k$$

definiert sind, deren Winkel also durch m und den dazu senkrechten Strahl m' halbiert werden. m, m' sind das einzige Paar zueinander senkrechter Strahlen in der Involution. Die letztere heißt in diesem Falle *hyperbolisch* und, wenn insbesondere $k = 1$, *gleichseitig*. Dann sind die Doppelstrahlen zueinander senkrecht, und die Involution besteht aus allen Strahlenpaaren, deren Winkel durch diese Doppelstrahlen halbiert werden.

Ist $k < 0$, so werden die Doppelstrahlen imaginär, die Involution heißt *elliptisch*. Ist insbesondere $k = -1$, so sind je zwei zugeordnete Strahlen der Involution zueinander senkrecht. Die Involution heißt dann *orthogonal*.

Eine Punktinvolution wird aus einem außerhalb ihrer Geraden gelegenen Punkt immer durch eine Strahleninvolution projiziert. Danach lassen sich die für die Punktinvolution gefundenen Sätze auf die Strahleninvolution übertragen.

Umgekehrt wird eine Strahleninvolution von einer Geraden, die nicht durch den Büschelscheitel geht, in einer Punktinvolution geschnitten.

Eine $\left\{\begin{matrix}\text{elliptische}\\ \text{hyperbolische}\end{matrix}\right\}$ Punktinvolution wird aus zwei bestimmten, symmetrisch bezüglich ihrer Geraden über und unter ihrem Mittelpunkt gelegenen Punkten durch eine $\left\{\begin{matrix}\text{orthogonale}\\ \text{gleichseitige}\end{matrix}\right\}$ Strahleninvolution projiziert. Nur wenn die Punktinvolution selbst gleichseitig ist, gilt dies für alle Punkte einer zu dem Träger der Punktinvolution senkrechten Geraden.

Weiteres s. z. B. in Hesse, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie* usw., 4. Aufl. 1906, Sturm, *Lehre von den geometrischen Verwandtschaften* **1**, 1908 und in der grundlegenden Arbeit von Seydewitz, *Archiv f. Math.* **4** (1844), 246.

§ 4. Projektive Eigenschaften der Figuren.

Eine unmittelbare Folge aus dem Satz vom Doppelverhältnis (§ 2) ist auch der folgende: Sind A, B, C und A', B', C' je drei Punkte zweier geraden Linien, die sich in einem Punkte D schneiden, und ist das Doppelverhältnis $(AD, BC) = (A'D, B'C')$, so

gehen die Linien AA', BB', CC' durch einen Punkt oder sind alle drei parallel.

Auf Grund dieses Satzes kann man den folgenden sog. *Desarguesschen Satz* beweisen: *Kann man den Seiten eines Dreiecks die Seiten eines anderen Dreiecks so zuweisen, daß die drei Paare entsprechender Seiten sich in drei Punkten einer geraden Linie durchschneiden, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der Ecken, die je zwei entsprechenden Seiten in den beiden Dreiecken gegenüberliegen, in einem Punkte oder sind einander parallel.*

Statt sich in drei Punkten einer Geraden zu schneiden, können die Seiten auch paarweise parallel sein, oder ein Paar ist der Verbindungslinie der Schnittpunkte der beiden anderen Paare parallel. Diese Fälle sollen in die Aussage des Satzes mit eingeschlossen sein. Dann ist der letztere auch umkehrbar, und diese Umkehrung betrachten wir als die *zweite Aussage des Desarguesschen Satzes.*

Ebenso ist der folgende Pascalsche Satz leicht zu beweisen: *Sind A, B, C und A', B', C' je drei Punkte zweier geraden Linien und zieht man die folgenden Paare von Verbindungslinien:*

$$BC' \text{ und } CB', \quad CA' \text{ und } AC', \quad AB' \text{ und } BA',$$

so liegen die Schnittpunkte dieser Linienpaare entweder auf einer geraden Linie, oder wenn die Linien eines Paares parallel sind, ist ihnen auch die Verbindungslinie der Punkte parallel, in denen sich die beiden anderen Paare schneiden, oder wenn die Linien zweier Paare parallel sind, sind auch die Linien des dritten Paares parallel.

Die Bedeutung dieser Sätze für die neuere Geometrie besteht weniger in ihrem Gehalt an sich als in ihrer systematischen Verwertung. Das Charakteristische an ihnen liegt darin, daß die Konstruktionen, auf die sie sich gründen, allein mittels des Lineals ohne Zuhilfenahme des Zirkels ausführbar sind. Daraus folgt, daß die ausgesprochenen Eigenschaften unverändert erhalten bleiben bei allen Transformationen der Figuren, die die Punkte und Geraden einer Ebene in die Punkte und Geraden einer anderen Ebene so überführen, daß, wenn in der ersten Ebene ein Punkt auf einer Geraden liegt, der ihm in der anderen Ebene eindeutig zugeordnete Punkt auf der entsprechenden Geraden liegt, und somit, wie wir uns ausdrücken, alle Inzidenzen erhalten bleiben. Diese Eigenschaften werden daher als *graphische* oder *projektive* Eigenschaften der Figuren bezeichnet. Solchen projektiven Charakter haben z. B. die Involutionen.

Was hier zunächst für die ebene Geometrie ausgeführt ist, läßt sich sofort auf den Raum erweitern. Der geraden Punktreihe tritt dann das *ebene Punktfeld* zur Seite, d. h. die Gesamtheit aller Punkte einer Ebene. Die Geraden, die im Raum durch einen Punkt gehen, bilden ein *Strahlenbündel*, und die Gesamtheit aller Ebenen, die durch einen Punkt gehen, heißt ein *Ebenenbündel*. Der Punkt selbst heißt wieder der *Scheitel* oder *Mittelpunkt* des Bündels. An die Stelle des Strahlenbüschels tritt jetzt das *Ebenenbüschel*, als die Gesamtheit aller Ebenen, die durch eine bestimmte gerade Linie, die *Achse* des Büschels, hindurchgehen. Der Winkel zweier Ebenen α, β des Büschels wird positiv oder negativ genommen, je nach dem Sinn der Drehung um die Achse, die α in β überführt. Als Doppelverhältnis von vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Büschels wird der Ausdruck bezeichnet

$$\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\gamma)} : \frac{\sin(\delta\beta)}{\sin(\delta\gamma)}.$$

Hier gilt dann wieder der fundamentale Satz: *Das Doppelverhältnis von vier Ebenen eines Büschels ist gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit irgendeiner geraden Linie, welche die Achse des Büschels nicht schneidet und ihr nicht parallel ist, und das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ist gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis der vier Ebenen, welche diese Punkte mit irgendeiner (die Gerade der vier Punkte nicht schneidenden) Geraden des Raumes verbinden.*

Dieser Satz ist noch der Erweiterung fähig, daß auch eine Gesamtheit paralleler Ebenen als Ebenenbüschel angesehen wird, und das Doppelverhältnis von vier Ebenen eines solchen Büschels definitionsweise als das Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit irgendeiner ihnen nicht parallelen Geraden festgelegt wird.

Im Raum gilt der Satz, der in der Ebene kein Analogon hat: *Haben je vier Punkte zweier Geraden dasselbe Doppelverhältnis, so können sie immer durch vier Ebenen eines Ebenenbüschels ausgeschnitten werden. Dies Ebenenbüschel kann nur dann aus parallelen Ebenen bestehen, wenn nicht bloß die Doppelverhältnisse, sondern auch die homologen Abstandsverhältnisse der Punkte gleich sind.*

B. Gruppentheoretische Begründung der Euklidischen Geometrie.

Von *L. Heffter.*

§ 5. Bedeutung der Transformationen für die Charakterisierung der Geometrie.

Die Euklidische Geometrie untersucht alle gesetzmäßig gestalteten Gebilde des Raumes in bezug auf diejenigen Eigenschaften, die ihnen bei gewissen Verwandlungen treu bleiben. Wenn wir z. B. die geometrischen Eigenschaften eines Rechtecks untersuchen, so ist es uns gleichgültig, wo das Rechteck im Raume gedacht, auch in welcher Größe es vorgestellt wird. Also höchstens diejenigen Eigenschaften des Rechtecks interessieren uns, die ihm bei allen *ähnlichen Abbildungen* erhalten bleiben. Man kann aber sein Interesse auch auf solche Eigenschaften des Rechtecks beschränken, die nicht nur bei allen ähnlichen Abbildungen, sondern überhaupt bei allen denen erhalten bleiben, die *Parallele* stets *wieder in Parallele* überführen; d. h. man berücksichtigt nur die Eigenschaften des Rechtecks, die ihm schon als Parallelogramm eigen sind. Endlich kann man noch einen Schritt weiter gehen und das Interesse auf solche Eigenschaften beschränken, die bei allen *perspektiven* (oder projektiven) *Abbildungen* erhalten bleiben, d. h. die dem Rechteck schon als Viereck zukommen.

Diese elementaren Betrachtungen veranlassen den Versuch, *alle* geometrischen Beziehungen und die Lehre von ihnen je nach der Art der Abbildungen oder *Transformationen*, die ihr Wesen ungeändert (*invariant*) lassen, in verschiedene Abstufungen zu gliedern. Um dies durchzuführen, müssen wir auf die Definition der zu benutzenden Transformationen und dazu wiederum zunächst auf die geometrischen Elemente und die elementaren Beziehungen zwischen ihnen näher eingehen.

§ 6. Uneigentliche Elemente.

Als die uns gegebenen geometrischen Elemente betrachten wir *Punkt, Gerade* und *Ebene*, und wir denken uns den gesamten Raum angetan mit allen möglichen Punkten, Geraden, Ebenen. Aber die von uns in Betracht gezogenen Sätze (S. 54) verlangen jedesmal eine Unterscheidung, welche ihre Einheitlichkeit zerstört. Denn die

Parallelität bedingt Ausnahmefälle, welche besonders zu berücksichtigen sind. Die vorstellbaren Elemente jener drei Arten genügen deshalb noch nicht zur ausnahmlosen Formulierung jener Sätze, weil z. B. die Sätze „Zwei nicht identische Gerade derselben Ebene haben stets einen und nur einen gemeinsamen Punkt", „Zwei nicht identische Ebenen haben stets eine und nur eine gemeinsame Gerade" nicht ausnahmlos gelten, sondern ungültig werden, wenn die beiden Geraden oder Ebenen parallel sind. Fügen wir aber noch *eine* gedachte *„uneigentliche"* (unendlich ferne) *Ebene* mit allen ihren Punkten und Geraden jenen „eigentlichen" Elementen hinzu mit der Festsetzung, daß jeder ihrer Punkte als der Schnittpunkt einer Schar paralleler Geraden, jede ihrer Geraden als die Schnittlinie einer Schar paralleler Ebenen gelten soll, so fallen jene Ausnahmen fort. Die in gewissem Sinne *offene* Mannigfaltigkeit aller eigentlichen Punkte, Geraden, Ebenen des Raumes ist durch diese künstliche Ergänzung zu einer *geschlossenen* geworden. Die methodische Durchführung dieser Gedanken ist in aller Strenge zuerst von Pasch (*Vorlesungen über neuere Geometrie* 1882) gegeben worden. Das Nähere darüber findet man in Kap. VI.

In der so gewonnenen geschlossenen Mannigfaltigkeit wird nunmehr zunächst zwischen eigentlichen und uneigentlichen Elementen keinerlei Unterschied gemacht; d. h. wir vergessen vorerst vollständig wieder jene Unterscheidung und betrachten eigentliche und uneigentliche Elemente als völlig gleichberechtigt. Die Eigenschaften der räumlichen Figuren, die wir als *projektive* zu bezeichnen haben, lassen unberücksichtigt, ob die betrachteten Punkte, Geraden und Ebenen eigentliche oder uneigentliche sind.

§ 7. Projektive Gruppe und projektive Geometrie.

Unter den elementaren Beziehungen, die zwischen verschiedenen Elementen bestehen können, betrachten wir als erste die *Inzidenz* zweier verschiedenartiger Elemente (ein Punkt liegt auf einer Geraden, in einer Ebene = die Gerade, Ebene geht durch den Punkt; eine Gerade liegt in einer Ebene = die Ebene geht durch die Gerade).

Schon diese Beziehung genügt, um die allgemeinste Transformation des Raumes, die wir in Betracht zu ziehen haben, zu charakterisieren. Man nennt eine Transformation des Raumes, bei der jedes Element in ein gleichartiges übergeht und alle Inzidenzen erhalten bleiben, d. h. je zwei inzidierende Elemente wieder in solche übergehen, eine *projektive* Transformation. Geht man näm-

lich z. B. von einer Ebene mit allen ihren Punkten und Geraden dadurch zu einer neuen Ebene über, daß man sie von einem Punkte außerhalb aus projiziert, das entstehende „Bündel“ durch eine andere Ebene schneidet und jedem Element (Punkt, Gerade) der ersten Ebene dasjenige der zweiten Ebene zuordnet, das mit demselben Element des vermittelnden Bündels (Strahl, Ebene) inzidiert, so werden in der Tat inzidierende Elemente der ersten Ebene stets wieder in solche der zweiten Ebene übergeführt. Man kann auch umgekehrt zeigen, daß wenn zwei Ebenen in dem angegebenen Sinn (durch Erhaltung aller Inzidenzen) *projektiv* einander zugeordnet sind, diese Zuordnung durch eine Reihenfolge von Projektionen und Schnitten hergestellt werden kann. Hierdurch wird der Name „projektive Transformation“ gerechtfertigt.

Führt man nacheinander zwei projektive Transformationen aus, so kommt dies einer einzigen solchen gleich. Die Gesamtheit aller projektiven Transformationen besitzt daher die Eigenschaft einer *Gruppe*; sie heißt die Gruppe der projektiven Transformationen des Raumes oder kurz die *projektive Gruppe*.

Diese projektive Gruppe benutzen wir nun als Reagens, um alle geometrischen *Beziehungen* zwischen den Elementen und alle aus diesen — auch unter Zuhilfenahme des Zahlbegriffs — abgeleiteten geometrischen *Begriffe* daraufhin zu prüfen, ob sie bei *allen* Transformationen der projektiven Gruppe ungeändert bleiben. Alle Beziehungen und Begriffe, die dieser Prüfung standhalten, und nur diese bezeichnen wir als *projektive Beziehungen* und *Begriffe*. Jeden Lehrsatz, in dem nur projektive Beziehungen und Begriffe der Voraussetzung zu Schlußfolgerungen benutzt werden, nennen wir einen *projektiven Lehrsatz*. Die Gesamtheit aller dieser Beziehungen, Begriffe, Lehrsätze nennen wir *projektive Geometrie*.

So ist die harmonische Lage von zwei Punktepaaren einer Geraden eine projektive Beziehung zwischen den vier Punkten; das Doppelverhältnis von irgend vier Punkten einer Geraden ein projektiver Begriff; der Satz, daß im vollständigen Viereck je zwei Gegenseiten durch die beiden von ihrem Schnittpunkt verschiedenen Diagonalpunkte harmonisch getrennt werden, ein projektiver Satz.

§ 8. Affine Gruppe und affine Geometrie.

Jetzt führen wir als zweite elementare Beziehung die *Parallelität* (zweier Ebenen, zweier Geraden, einer Ebene und einer Geraden) ein und bezeichnen eine projektive Transformation des

Raumes, bei der alle Parallelitäten erhalten bleiben, als *affine Transformation.* Auch die Gesamtheit der affinen Transformationen bildet eine Gruppe, die *affine Gruppe,* die nur einen Teil der Transformationen der projektiven Gruppe enthält und deshalb *Untergruppe* von dieser heißt.

Benutzen wir diese *engere* affine Gruppe als Reagens, so erhalten wir den *mehr* umfassenden Bereich der *affinen* Beziehungen, Begriffe, Lehrsätze, kurz die *affine Geometrie.* Sie enthält in der Tat die gesamte projektive Geometrie in sich; denn was bei der ganzen Gruppe der projektiven Transformationen ungeändert bleibt, bleibt natürlich auch bei der Untergruppe der affinen ungeändert. Aber die affine Geometrie enthält *mehr* als die projektive; denn z. B. die Parallelität ist eine der affinen Geometrie angehörige Beziehung, die in der projektiven Geometrie nicht auftreten kann, da sie nicht bei *allen* projektiven Transformationen erhalten bleibt. Wir nennen deshalb den über die projektive Geometrie hinausreichenden Teil der affinen Geometrie *Parallelmetrik.*

Wenn z. B. ein Punkt die Entfernung zweier andern halbiert, so ist dies eine affine und zwar parallelmetrische Beziehung zwischen den drei Punkten; das Abstandsverhältnis eines Punktes in bezug auf zwei andere ist ein affiner und zwar parallelmetrischer Begriff; der Satz, daß sich in jedem Parallelogramm die Diagonalen halbieren, ist ein affiner und zwar parallelmetrischer.

§ 9. Äquiforme Gruppe und äquiforme Geometrie.

Wir führen endlich als dritte elementare Beziehung die *Orthogonalität* (einer Geraden und einer Ebene, zweier Ebenen, zweier Geraden) ein und bezeichnen eine affine Transformation des Raumes, bei der auch noch alle Orthogonalitäten erhalten bleiben, als *äquiforme* oder Ähnlichkeits-*Transformation.* Denn es läßt sich leicht zeigen, daß mit der Erhaltung der rechten Winkel auch *alle* Winkel erhalten bleiben, also alle Figuren in solche der gleichen Form, d. h. ähnliche übergehen. Denken wir uns nämlich ein rechtwinkliges Dreieck ABC, so geht dies wieder in ein rechtwinkliges Dreieck $A'B'C'$ über. Konstruieren wir über der größeren Kathete AB des ersteren das Quadrat $ABDE$, so entspricht diesem wieder ein Quadrat $A'B'D'E'$, denn es muß ihm ein Rechteck entsprechen, dessen Diagonalen wieder aufeinander senkrecht sind. Nach der allgemeinen Eigenschaft affiner Transformationen muß nun

$$\frac{BC}{BD} = \frac{B'C'}{B'D'} \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tang} \sphericalangle BAC = \operatorname{tang} \sphericalangle B'A'C',$$

und mithin $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ sein, w. z. b. w. Auch die Gesamtheit der äquiformen Transformationen bildet eine Gruppe, die *äquiforme Gruppe*, die wieder eine Untergruppe der affinen Gruppe ist.

Fragen wir nun nach allen Beziehungen, Begriffen, Lehrsätzen, die bei dieser äquiformen Gruppe invariant bleiben, so erhalten wir die *äquiforme Geometrie*. Sie umfaßt die gesamte affine Geometrie, aber noch mehr. Denn z. B. ein Geradenpaar durch einen Punkt und das Paar seiner Winkelhalbierenden stehen in einer äquiformen, aber nicht affinen Beziehung zueinander, da ja die Winkelhalbierenden orthogonal sind und diese Eigenschaft nicht bei *allen* affinen Transformationen erhalten bleibt. Die über die affine Geometrie hinausreichenden Teile der äquiformen Geometrie wollen wir als *Orthogonalmetrik* bezeichnen, so daß also jene Beziehung zwischen zwei Geraden und ihren Winkelhalbierenden eine orthogonalmetrische ist. Ebenso ist die *Winkelgröße* ein äquiformer und zwar orthogonalmetrischer Begriff, der *Pythagoreische Satz* ein orthogonalmetrischer.

Man könnte in Erwägung ziehen, ob nicht von der äquiformen Gruppe aus noch ein weiterer Schritt zu machen sei, indem man zu der noch engeren Untergruppe von ihr, bei der nicht nur die Gestalt, sondern auch die Größe aller Figuren erhalten bleibt, überginge. Allein die dabei resultierende „Kongruenz-Geometrie" würde zu der äquiformen Geometrie nur noch Beziehungen, Begriffe usw. hinzufügen, die sich auf die *absolute Größe* der Figuren beziehen. Diesen aber können wir kein eigentlich *geometrisches*, sondern nur noch ein *geodätisches* Interesse zusprechen. Wir bleiben deshalb bei der äquiformen Geometrie stehen und umfassen mit ihr den Gesamtbereich der Euklidischen Geometrie, die sich entsprechend den drei immer *enger* werdenden Transformationsgruppen in den drei immer *weiter* werdenden Abstufungen der projektiven — affinen — äquiformen Geometrie aufbaut.

§ 10. Parallel- und Orthogonalmetrik als spezialisierte projektive Geometrie.

Während nach dem Vorhergehenden die projektive Geometrie ein *Teil* der affinen und äquiformen, die affine ein *Teil* der äquiformen Geometrie ist, lassen sich andererseits Parallel- und Orthogonalmetrik als projektive Geometrie darstellen, wenn deren Be-

ziehungen, Begriffe, Sätze unter Auszeichnung gewisser Elemente und Gebilde *spezialisiert* werden.

Dies ist für die *Parallelmetrik* leicht darzutun. Die bei ihr allein neu hinzutretende elementare Beziehung der Parallelität zweier Elemente kann als *Inzidenz* (also *projektive* Beziehung) des ihnen gemeinsamen dritten Elementes *mit der uneigentlichen Ebene* aufgefaßt werden. Wir können daher alle parallelmetrischen Beziehungen, Begriffe, Sätze als *projektive* auffassen, bei denen nur die uneigentlichen Elemente nicht mehr gleichberechtigt mit den eigentlichen wie vorher benutzt, sondern *ausgezeichnet* werden. Die Parallelmetrik ist also in der Tat eine *durch Auszeichnung der uneigentlichen Elemente spezialisierte projektive Geometrie.*

Um das Entsprechende für die *Orthogonalmetrik*, die durch Hinzutreten der elementaren Beziehung der Orthogonalität entstand, zu erläutern, müssen wir etwas weiter ausholen. Die Richtung einer Geraden und aller ihrer Parallelen im Raum kann durch den gemeinsamen uneigentlichen Punkt aller dieser Geraden repräsentiert werden. Ebenso die Stellung einer Ebene und aller ihr paralleler Ebenen durch die ihnen allen gemeinsame uneigentliche Gerade. Sind jene Geraden orthogonal zu diesen Ebenen, so werden wir auch die beiden uneigentlichen Elemente — Punkt und Gerade — orthogonal nennen. Durch die Orthogonalität findet also in der uneigentlichen Ebene eine Paarung aller Punkte und Geraden statt, so daß jedem Punkt eine bestimmte Gerade und dieser wieder jener Punkt zugeordnet ist: *die orthogonale Paarung in der uneigentlichen Ebene.* Dabei entspricht stets einer Geraden und einem Punkt, die miteinander inzidieren, ein Punkt und eine Gerade, die wiederum miteinander inzidieren; dagegen inzidiert niemals ein reeller Punkt mit seiner orthogonalen Geraden. Wir werden zwei Gerade orthogonal nennen, wenn die eine durch den zu der anderen orthogonalen Punkt hindurchgeht, und wir werden zwei Punkte orthogonal nennen, wenn der eine auf der zu dem anderen orthogonalen Geraden liegt. Ist eine Gerade orthogonal zu zwei anderen, so ist sie auch orthogonal zu deren Schnittpunkte, ist ein Punkt orthogonal zu zwei anderen Punkten, so ist er auch orthogonal zu deren Verbindungsgeraden. Eine Paarung aller Punkte und Geraden einer Ebene von der beschriebenen Art wird in den Grundlagen der projektiven Geometrie (Kap. VI) als *Polarität* wieder auftreten.

Andererseits ist aber die Festlegung der Orthogonalität auch möglich, indem man jeder durch einen *bestimmten* Punkt A gehenden Geraden die zu ihr orthogonalen Ebenen zuweist. Diese Ebenen

sind zueinander parallel und lassen sich gewinnen als *Polarebenen* der einzelnen Punkte auf der Geraden bezüglich einer beliebigen Kugel mit dem Mittelpunkte A. Die Polarebene eines Punktes P ist hierbei der Ort der Punkte P', die von P durch die Schnittpunkte der Verbindungslinie PP' mit der Kugel harmonisch getrennt werden. Fällt P auf die Kugel, so ist seine Polarebene die Tangentialebene der Kugel in P.

Hätte nun die Kugel mit der uneigentlichen Ebene Punkte gemein, so würde jeder dieser uneigentlichen Punkte auf der ihm bei der orthogonalen Paarung entsprechenden, uneigentlichen Geraden liegen, und zwar müßte diese Gerade die Tangente des uneigentlichen Kugelkreises in dem betr. Punkte sein. Dieser uneigentliche, imaginäre Kugelkreis bildet dann, wie man sagt, die Ordnungskurve der orthogonalen Paarung. Man findet (wenn man so spricht, als ob die in Betracht kommenden Gebilde reell wären) die zu einem Punkte orthogonale Gerade, indem man aus dem Punkte die Tangenten an die Ordnungskurve legt und die Berührungspunkte dieser Tangenten verbindet. Denn die Verbindungslinie ist zu den beiden Tangenten orthogonal, weil sie durch den ihnen zugeordneten Punkt (den Berührungspunkt) hindurchgeht, und damit auch zu dem Schnittpunkte der beiden Tangenten. So können wir die Orthogonalität als eine projektive Beziehung in bezug auf den imaginären Kugelkreis auffassen, und damit erscheint dann in der Tat die gesamte *Orthogonalmetrik* als *durch Auszeichnung des imaginären Kugelkreises spezialisierte projektive Geometrie.* In dieser Form hat sie Chasles in äußerst fruchtbringender Weise benutzt.

Wir haben auf Grund der letzten Betrachtungen zur Einordnung von irgendwelchen geometrischen Beziehungen, Begriffen, Sätzen in die projektive Geometrie, Parallelmetrik oder Orthogonalmetrik nur zu prüfen, ob sie keinerlei Auszeichnung uneigentlicher Elemente erfordern, oder ob sie zwar die uneigentliche Ebene auszeichnen, aber noch nicht den Kugelkreis in ihr, oder ob auch letzteres der Fall ist.

Dies möge noch an dem Beispiel der Theorie der ebenen Kegelschnitte näher erörtert werden, so wie sie im zweiten Abschnitt ihre Erledigung finden wird. Die *projektive* Geometrie kennt nur eine einzige Gattung nicht entarteter reeller Kegelschnitte. Sie handelt von deren Tangenten, von Pol und Polare, konjugierten Geraden und Punkten in bezug auf den Kegelschnitt usw. Die *Parallelmetrik* erst unterscheidet Ellipse, Hyperbel, Parabel, je nachdem der Kegelschnitt mit der uneigentlichen

Geraden seiner Ebene zwei imaginäre, reelle oder zusammenfallende Punkte gemein hat. Sie führt den Mittelpunkt als Pol der uneigentlichen Geraden, die Durchmesser als Polaren der uneigentlichen Punkte und die Asymptoten als die Tangenten in den uneigentlichen Punkten des Kegelschnittes ein. Aber erst die *Orthogonalmetrik* kennt den Kreis als eine Ellipse, die durch die beiden in ihrer Ebene liegenden unendlich fernen Kreispunkte geht (vgl. Poncelet, *Traité des propriétés proj.*, 1822, p. 48), und die gleichseitige Hyperbel als eine solche, deren uneigentliche Punkte jene beiden Kreispunkte harmonisch trennen. Ihr erst gehören die Hauptachsen an als orthogonale konjugierte Durchmesser und die Brennpunkte als Träger von orthogonalen Involutionen konjugierter Strahlen.

Wir möchten diese dreifach abgestufte äquiforme Geometrie mit einem Gemälde vergleichen, dessen Zeichnung durch die projektive Geometrie geliefert wird und dessen Färbung sich aus zwei Grundfarben zusammensetzt; die eine, die Parallelmetrik, wird beim Aufsteigen zur affinen, die andere, die Orthogonalmetrik, bei dem weiteren Aufsteigen zur äquiformen Geometrie aufgetragen.

Als grundlegend für die hier skizzierte Darstellung der Geometrie ist zu nennen: Cayley, *A sixth memoir on quantics, Philos. Trans.* **149** (1859), 61—90; *Coll. Math. Papers* **2** (1889), 561 ff. Für die Aus- und Weiterbildung der gruppentheoretischen Gliederung der Geometrie sind anzuführen: F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen 1872; abgedruckt in *Math. Ann.* **43** (1893), 63 ff. E. Study, *Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, Leipz. Ber.* 1896, 649 ff., *Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1901, II. Abschnitt. L. Heffter, *Über das Lehrgebäude der Geometrie usw., Math. Ver.* **12** (1903), 490 ff., *Über Anordnung und Aufbau der Geometrie, Wüllnerfestschrift*, Leipzig 1905, 77 ff. K. Th. Vahlen, *Abstrakte Geometrie*, Leipzig 1905.

Eine elementare und ausführliche Darstellung in dem hier entwickelten Sinn gibt: L. Heffter und C. Koehler, *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Erster Band, Leipzig 1905.

Kapitel IV.

Grundlagen der analytischen Geometrie.

Von *G. Guareschi* in Pavia.

§ 1. Koordinaten der Punkte einer Ebene. Richtungskosinus.

1. Um einen Punkt in einer Ebene festzulegen, bedient man sich der *Koordinaten*. Hierunter versteht man zwei Zahlen x, y, die aus den Abständen p, q des Punktes von zwei festgegebenen, sich schneidenden Geraden, den *Koordinatenachsen*, durch Multiplikation mit irgendwelchen konstanten Zahlen a, b hervorgehen, so daß

$$x = ap, \quad y = bq$$

anzusetzen ist. Diese Koordinaten heißen im Gegensatze zu den später auftretenden *inhomogene cartesische Punktkoordinaten*.

Es wird bei ihnen vorausgesetzt, daß der Abstand von einer Geraden nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechnet wird. Die ganze Ebene wird durch die beiden Koordinatenachsen in vier Felder zerlegt, die sich durch die verschiedenen Vorzeichen-Kombinationen der Koordinaten charakterisieren lassen.

Zieht man durch den angenommenen Punkt Parallelen zu den Achsen, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Seitenlängen

$$\xi = \frac{p}{\sin(xy)}, \quad \eta = \frac{q}{\sin(xy)}$$

sind, wenn (xy) den Winkel, den die Achsen bilden, bezeichnet. Die Koordinaten x, y lassen sich sonach auch aus den Stücken ξ, η, die durch die Parallelen auf den Achsen abgeschnitten werden, herleiten, indem man

$$x = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad y = \frac{\eta}{\eta_0}$$

annimmt, also die Größe der Abschnitte durch das Verhältnis ihrer nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechneten Länge zu gewissen Einheitsstrecken, nämlich

$$\xi_0 = \frac{1}{a \sin(xy)}, \quad \eta_0 = \frac{1}{b \sin(xy)},$$

festlegt. Man nennt x-Achse die Koordinatenachse, welche so die x-Koordinate liefert, und y-Achse die andere Achse. Gewöhnlich nimmt man $\xi_0 = \eta_0 = 1$ an und spricht dann von einfachen *Parallelkoordinaten*. Ist $(xy) = \frac{\pi}{2}$, so nennt man die Koordinaten *rechtwinklig*. Dann läßt sich die eine Koordinate y deuten als die Länge des Lotes, das man auf die x-Achse fällt, und die andere Koordinate x als der Abschnitt, den dieses Lot auf der x-Achse bildet. In diesem Sinn heißt y die *Ordinate*, x die *Abszisse* des betr. Punktes. Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen heißt der *Koordinaten-Ursprung* oder *Mittelpunkt* und wird gewöhnlich mit O bezeichnet. Für ihn verschwinden beide Koordinaten, für die Punkte der Koordinatenachsen dagegen verschwindet je eine der Koordinaten. Ein Punkt P, der die Koordinaten x, y hat, werde durch das Symbol $P(x, y)$ bezeichnet.

Wenn zwei Punkte $P'(x', y')$, $P''(x'', y'')$ gegeben sind und eine reelle Zahl μ, so existiert auf der Geraden $P'P''$ ein und nur ein Punkt P, für den

$$\frac{P'P}{PP''} = \mu$$

wird, wobei die Abstände als orientierte Strecken, also mit einem bestimmten Vorzeichen behaftet, gedacht sind. Dieser Punkt P hat die Koordinaten

$$x = \frac{x' + \mu x''}{1 + \mu}, \quad y = \frac{y' + \mu y''}{1 + \mu}.$$

Der Abstand s der Punkte P', P'' wird in Parallelkoordinaten durch die Formel ausgedrückt:

$$s^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos(xy),$$

und in rechtwinkligen Koordinaten:

$$s^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

2. Bei der analytischen Festlegung der Winkel sind die geraden Linien mit einem bestimmten Richtungssinn behaftet, als *orientierte Geraden*, zu nehmen, sie fallen dann nur zusammen,

wenn nicht bloß ihre Lage, sondern auch ihr Richtungssinn derselbe ist. Die Koordinatenachsen selbst sind solche orientierte Geraden, wenn man ihnen den Richtungssinn zuweist, der von negativen zu positiven Werten der zugehörigen Koordinate fortschreitet. Ferner ist ein bestimmter Drehungssinn als positiver anzunehmen. Für diesen wählt man gewöhnlich den, der die x-Achse in die y-Achse auf dem kürzesten Wege überführt. Der Winkel zweier orientierter Geraden r, s wird dann durch die Rotation bestimmt, welche die erste in die zweite überführt. Der Winkel ist positiv oder negativ, je nachdem die Rotation positiven oder negativen Sinn hat.

Eine Strecke AB auf einer orientierten Geraden wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem der Richtungssinn, der von A nach B weist, mit dem Richtungssinn der Geraden übereinstimmt oder nicht. Wird eine Strecke AB von einer orientierten Geraden r auf eine orientierte Gerade r' orthogonal projiziert, so wird die Projektion

$$A'B' = AB \cdot \cos(rr').$$

Projiziert man die im Sinn eines bestimmten Umlaufs genommenen Seiten eines Dreiecks (oder irgendeines Polygons) auf eine Gerade, so verschwindet die (algebraische) Summe der Projektionen. Daraus kann man ableiten, daß für die Kosinus der Winkel, welche drei orientierte Geraden r, s, t mit drei anderen r', s', t' bilden, die allgemeine Identität besteht:

$$\begin{vmatrix} \cos(rr') & \cos(sr') & \cos(tr') \\ \cos(rs') & \cos(ss') & \cos(ts') \\ \cos(rt') & \cos(st') & \cos(tt') \end{vmatrix} = 0.$$

Läßt man insbesondere r', s', t' mit r, s, t zusammenfallen und nimmt die beiden letzten Geraden als x- und y-Achse, so ergibt sich zwischen den „Richtungskosinus“ $\cos(xr)$, $\cos(yr)$ einer orientierten Geraden die Beziehung:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(xr) & \cos(yr) \\ \cos(rx) & 1 & \cos(yx) \\ \cos(ry) & \cos(xy) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

die sich bei rechtwinkligen Achsen ($\cos(xy) = 0$) zur folgenden vereinfacht:

$$\cos(xr)^2 + \cos(yr)^2 = 1.$$

Läßt man in der Grundformel s', t' und s, t mit den Achsen x, y zusammenfallen, so erhält man den Kosinus des Winkels zweier Geraden r, r' ausgedrückt durch deren Richtungskosinus in folgender Weise:

$$\cos(rr') = -\frac{1}{\sin(xy)^2}\begin{vmatrix} 0 & \cos(xr') & \cos(yr') \\ \cos(rx) & 1 & \cos(yx) \\ \cos(ry) & \cos(xy) & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Formel geht bei rechtwinkligen Achsen über in:

$$\cos(rr') = \cos(xr)\cos(xr') + \cos(yr)\cos(yr').$$

§ 2. Gerade Linien in einer Ebene. Koordinatentransformation. Polarkoordinaten.

3. Der Inhalt des Dreiecks, das drei Punkte $P(x,y)$, $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ bilden, ist der folgende:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\sin(xy)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Das Vorzeichen ist $+$ oder $-$, je nachdem die Reihenfolge PP_1P_2 der Ecken eine Umkreisung des Dreiecksinnern in positivem oder negativem Drehungssinn bedeutet. Wenn die drei Punkte in gerader Linie liegen, verschwindet die vorstehende Determinante, d. h. es wird

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Diese Gleichung ist von der Form:

$$ax + by + c = 0.$$

Einer solchen Gleichung genügen also, wenn wir P_1, P_2 festhalten und P als veränderlich ansehen, die Koordinaten der Punkte einer geraden Linie: *durch die lineare Gleichung wird die gerade Linie dargestellt.* a, b, c sind dabei Konstante, auf deren Verhältnisse es allein ankommt.

Eine Gerade, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht, hat eine Gleichung von der Form:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

Die Gleichungen

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0$$

stellen zwei parallele Gerade dar, wenn

$$ab' - ba' = 0$$

ist.

Das Verhältnis

$$-\frac{a}{b} = \frac{\sin(xr)}{\sin(ry)}$$

heißt das *Richtungsverhältnis* der Geraden

$$r) \qquad ax + by + c = 0.$$

Sind die Achsen rechtwinklig, so wird das Richtungsverhältnis $= \operatorname{tang}(xr)$ und die Gleichung der Geraden kann in die Form gebracht werden:

$$y = y_0 + x \operatorname{tang}(xr),$$

wobei $y_0 = -c/b$ den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse festlegt.

Die Gerade r geht dann und nur dann durch den Koordinatenursprung O, wenn $c = 0$ ist. Ist $c \neq 0$, so fälle man das Lot OP auf r, dann wird dessen Länge

$$p = \frac{c \sin(xy)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(xy)}},$$

wo das Wurzelvorzeichen so zu nehmen ist, daß p positiv ausfällt. Die Richtung OP hat unter dieser Voraussetzung die Richtungskosinus:

$$\cos(xp) = \frac{-a \sin(xy)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(xy)}},$$

$$\cos(yp) = \frac{-b \sin(xy)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(xy)}}.$$

Schreibt man dann die Gleichung der Geraden r:

$$-\frac{(ax + by + c)\sin(xy)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(xy)}} = 0,$$

so geht sie über in die Form:

$$x\cos(xp) + y\cos(yp) - p = 0,$$

die als die *Normalform* der Liniengleichung bezeichnet wird.

Wenn $R(X, Y)$ ein Punkt der Ebene ist, so wird sein Abstand von der Geraden

$$q = \overline{Rr} = -(X\cos(xp) + Y\cos(yp) - p),$$

wenn er nach der dem Koordinatenursprung zugewandten Seite hin positiv und nach der entgegengesetzten Seite negativ gerechnet wird.

Ist die Gerade orientiert, so ist auf dem Lote aus dem Koordinatenursprung *der* Sinn als positiv anzunehmen, der mit dem Sinn der Geraden den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ einschließt, und in diesem Falle ist das Wurzelvorzeichen so zu wählen, daß p die Strecke OP auch dem Sinn nach angibt. Dann ist in der vorstehenden Formel q positiv oder negativ, je nachdem es mit dem Sinn des Lotes übereinstimmt oder nicht.

Bei dieser Festlegung der Wurzelvorzeichen wird der Kosinus des Winkels zwischen zwei orientierten Geraden

$$r) \qquad ax + by + c = 0,$$
$$r') \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

gegeben durch die Formel:

$$\cos(rr') = \frac{aa' + bb' - (ab' + ba')\cos(xy)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(xy)} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos(xy)}}.$$

Die Bedingung dafür, daß die beiden Geraden aufeinander senkrecht stehen, wird demnach

$$aa' + bb' - (ab' + ba')\cos(xy) = 0$$

und in rechtwinkligen Koordinaten

$$aa' + bb' = 0.$$

Die Gleichung der Geraden durch den Punkt (x', y'), die auf der Geraden $ax + by + c = 0$ senkrecht steht, lautet:

$$\frac{x - x'}{a - b\cos(xy)} = \frac{y - y'}{b - a\cos(xy)}.$$

Weiter ist allgemein

$$\sin(rr') = \frac{(ab' - ba') \cdot \sin(xy)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(xy)} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos(xy)}}.$$

Ist $ab' - ba' \neq 0$, so hat der Schnittpunkt der Geraden r, r' die Koordinaten

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3},$$

wenn

$$x_1 : x_2 : x_3 = bc' - cb' : ca' - ac' : ab' - ba'$$

gemacht wird. Die nur bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegten *drei* Zahlen x_1, x_2, x_3 heißen die *homogenen cartesischen Koordinaten* des Punktes. Sie bleiben bestimmt, wenn die Geraden r, r' parallel sind, nur daß dann $x_3 = 0$ wird. Legt man die Punkte durch homogene Koordinaten fest, so kann man deshalb von *„uneigentlichen"* Punkten reden, die durch zwei parallele Gerade oder ein Büschel von solchen bestimmt werden. Die Gleichung der Geraden

$$r) \qquad ax + by + c = 0$$

in homogenen Koordinaten lautet

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Die drei Koeffizienten a, b, c, die durch die Gerade auch nur bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegt werden, heißen die *homogenen cartesischen Koordinaten* der geraden Linie. Die Zahlen

$$u = \frac{a}{c}, \qquad v = \frac{b}{c},$$

die durch die Gerade vollständig bestimmt sind, heißen dagegen ihre *inhomogenen* oder *Plückerschen Koordinaten*. Es ist

$$u = -\frac{1}{OA}, \qquad v = -\frac{1}{OB},$$

wenn A, B die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenachsen bedeuten. Für diese Koordinaten ist der Koordinatenursprung O ein singulärer Punkt, indem mindestens eine von ihnen unendlich wird, wenn die Gerade durch O hindurchgeht.

Sind drei Gerade

$$\begin{aligned} r) \qquad & ax + by + c = 0, \\ r') \qquad & a'x + b'y + c' = 0, \\ r'') \qquad & a''x + b''y + c'' = 0 \end{aligned}$$

gegeben, so wird der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \frac{(abc)^2}{(ab' - ba')(a'b'' - b'a'')(a''b - b''a)} \sin(xy),$$

wobei zur Abkürzung

$$(abc) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

gesetzt ist.

$$(abc) = 0$$

ist die Bedingung dafür, daß die drei Geraden durch einen Punkt gehen oder parallel sind. Damit das letztere der Fall ist, müssen die drei Gleichungen

$$ab' - ba' = 0, \quad a'b'' - b'a'' = 0, \quad a''b - b''a = 0$$

erfüllt sein.

4. Wenn die Punkte der Ebene auf zwei verschiedene Koordinatensysteme bezogen sind, von denen das eine den Ursprung O, die Achsen x und y, das andere den Ursprung O' und die Achsen X und Y hat, so nenne man x_0, y_0 die Koordinaten von O' im ersten Koordinatensystem, dann bestehen zwischen den Koordinaten (x, y) und (X, Y) desselben Punktes P in den beiden Systemen die folgenden Gleichungen:

$$x = x_0 + X\frac{\sin(Xy)}{\sin(xy)} + Y\frac{\sin(Yy)}{\sin(xy)},$$

$$y = y_0 + X\frac{\sin(Xx)}{\sin(yx)} + Y\frac{\sin(Yx)}{\sin(yx)}.$$

(Formeln für die Transformation der Koordinaten.)

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt die charakteristische Identität:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos(xy) \equiv X^2 + Y^2 + 2XY\cos(XY).$$

Sind die beiden Koordinatensysteme rechtwinklig und

$$\sphericalangle(xy) = \sphericalangle(XY) = +\frac{\pi}{2},$$

so werden, wenn der Winkel $(xX) = \alpha$ genommen wird, die Transformationsgleichungen:

$$x = x_0 + X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$

$$y = y_0 + X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

und es ist

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = X^2 + Y^2.$$

Die Substitution ist eine *„orthogonale"*.

Wird in der Ebene ein Punkt O, der *Pol*, und eine orientierte Gerade x, die durch O hindurchgeht, die *Polarachse*, festgelegt, so ist ein Punkt P der Ebene bestimmt durch die Entfernung $OP = \varrho$, den *Radiusvektor*, und den Winkel φ, den die

in dem Sinn von O nach P gekommene Gerade OP mit der Geraden x bildet, die sog. *Anomalie* oder *Winkelabszisse*. Die Größen ϱ und φ heißen dann die *Polarkoordinaten* des Punktes P.

Nimmt man außer der x-Achse noch durch O eine y-Achse im Winkel $(xy) = \gamma$ gegen die x-Achse an, so werden die so bestimmten Parallelkoordinaten (x, y) des Punktes P ausgedrückt durch seine Polarkoordinaten:

$$x = \varrho \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \gamma}, \quad y = \varrho \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma},$$

und es ist

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma}.$$

Ist insbesondere $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

§ 3. Koordinaten der Punkte im Raum.

5. Um *Koordinaten im Raume* einzuführen, zieht man durch einen Punkt O, den *Ursprung*, drei Gerade, die *Koordinatenachsen*, die man mit x, y, z bezeichnet und die nicht in einer Ebene liegen dürfen. Sie bestimmen zu je zweien drei Ebenen, die *Koordinatenebenen*. Auf jeder der *Achsen* wird nach Willkür ein *positiver Richtungssinn* festgelegt und daraus in jeder der *Koordinatenebenen* ein *positiver Drehungssinn* hergeleitet. Nun legt man durch irgendeinen Punkt P des Raumes die Parallelebenen zu den Koordinatenebenen, welche die Achsen x, y, z in drei Punkten X, Y, Z schneiden mögen. Dann heißen *cartesische Koordinaten* von P drei Zahlen x, y, z, welche die drei Strecken OX, OY, OZ der Größe und dem Sinn nach bestimmen. Umgekehrt läßt sich zu irgend drei Zahlen x, y, z ein Punkt finden, welcher sie zu Koordinaten hat. Statt unmittelbar die Längen der Strecken OX, OY, OZ zu nehmen, kann man auch ihr Verhältnis zu einer auf jeder der Achsen beliebig angenommenen „Einheitsstrecke“ angeben.

Wenn die Koordinatenachsen aufeinander senkrecht stehen, heißen die Koordinaten *rechtwinklig*.

Wenn zwei Punkte $P'(x', y', z')$ und $P''(x'', y'', z'')$ gegeben sind und außerdem eine reelle Zahl μ, so existiert auf der Geraden $P'P''$ ein und nur ein Punkt P, für welchen

$$\frac{P'P}{PP''} = \mu$$

wird, und zwar sind die Koordinaten dieses Punktes

$$x = \frac{x' + \mu x''}{1 + \mu}, \quad y = \frac{y' + \mu y''}{1 + \mu}, \quad z = \frac{z' + \mu z''}{1 + \mu}.$$

Das Koordinatensystem kann durch die drei Winkel (yz), (zx), (xy) charakterisiert werden, welche seine Achsen miteinander bilden. Es ist dann das Quadrat des Sinus der körperlichen Ecke, welche die drei Achsen bilden (d. h. das Quadrat des sechsfachen Volumens desjenigen Tetraëders, welches drei Strecken OE_1, OE_2, OE_3 von der Länge 1 auf den positiven Koordinatenachsen als drei Kanten bestimmen), gegeben durch den Ausdruck

$$\sin(xyz)^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich, wenn $(yz) + (zx) + (xy) = 2\sigma$ gesetzt wird, in die Form bringen

$$\sin(xyz)^2 = 4 \sin\sigma \cdot \sin[\sigma - (yz)] \cdot \sin[\sigma - (zx)] \cdot \sin[\sigma - (xy)].$$

Für den Sinus selbst findet man, wenn x', y', z' die Normalen auf den Koordinatenebenen bezeichnen,

$$\sin(xyz) = \sin(yz)\cos(xx') = \sin(zx)\cos(yy') = \sin(xy)\cos(zz').$$

6. Bezeichnen r, s, t, u vier orientierte Gerade und r', s', t', u' irgend vier weitere, so gilt die allgemeine Identität:

$$\begin{vmatrix} \cos(rr') & \cos(sr') & \cos(tr') & \cos(ur') \\ \cos(rs') & \cos(ss') & \cos(ts') & \cos(us') \\ \cos(rt') & \cos(st') & \cos(tt') & \cos(ut') \\ \cos(ru') & \cos(su') & \cos(tu') & \cos(uu') \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus kann man für die *Richtungskosinus* einer orientierten Geraden r die Identität ableiten:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(rx) & \cos(ry) & \cos(rz) \\ \cos(xr) & 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(yr) & \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(zr) & \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sin(yz)\cos(xr) = \alpha, \quad \sin(zx)\cos(yr) = \beta, \quad \sin(xy)\cos(zr) = \gamma,$$

so kann man diese Identität in folgender Form schreiben:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\cos(x)\beta\gamma + 2\cos(y)\gamma\alpha + 2\cos(z)\alpha\beta = \sin(xyz)^2.$$

Dabei bedeuten (x), (y), (z) die Winkel, welche die Koordinatenebenen miteinander bilden.

Ferner findet man für den Kosinus des Winkels zwischen zwei Geraden r, r':

$$\cos(rr') = -\frac{1}{\sin(xyz)^2}\begin{vmatrix} 0 & \cos(rx) & \cos(ry) & \cos(rz) \\ \cos(xr') & 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(yr') & \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(zr') & \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix}.$$

Wird eine orientierte Gerade gegeben durch einen Punkt $P'(x', y', z')$, durch den sie hindurchgehen soll, und die Winkel λ, μ, ν, die sie mit den Koordinatenachsen einschließt, so findet man für die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf ihr die Parameterdarstellung

$$x = x' + \sigma \cdot l, \quad y = y' + \sigma \cdot m, \quad z = z' + \sigma \cdot n,$$

wobei

$$\sigma = \frac{1}{\sin(xyz)^2} \cdot P'P,$$

und l, m, n die folgenden Determinanten bezeichnen:

$$l = \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos\mu & 1 & \cos(yz) \\ \cos\nu & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos(xz) \\ \cos(yx) & \cos\mu & \cos(yz) \\ \cos(zx) & \cos\nu & 1 \end{vmatrix},$$

$$n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos\lambda \\ \cos(yx) & 1 & \cos\mu \\ \cos(zx) & \cos(zy) & \cos\nu \end{vmatrix}.$$

Das Volumen des Tetraeders, von dem vier Punkte

$$P(x, y, z), \quad P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2), \quad P_3(x_3, y_3, z_3)$$

die Ecken bilden, ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$S = -\tfrac{1}{6}\sin(xyz)\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Das Vorzeichen von S ist $+$ oder $-$, je nachdem der Übergang von P zu P_1 eine positive oder negative Umkreisung der Richtung, die von P_2 nach P_3 weist, bedeutet.

In rechtwinkligen Koordinaten vereinfachen sich alle Formeln. Der Abstand zweier Punkte $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ wird in ihnen:

$$PP' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Zwischen den Richtungskosinus $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ einer orientierten Geraden r besteht die identische Beziehung:

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1.$$

Sind $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ die Richtungskosinus einer zweiten Geraden r', so wird:

$$\cos(rr') = \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu'.$$

Die Punkte $P(x, y, z)$ einer orientierten Geraden r, die durch einen Punkt $P'(x', y', z')$ geht und mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν bildet, sind von der Form

$$x = x' + s\cos\lambda, \quad y = y' + s\cos\mu, \quad z = z' + s\cos\nu,$$

wobei s die Strecke $P'P$ angibt.

Schreibt man die vorstehenden Gleichungen, für

$$l : m : n = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu,$$

in der Form:

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n}$$

und fügt ihnen die analogen Gleichungen für eine zweite orientierte Gerade r' hinzu:

$$\frac{x-x''}{l'} = \frac{y-y''}{m'} = \frac{z-z''}{n'},$$

so wird für den Winkel zwischen den beiden Geraden:

$$\cos(rr') = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

Die Geraden sind parallel, wenn

$$l : m : n = l' : m' : n',$$

sie kreuzen oder schneiden einander rechtwinklig, wenn

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

§ 4. Ebenen- und Linienkoordinaten.

7. Wenn vier Punkte $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ mit ihren rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten gegeben sind, so wird die Bedingung, daß sie in einer Ebene liegen:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir die Punkte P_1, P_2, P_3 festhalten und annehmen, daß sie *nicht* in einer geraden Linie liegen, so wird die vorstehende Gleichung eine lineare Gleichung von der Form

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Umgekehrt liegen die Punkte, deren Koordinaten irgendeiner solchen Gleichung genügen, immer in einer Ebene, *jede lineare Gleichung in x, y, z stellt eine Ebene dar.* Die Ebene ist bestimmt, wenn von den Koeffizienten a, b, c, d die Verhältnisse bekannt sind. Diese Koeffizienten heißen *homogene cartesische Ebenenkoordinaten,* und als *inhomogene oder Plückersche Ebenenkoordinaten* werden die Verhältnisse

$$u = \frac{a}{d}, \quad v = \frac{b}{d}, \quad w = \frac{c}{d}$$

eingeführt. Schneidet die Ebene die Koordinatenachsen in A, B, C, so wird

$$u = -\frac{1}{OA}, \quad v = -\frac{1}{OB}, \quad w = -\frac{1}{OC}.$$

Der Koordinatenursprung O ist ein singulärer Punkt für diese Koordinaten. Geht die Ebene durch ihn hindurch, so wird $d = 0$ und wenigstens eine der Koordinaten unendlich. Ist $u = 0$, so ist die Ebene der x-Achse parallel, sind $v = 0$, $w = 0$, so ist sie zur yz-Ebene parallel usw. Die homogenen Ebenenkoordinaten a, b, c, d sind, wenn die Ebene durch die drei Punkte P_1, P_2, P_3 bestimmt ist, den Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{Vmatrix}$$

proportional. Wenn die drei Punkte P_1, P_2, P_3 in einer Geraden liegen, verschwinden die sämtlichen Determinanten dieser Matrix; dann ist durch die Punkte nicht eine Ebene, sondern ein ganzes Büschel von Ebenen bestimmt.

8. Die Verbindungslinie zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ wird durch die Doppelgleichung dargestellt:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Macht man

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1,$$

so kann man diese Doppelgleichung in die drei Gleichungen auflösen:

$$\begin{aligned} p - ny + mz &= 0, \\ q - lz + nx &= 0, \\ r - mx + ly &= 0, \end{aligned}$$

aus denen auch

$$px + qy + rz = 0$$

folgt. Hierbei ist gesetzt:

$$\begin{aligned} p &= ny_1 - mz_1 = y_1 z_2 - z_1 y_2, \\ q &= lz_1 - nx_1 = z_1 x_2 - x_1 z_2, \\ r &= mx_1 - ly_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2. \end{aligned}$$

Die sechs Zahlen l, m, n, p, q, r heißen die (homogenen) *Koordinaten der geraden Linie.* Es kommt bei der Festlegung der Geraden lediglich auf ihre Verhältnisse an, und zwischen ihnen besteht die identische Beziehung

$$lp + mq + nr = 0.$$

Setzen wir rechtwinklige Koordinaten voraus, so sind l, m, n die Projektionen der Strecke P_1P_2 auf die Koordinatenachsen und p, q, r die Projektionen der doppelten Fläche des Dreiecks OP_1P_2 auf die Koordinatenebenen, die Strecke mit dem Richtungssinn P_1P_2 und die Fläche mit dem Drehungssinn OP_1P_2 genommen Die sechs Größen lassen sich analytisch deuten als die Determinanten der zweizeiligen Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Leiten wir aus zwei Punkten $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$, d. h. aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{Vmatrix},$$

die entsprechenden Größen l', m', n', p', q', r' her, so bedeutet der Ausdruck

$$(P_1P_2, P_3P_4) = lp' + mq' + nr' + pl' + qm' + rn'$$

das sechsfache Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$, positiv oder negativ genommen, je nachdem der Übergang von P_1 zu P_2 eine Drehung in positivem oder negativem Sinne um die Richtung P_3P_4 bedeutet. Ist

$$(P_1P_2, P_3P_4) = 0,$$

so schneiden sich die Linien P_1P_2 und P_3P_4 oder sie sind parallel. Letzteres tritt ein, wenn

$$l : m : n = l' : m' : n'$$

ist.

Legen wir durch P_1, P_2 irgend zwei Ebenen hindurch:

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$
$$\pi') \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

so läßt sich mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors ϱ setzen:

$$\varrho l = bc' - cb', \qquad \varrho p = da' - ad',$$
$$\varrho m = ca' - ac', \qquad \varrho q = db' - bd',$$
$$\varrho n = ab' - ba', \qquad \varrho r = dc' - cd'.$$

Die Linienkoordinaten lassen sich also ebensogut aus den Gleichungen zweier Ebenen, die sich in der Geraden schneiden, herleiten wie aus den Koordinaten zweier Punkte, die auf der Geraden liegen.

Damit die Ebene

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0$$

durch die Gerade (l, m, n, p, q, r) hindurchgeht, müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$ld - rb + qc = 0,$$
$$md - pc + ra = 0,$$
$$nd - qa + pb = 0,$$
$$la + mb + nc = 0,$$

von denen irgend zwei eine Folge der übrigen sind.

Die Linienkoordinaten sind eingeführt worden von Cayley (*Quarterly Journal* **3** (1860) 225, *Papers IV* 446) und Plücker (*Philos. Trans.* **155** (1865) 726, *Ges. Abh.* I 470, ausführlich in der *Neuen Geometrie des Raumes*, posthum Leipzig 1868, 69.)

§ 5. Normalform der Ebenengleichung. Winkel zwischen Ebenen.

9. Wenn man von dem Koordinatenursprung O auf eine (nicht durch ihn hindurchgehende) Ebene das Lot OP fällt, dessen Länge mit p bezeichnet und der Linie OP den Sinn gibt, der von O nach P weist, so läßt sich die Gleichung der Ebene in der *Normalform* ansetzen:

$$x\cos(xp) + y\cos(yp) + z\cos(zp) - p = 0.$$

Um die allgemeine Gleichungsform

$$ax + by + cz + d = 0$$

auf diese Normalform zu reduzieren, hat man zu setzen:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ b & \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ c & \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix} = -\Phi(a,b,c)$$

und die Gleichung dann zu multiplizieren mit

$$\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{\Phi(a,b,c)}},$$

so wird

$$\cos(xp) = \frac{a\sin(xyz)}{\sqrt{\Phi(a,b,c)}},\quad \cos(yp) = \frac{b\sin(xyz)}{\sqrt{\Phi(a,b,c)}},\quad \cos(zp) = \frac{c\sin(xyz)}{\sqrt{\Phi(a,b,c)}},$$

$$p = -\frac{d\sin(xyz)}{\sqrt{\Phi(a,b,c)}}.$$

Sieht man a, b, c, d als die Determinanten der oben (Nr. 7) gegebenen Matrix an, so ist z. B.

$$d = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Es ist dann

$$-d\sin(xyz) = 6S = 2\Delta \cdot p,$$

wenn S das Volumen des Tetraeders $OP_1P_2P_3$ und Δ der Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist. S und Δ sind positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Reihenfolge $P_1P_2P_3$ eine positive oder negative Umkreisung der vom Koordinatenursprung weg gerichteten Normale der Dreiecksfläche bedeutet. So ergibt sich

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Phi(a, b, c)},$$

indem

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird. Im Falle rechtwinkliger Koordinaten wird

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

a, b, c sind dann die senkrechten Projektionen der doppelten Dreiecksfläche auf die Koordinatenebenen.

Ist $R(X, Y, Z)$ irgendein Punkt des Raumes, so ergibt sich für seinen Abstand q von der betrachteten Ebene

$$q = -(X\cos(xp) + Y\cos(yp) + Z\cos(zp) - p).$$

Hierbei ist der Abstand q nach dem Ursprung O zu positiv, von dem Ursprung weg negativ gerechnet. Die vorige Formel kann man, wenn die Gleichung der Ebene

$$ax + by + cz + d = 0$$

ist, ersetzen durch

$$q = -\frac{aX + bY + cZ + d}{\sqrt{\Phi(a, b, c)}} \cdot \sin(xyz).$$

Für rechtwinklige Koordinaten wird sie

$$q = -\frac{aX + bY + cZ + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

10. Wenn eine Ebene durch einen Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ hindurchgeht, ist ihre Gleichung von der Form:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit zwei Ebenen

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

$$\pi') \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

parallel sind, ist

$$a : b : c = a' : b' : c';$$

damit sie senkrecht sind, muß unter der Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

sein. Allgemein ist bei rechtwinkligen Koordinaten der Winkel zwischen den Ebenen π, π' aus einer der Gleichungen zu bestimmen:

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

$$\sin(\pi, \pi') = \frac{\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Nimmt man eine dritte Ebene

$$\pi'') \qquad a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

hinzu und bezeichnet die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{Vmatrix}$$

in leicht verständlicher Symbolik wie folgt:

$$A = (dbc),\ B = (adc),\ C = (abd),\ D = (abc),$$

dann ergibt sich: 1) Ist $D \neq 0$, so sind

$$x = -\frac{A}{D}, \qquad y = -\frac{B}{D}, \qquad z = -\frac{C}{D}$$

die Koordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen. 2) Ist $D = 0$, aber *keine* der Determinanten $A, B, C = 0$, so sind die drei Ebenen derselben Geraden parallel, und die Richtungskosinus dieser Geraden sind bestimmt durch die Proportion

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = A : B : C.$$

3) Ist außer D noch eine und damit jede Determinante der Matrix $= 0$, so gehören die drei Ebenen einem *Büschel* an: sie gehen entweder durch dieselbe Gerade oder sind parallel. Das letztere ist der Fall, wenn die vier Determinanten A, B, C, D dadurch verschwinden, daß D mit allen Unterdeterminanten verschwindet.

Nehmen wir eine vierte Ebene

$$\pi''') \qquad a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0$$

hinzu, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung, damit die vier Ebenen einem *Bündel* angehören, d. h. entweder durch denselben Punkt gehen oder derselben Geraden parallel sind:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = 0.$$

Der letztere Fall tritt ein, wenn die aus den Elementen der drei ersten Spalten gebildeten Unterdeterminanten $= 0$ sind.

Sind gegeben die Gleichungen für eine Ebene

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0$$

und eine Gerade

$$r) \qquad \frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

so ist die Gerade r zur Ebene π senkrecht, wenn

$$l : m : n = a : b : c;$$

r ist parallel zu π, wenn

$$al + bm + cn = 0,$$

und liegt in π, wenn außerdem

$$ax' + by' + cz' + d = 0$$

wird.

§ 6. Koordinatentransformation. Polarkoordinaten. Projektive Ebenenbüschel und Punktreihen.

11. Werden die Punkte des Raumes auf zwei verschiedene Koordinatensysteme bezogen, von denen das eine den Ursprung O, die Achsen x, y, z, das andere den Ursprung O', die Achsen X, Y, Z hat, und nennt man x_0, y_0, z_0 die Koordinaten von O' im ersten Koordinatensystem, x', y', z' die Normalen in O zu den Ebenen yz, zx, xy, so ist die Beziehung, die zwischen den Koordinaten (x, y, z) und (X, Y, Z) desselben Punktes in den beiden Koordinatensystemen besteht, ausgedrückt in den Formeln:

$$x = x_0 + \frac{X\cos(Xx') + Y\cos(Yx') + Z\cos(Zx')}{\cos(xx')},$$

$$y = y_0 + \frac{X\cos(Xy') + Y\cos(Yy') + Z\cos(Zy')}{\cos(yy')},$$

$$z = z_0 + \frac{X\cos(Xz') + Y\cos(Yz') + Z\cos(Zz')}{\cos(zz')}.$$

Wenn beide Systeme rechtwinklig sind, so werden diese Formeln einfach:

$$x = x_0 + X\cos(Xx) + Y\cos(Yx) + Z\cos(Zx),$$
$$y = y_0 + X\cos(Xy) + Y\cos(Yy) + Z\cos(Zy),$$
$$z = z_0 + X\cos(Xz) + Y\cos(Yz) + Z\cos(Zz).$$

Setzt man hierbei

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \cos(Xx) & \cos(Yx) & \cos(Zx) \\ \cos(Xy) & \cos(Yy) & \cos(Zy) \\ \cos(Xz) & \cos(Yz) & \cos(Zz) \end{vmatrix},$$

so ergibt sich: 1) Die Quadratensumme der Elemente einer Reihe oder Spalte von $\mathfrak{D}$ ist $= 1$. 2) Die Summe der Produkte entsprechender Elemente derselben zwei Reihen oder Spalten ist $= 0$. 3) $\mathfrak{D}$ ist $= +1$ oder -1, je nachdem die Dreikante der positiven Achsenhälften in beiden Koordinatensystemen kongruent sind oder durch Spiegelung auseinander hervorgehen. 4) Jede Unterdeterminante von $\mathfrak{D}$ ist dem Element, dem sie adjungiert ist, direkt oder entgegengesetzt gleich, je nachdem $\mathfrak{D} = +1$ oder -1 ist.

12. Nimmt man im Raume einen Punkt O, den *Pol*, eine orientierte Gerade z, die *Polarachse*, die durch O geht, und eine Halbebene ω, die *Polarebene*, die durch z begrenzt wird, dann kann man jedem Punkte P zuordnen: 1) seinen Abstand ϱ von O, den *Radiusvektor*, 2) den Winkel φ zwischen der Halbebene, die z mit P verbindet, und der Halbebene ω, das *Azimut*, 3) den Winkel ϑ, den die Richtung von z mit der Strecke OP bildet, die *Zenitdistanz*. Umgekehrt ist der Punkt, wenn ϱ, φ, ϑ gegeben sind, eindeutig bestimmt. Diese Größen heißen dann die *Polarkoordinaten* des Punktes. Sind x, y, z die rechtwinkligen cartesischen Koordinaten desselben Punktes in dem System, dessen z-Achse mit der Polarachse übereinstimmt und dessen positive x-Achse in die Halbebene ω fällt, während die y-Achse zu dem Azimut $+\pi/2$ gehört, so wird

$$x = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \varrho\cos\vartheta$$

und umgekehrt

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\vartheta = \frac{z}{\varrho}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x}.$$

13. Sind $U = 0$, $V = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen

π', π'', so ist die Gleichung einer Ebene π, die durch die Schnittlinie der beiden ersten hindurchgeht oder, wenn diese Ebenen parallel sind, ihnen wieder parallel ist, von der Form

$$\varkappa U + \lambda V = 0.$$

U, V bedeuten hierbei lineare Funktionen der Punktkoordinaten. Nimmt man

$$U = x\cos(xp') + y\cos(yp') + z\cos(zp') - p',$$
$$V = x\cos(xp'') + y\cos(yp'') + z\cos(zp'') - p'',$$

also die Gleichungen der Ebenen π', π'' in der Normalform, so wird

$$\frac{\sin(\pi'\pi)}{\sin(\pi\pi'')} = \frac{\lambda}{\varkappa}.$$

Sieht man aber in der Gleichung

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

die Punktkoordinaten x, y, z als fest, dagegen die Ebenenkoordinaten u, v, w als veränderlich an, so stellt die Gleichung den Punkt (x, y, z) dar, indem sie die Bedingung dafür ausdrückt, daß die Ebene (u, v, w) durch ihn hindurchgeht. Schreibt man in diesem Sinn die Gleichung kürzer $P = 0$ und stellt ihr eine ähnliche Gleichung $Q = 0$ zur Seite, so wird durch

$$\varkappa P + \lambda Q = 0$$

ein Punkt R auf der Verbindungslinie der beiden ersten Punkte P, Q dargestellt. Dieser Punkt ist dadurch charakterisiert, daß

$$PR : RQ = \lambda : \varkappa$$

wird.

Nimmt man nun zwei Ebenenbüschel

$$\varkappa U + \lambda V = 0,\ \varkappa' U' + \lambda' V' = 0$$

oder zwei Punktreihen

$$\varkappa P + \lambda Q = 0,\quad \varkappa' P' + \lambda' Q' = 0,$$

so stellt man zwischen einem der linksstehenden und einem der rechtsstehenden Gebilde eine projektive Beziehung her, indem man

$$\frac{\lambda'}{\varkappa'} = \frac{\alpha\varkappa + \beta\lambda}{\gamma\varkappa + \delta\lambda}$$

ansetzt, oder wenn $\frac{\lambda'}{\varkappa'} = \mu'$, $\frac{\lambda}{\varkappa} = \mu$ gemacht wird:

$$\mu' = \frac{\alpha + \beta\mu}{\gamma + \delta\mu}.$$

Es ist aus diesem Ansatz, wenn μ_1, μ_1'; μ_2, μ_2'; μ_3, μ_3'; μ_4, μ_4' vier Paare entsprechender Parameter sind, sofort herzuleiten, daß

$$\frac{\mu_3' - \mu_1'}{\mu_3' - \mu_2'} : \frac{\mu_4' - \mu_1'}{\mu_4' - \mu_2'} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_2} : \frac{\mu_4 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_2}$$

wird, worin die Gleichheit der Doppelverhältnisse zweier entsprechender Quadrupel von Elementen in den beiden projektiv aufeinander bezogenen Grundgebilden ausgesprochen ist. Die entsprechenden Betrachtungen für die Ebene sind aus dem Vorstehenden unmittelbar abzuleiten, indem man eine Variable weniger nimmt und so die Punktreihen und Strahlenbüschel einer Ebene erhält.

14. *Historische und bibliographische Notizen.* Der Gedanke, welcher der Anwendung der Koordinaten zugrunde liegt, ist sehr alt. Beziehungen zwischen den Koordinaten der Punkte einer Kurve stellten bereits die Griechen auf (vgl. Zeuthen, *Die Kegelschnitte im Altertum*). Die Begriffe Abszisse und Ordinate finden sich schon im 14. Jahrhundert bei Nicole d'Oresme, der darauf seine Theorie der latitudines formarum gründete. Diese Theorie erfuhr nach dem Emporkommen der Algebra eine systematische Weiterbildung im 17. Jahrhundert. Vieta (1540 bis 1603) bestimmte die Punkte einer Geraden durch ihre Abszisse (*Opera mathematica* ed. Schooten 1646), Galilei (1564 bis 1642) benutzte das rechtwinklige Achsenkreuz zur Festlegung der Punkte im Raume (*Dialoghi sopra i due massimi sistemi* 1632), Cavalieri (1598—1647) gründete auf den Koordinatenbegriff seine Geometrie der Indivisibeln (1635) und Descartes (1596—1650) führte die Koordinaten als systematisches Hilfsmittel zur analytischen Auflösung geometrischer Aufgaben ein (*Géométrie*, 1637). Um die Verbreitung und Ausgestaltung der analytischen Geometrie haben sich nach Fermat, de Witt u. a. verdient gemacht in England Newton (*Geometria analytica* etc., *Opera* ed. Horsley, Vol. 1), in Deutschland Euler (*Introductio in analysin infinitorum*, Vol. 2, 1748), und weiterhin Mac Laurin, Clairaut, Cramer, Lambert, Lagrange, Monge, Gergonne, Lamé, Bobillier, Moebius, Plücker, Jacobi, Hesse, Cayley, Clebsch, Cremona u. a. m. Vgl. Cantor, *Gesch. d. Math.*, Bd. I—IV, Zeuthen, *Gesch. d. Math. im XVI. u. XVII. Jahrh.*,

und für die neuere Zeit Kötter, *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Math. Ver.* **5**, 1901, Fano, *Synth. u. anal. Geom., Math. Enzykl.* Bd. III 1, B 4[a]. Die Ebenenkoordinaten rühren von Plücker her, die Normalform der Gleichung einer Geraden und einer Ebene von Hesse.

Für die ersten Grundlagen der analytischen Geometrie vgl. man die Lehrbücher:

Hesse, *Vorl. a. d. analytischen Geom. der ger. Linie, des Punktes und des Kreises,* 4. Aufl. 1906, Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Analytische Geometrie des Raumes* (viele Auflagen), Baltzer, *Analytische Geometrie* 1882, auch den betr. Abschnitt in desselben Verfassers *Theorie u. Anwendung der Determinanten*, Ganter und Rudio, *Elemente der analytischen Geometrie* 1897, 1899 (mehrere Neuauflagen), Simon, *Analytische Geometrie der Ebene* 1897, *des Raumes* 1898 (Sammlung Göschen), Schur, *Lehrbuch der analytischen Geometrie* 1898, Niewenglowski, *Cours de géométrie analytique*, Paris 1894, Staude, *Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene* 1905, d'Ovidio, *Geometria analitica,* Torino 1903, endlich nach der Seite der angewandten Mathematik hin: Runge, *Analytische Geometrie der Ebene* 1908.

Kapitel V.

Grundlagen der affinen Geometrie.

Von *H. Timerding* in Straßburg.

§ 1. Der Desarguessche Satz.

Im vorigen Kapitel sind bei der Behandlung des Koordinatenbegriffes die in dem ersten Kapitel entwickelten Grundlagen der Geometrie in ihrem ganzen Umfange vorausgesetzt worden, d. h. wir haben die Gültigkeit des vollen Axiomensystems angenommen. Wenn dies nun auch für die metrischen Relationen der Koordinaten notwendig ist, so erweisen sich doch für die Begründung der allgemeinen inhomogenen Koordinatengeometrie einzelne unter den Axiomen als entbehrlich, und es sind neue prinzipielle Aufschlüsse zu erwarten, wenn man sich die Aufgabe stellt, alle überflüssigen Voraussetzungen abzustreifen.

Hilbert hat diese Aufgabe für die *Ebene* so behandelt, daß er zunächst nur die Axiome der Verknüpfung und Anordnung in Verbindung mit dem Desarguesschen Satze (vgl. S. 18 und S. 55) und dem Parallelenaxiom als gültig ansah (*Grundlagen der Geom.* § 24—28). Es werden dann zwei feste Gerade angenommen, die sich in einem Punkte O schneiden und als die x- und y-Achse bezeichnet werden. Ferner werden auf diesen Achsen zwei Punkte E und E', die *Einheitspunkte*, angenommen, ihre Verbindungslinie heißt die *Einheitslinie*. Man rechnet nun mit *Strecken* auf den Achsen. Von diesen Strecken bildet immer O den Anfangspunkt, und *sie heißen einander gleich, wenn die Verbindungslinie ihrer Endpunkte der Einheitslinie parallel ist.* Insbesondere nimmt man

$$OE = OE' = 1, \qquad OO = 0.$$

Aus zwei Strecken $OX = x$, $OY = y$ leitet man einen Punkt P ab, welcher die vierte Ecke des durch O, X, Y bestimmten Pa-

rallelogrammes ist; x, y heißen dann die *Koordinaten* dieses Punktes. Für die Punkte der x-Achse wird $y = 0$, für die Punkte der y-Achse $x = 0$. Man kann nun definitionsweise annehmen, daß für die Punkte P einer Parallelen zur Einheitslinie

$$x + y = \text{const.}$$

wird. Sind insbesondere A, B die Schnittpunkte der Geraden mit den Achsen, so wird

$$OA = OB = x + y.$$

Ferner wird $x = y$ für die Punkte einer Geraden, die man bekommt, indem man den vierten Eckpunkt T des durch E, O, E' bestimmten Parallelogramms mit O verbindet. Dies ist eine unmittelbare Folge des Desarguesschen Satzes.

Die Regel für die Addition zweier Strecken a, b auf der x- oder y-Achse lautet nun, wie folgt: Man nehme den Punkt, dessen Koordinaten $x = a$, $y = b$ sind, und ziehe durch ihn die Parallele zu der Einheitslinie, diese Parallele schneidet auf beiden Achsen die Strecke $a + b$ ab. Aus dem Desarguesschen Satz folgt, daß man, ohne das Resultat dieser Konstruktion zu ändern, statt des Punktes (a, b) auch den Punkt (b, a) verwenden kann, daß also

$$a + b = b + a$$

wird, mithin für die *Addition* das *kommutative Gesetz* gilt. Ebenso beweist man auch direkt das *assoziative Gesetz*

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Nun verändert man die Einheitsstrecke OE' auf der y-Achse, indem man dafür eine beliebige andere Strecke $OC' = c$ nimmt. Zieht man dann durch einen beliebigen Punkt A der x-Achse, für den $OA = a$ gesetzt sei, die Parallele zu EC', so definiert deren Schnittpunkt B' mit der y-Achse die Strecke

$$OB' = c \cdot a.$$

Zieht man durch B' die Parallele zu $E'E$, so wird für deren Schnittpunkt B mit der x-Achse ebenfalls

$$OB = c \cdot a.$$

Dann folgt wieder aus dem Desarguesschen Satze, daß, wenn auf der y-Achse $OA' = a$, auf der x-Achse $OC = c$ gemacht wird, die Linien CE' und BA' parallel werden; die beiden Koordinatenachsen können also bei der Konstruktion des Produktes ihre Rolle

vertauschen. Dasselbe Beweisverfahren zeigt, daß für diese *Multiplikation* das *assoziative Gesetz* gilt:

$$c(ba) = (cb)a.$$

Aus dem Desarguesschen Satz folgt unmittelbar: Haben zwei Parallelogramme eine Seite gemein, so bilden die zu dieser Seite parallelen Seiten wieder die Gegenseiten eines Parallelogramms. In der beistehenden Figur sind den Punkten auf den Achsen die Strecken, deren Endpunkte sie sind, beigefügt. Dabei werde $y' = cy$. Die Punkte P und P' sollen die Koordinaten x, y und x, y' haben. Durch P' ist die Gerade AA' parallel zur Einheitslinie EE' gegeben. Dann muß nach dem vorangestellten Satze die Linie, die P mit A verbindet, parallel zu YX_0 sein. Daraus folgt $a = cb$. Der Punkt A_0' bleibt fest, wenn man P' auf AA' wandern läßt. P durchläuft dann also die Gerade AA_0'. Nun muß

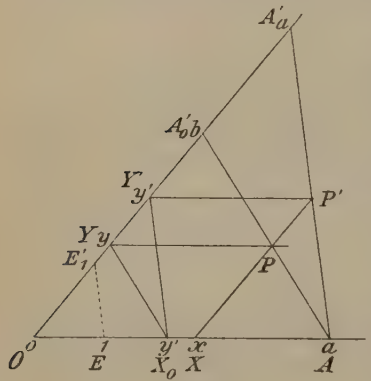


Fig. 1.

$$x + y' = a$$

sein, also folgt durch Einsetzen des Wertes von y'

$$x + cy = a,$$

und damit ist die Gleichung der geraden Linie gefunden. Es ist jetzt leicht zu zeigen, daß, falls die Gerade durch O geht, für die Koordinaten x, y ihrer Punkte eine Gleichung von der Form

$$x = cy$$

gilt. Ebenfalls ist es nicht schwer, für die Multiplikation auch die Gültigkeit der beiden distributiven Gesetze nachzuweisen:

$$c(a + b) = ca + cb, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Dagegen ist die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes *nicht* zu beweisen. Die so begründete Streckenrechnung erlaubt, die Gesamtheit der verschiedenen Strecken aufzufassen als ein Zahlensystem, das Hilbert ein *Desarguessches Zahlensystem* nennt. Dieses Zahlensystem gestattet, wie Hilbert nachgewiesen hat,

den Aufbau einer *räumlichen Geometrie*, bei der die Koordinaten der Punkte und Ebenen Zahlen des Systems sind, und in der die sämtlichen Axiome der Anordnung und Verknüpfung mit Einschluß der räumlichen Axiome erfüllt sind. Es ergibt sich so der wichtige Satz: *Es seien in einer ebenen Geometrie die Axiome der Verknüpfung und Anordnung samt dem Parallelenaxiom erfüllt. Dann ist die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes die Bedingung dafür, daß diese ebene Geometrie sich als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen läßt, in welcher die sämtlichen Axiome der Anordnung und Verknüpfung mitsamt dem Parallelenaxiom erfüllt sind. Anderseits kann der Desarguessche Satz aus dieser räumlichen Geometrie gewonnen werden, indem man zwei perspektive Dreiecke, die in parallelen Ebenen liegen, durch parallele Strahlen auf eine Ebene projiziert. Es ergibt sich so: Der Desarguessche Satz kennzeichnet sich gewissermaßen als das Resultat der Elimination der räumlichen Axiome.* (Hilbert, *Grundlagen* § 30.)

Wir nehmen nun auch das *kommutative Gesetz* in der Form

$$ca = ac$$

als gültig an und suchen die Aussage dieser Gleichung geometrisch auszudrücken. Dies ist in der beistehenden Figur geschehen. Um $OB' = ca$ zu konstruieren, ist $AB' \parallel EC'$ gezogen, und um $OB' = ac$ zu finden, ist $CB' \parallel EA'$ gezogen. Außerdem ist $CC' \parallel AA'$, und die Aussage des Satzes ist nichts anderes wie der *Pascalsche Satz* in seiner speziellen Formulierung (s. S. 18). *Die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes ist also gleichbedeutend mit der Annahme des Pascalschen Satzes.* Setzen wir diesen als richtig voraus, so gelangen wir zu einer Geometrie, die wir als *affine Geometrie* zu bezeichnen haben, und welche mit der in Kap. II unter dieser Bezeichnung eingeführten Geometrie identisch ist.

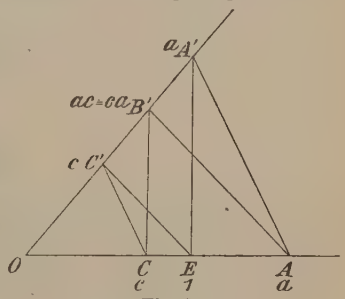


Fig. 2.

§ 2. Die Pascalsche Geometrie.

Die Annahme des Pascalschen Satzes und damit des kommutativen Gesetzes bei der Streckenmultiplikation gestattet die Einführung des Quotienten zweier Strecken $OA' = a$, $OB' = b$,

die wir zunächst auf der y-Achse annehmen. Dieser Quotient q ist definiert durch die Gleichung

$$qb = a.$$

Wir schreiben ihn

$$q = \frac{a}{b} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Nach der Definitionsgleichung können wir q deuten als eine Strecke OQ der x-Achse; man bekommt sie, indem man B' mit E verbindet und zu dieser Linie die Parallele durch A' zieht, diese schneidet Q aus. Demnach gelten für die Streckenquotienten dieselben Rechenregeln wie für die Strecken. Die Streckenquotienten können auch auf die x-Achse übertragen werden, indem man zwei Streckenquotienten auf verschiedenen Achsen als gleich ansieht, wenn die Endpunkte der Strecken auf zwei Parallelen zur Einheitsgeraden liegen. Sie sind dann aber, wie sich aus dem Desarguesschen Satz ergibt, immer gleich, wenn die Endpunkte auf irgend zwei zueinander parallelen Linien liegen. Um also zu entscheiden, ob zwei Streckenquotienten auf derselben Achse gleich sind, zieht man durch die Endpunkte der Strecken des einen Quotienten irgend zwei Parallele, deren Schnittpunkte mit der anderen Achse verbindet man mit den Endpunkten der Strecken des zweiten Quotienten, sind diese Verbindungslinien wieder parallel, so sind die Quotienten gleich. Man führt die Quotienten auf eine Strecke der Achse, auf die sie sich beziehen, zurück auf Grund der Gleichung

$$\frac{a}{1} = a.$$

Man leitet nun aus zwei Strecken OA, OB der x-Achse eine Strecke mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B ab, indem man

$$AB = OB - OA$$

setzt. Wird $QA : QB = \lambda$ und $OA = x_1$, $OB = x_2$, $OQ = x$ gesetzt, so ergibt sich $\lambda = (x_1 - x) : (x_2 - x)$ und somit

$$(1) \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}.$$

Um jetzt zu entscheiden, ob zwei Strecken AB, CD der x-Achse gleich sind, zieht man durch A, B zwei parallele Linien, deren Schnittpunkte mit einer beliebigen Parallelen zur x-Achse verbindet man mit C und D, sind diese Linien wieder parallel, so ist

$$AB = CD.$$

Wir gehen nun auf die gefundene Gleichung $x + cy = a$ einer Geraden mit den Achsenabschnitten a, b zurück, die wir, da $cb = a$ war, jetzt schreiben

$$x + \frac{a}{b} y = a . \tag{2}$$

Hat eine hierzu parallele Gerade die Achsenabschnitte a_1, b_1, so wird $a_1 : b_1 = a : b$, und somit lautet die Gleichung dieser zweiten Geraden

$$x + \frac{a}{b} y = a_1 ,$$

sie unterscheidet sich demnach von der vorhergehenden nur im konstanten Gliede. Wird $a_1 = 0$, so geht die Gerade durch den Ursprung O.

Sind nun x_1, x_2 die x-Koordinaten zweier Punkte auf der Geraden, deren Gleichung lautet: $x + cy = a$, so werden die zugehörigen y-Koordinaten $y_1 = \frac{a - x_1}{c}$, $y_2 = \frac{a - x_2}{c}$, und unter Berücksichtigung dieser Werte wird

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} . \tag{3}$$

Dies ist die schon im vorigen Kapitel aufgestellte Parameterdarstellung der Geraden. Wir wollen durch die drei so gefundenen Punkte $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$, $P(x, y)$ einer geraden Linie drei zueinander parallele Gerade p_1, p_2, p ziehen. Deren Abschnitte a_1, a_2, a auf der x-Achse sind dann nach dem oben Gefundenen durch drei Gleichungen gegeben:

$$a_1 = x_1 + \frac{a}{b} y_1 ,$$

$$a_2 = x_2 + \frac{a}{b} y_2 ,$$

$$a = x + \frac{a}{b} y .$$

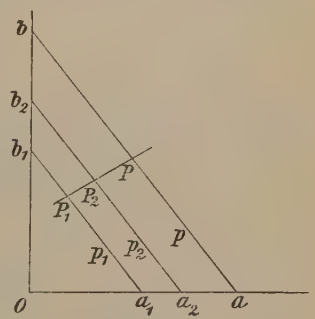


Fig. 3.

Tragen wir hierin die vorstehenden Werte für x, y ein, so wird

$$a = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda} .$$

Sind also A_1, A_2, A die Punkte, in denen die Geraden die x-Achse treffen, so wird

$$\lambda = \frac{AA_1}{AA_2}.$$

Dies Verhältnis ist demnach dasselbe, wie auch die parallelen Geraden p_1, p_2, p durch die Punkte P_1, P_2, P gezogen werden mögen, und ist jedesmal gleich dem entsprechenden Verhältnisse, das die Schnittpunkte der Parallelen p_1, p_2, p mit der y-Achse bestimmen. Wir setzen nun

$$\lambda = \left(\frac{PP_1}{PP_2}\right) \quad \text{oder kürzer} \quad \lambda = (PP_1P_2)$$

und definieren so den Streckenquotienten auf einer *beliebigen* Geraden der Ebene.

Schneiden wir die Parallelen p_1, p_2, p durch irgendeine neue Gerade in Q_1, Q_2, Q, so wird

$$(PP_1P_2) = (QQ_1Q_2).$$

Die Verhältnisse zweier Punktetripel, die aus zwei Geraden durch parallele Linien ausgeschnitten werden, sind gleich.

Ferner gilt der Satz: Sind PP_1, P_2P_3 vier Punkte einer Geraden, und wird

$$\lambda = \left(\frac{PP_1}{PP_2}\right), \quad \lambda' = \left(\frac{PP_2}{PP_3}\right),$$

so wird

$$\lambda \cdot \lambda' = \left(\frac{PP_1}{PP_3}\right).$$

Sind dagegen auf einer Geraden p die Quotienten λ, λ' gegeben in der Form

$$\lambda = (P_1PP_2), \quad \lambda' = (P_1P'P_2),$$

so gelangt man zu dem Quotienten

$$\lambda \cdot \lambda' = (P_1P''P_2),$$

indem man auf einer zweiten Geraden q durch P_1 die Punkte Q_2, Q so annimmt, daß $P_2Q_2 \parallel PQ$ wird. Dann ist P'' dadurch bestimmt, daß $P''Q \parallel P'Q_2$ wird.

Dem Streckenquotienten kann man den *Flächenquotienten* an die Seite stellen. Sind $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ irgend drei Punkte der Ebene, so definieren wir als den Flächenquotienten

des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ und des *Grunddreiecks* OEE' die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ist der gleiche Quotient für ein weiteres Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ gebildet, so nehmen wir für den Flächenquotienten der beiden Dreiecke

$$\frac{[P_1 P_2 P_3]}{[Q_1 Q_2 Q_3]} = \frac{[P_1 P_2 P_3]}{[OEE']} : \frac{[Q_1 Q_2 Q_3]}{[OEE']}.$$

So läßt sich die affine analytische Geometrie für die Ebene begründen ohne Heranziehung des Archimedischen Axioms oder eines Stetigkeitsaxioms auf alleiniger Grundlage der graphischen Axiome für die Ebene, des Parallelenaxioms und des Pascalschen Satzes für zwei Gerade. Wie nämlich Hessenberg gezeigt hat (*Math. Ann.* **61** (1905), 162), ist der Desarguessche Satz eine Folge der ebenen Axiome und des Pascalschen Satzes. So ist die Bezeichnung als *Pascalsche Geometrie* in der Tat gerechtfertigt.

§ 3. Affinitäten.

Wenn zwei Ebenen *affin* aufeinander bezogen sind, so entspricht *erstens* jedem Punkt der einen Ebene ein Punkt der anderen Ebene, *zweitens* entsprechen den Punkten einer Geraden immer wieder die Punkte einer Geraden, und *drittens* sind auf diese Weise parallelen Geraden immer wieder parallele Gerade zugeordnet.

Wird in jeder der beiden Ebenen ein Koordinatensystem eingeführt, sind x, y die Koordinaten eines Punktes P der ersten Ebene, x', y' die Koordinaten des entsprechenden Punktes P' der zweiten Ebene, so wird die Affinität analytisch dargestellt durch zwei Gleichungen von folgender Form:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} x' &= a_0 + a_1 x + a_2 y, \\ y' &= b_0 + b_1 x + b_2 y. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Determinante

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

von Null verschieden vorauszusetzen.

Wählt man die Koordinatensysteme insbesondere so, daß ihre

Achsen zwei Paare entsprechender Geraden bilden, so lauten die Gleichungen der Affinität einfach

$$x' = ax, \quad y' = by. \tag{b}$$

Durch geeignete Wahl der Einheitsstrecken kann man diese Gleichungen noch reduzieren auf

$$x' = x, \quad y' = y. \tag{c}$$

Die allgemeine affine Beziehung entsteht also, wenn man in zwei Ebenen allgemeine inhomogene kartesische Koordinaten einführt und Punkte mit gleichen Koordinaten einander entsprechen läßt.

Hieraus folgt sofort: *Die Verhältnisse homologer Punktetripel auf zwei entsprechenden Geraden der affinen Ebenen sind gleich.* Diesen Satz drückt man auch so aus: *Entsprechende Punktreihen in den beiden Ebenen sind ähnlich.* Ferner ergibt sich: *Der Flächenquotient zweier Dreiecke der einen Ebene ist gleich dem Flächenquotient der entsprechenden Dreiecke in der anderen Ebene.*

Um zwei ebene Felder affin aufeinander zu beziehen, kann man in jedem von ihnen ein eigentliches Dreieck beliebig annehmen und den Eckpunkten des einen Dreiecks die des anderen in beliebiger Reihenfolge als entsprechende Punkte zuweisen.

Suchen wir nun die metrischen Eigenschaften der Affinität, so haben wir entweder zu den für die affine Geometrie angenommenen Axiomen auch noch die Axiome der Kongruenz-Geometrie hinzuzufügen oder die Metrik in die affine Geometrie definitionsmäßig einzuführen.

Von den verschiedenen Wegen, auf denen sich das letztere erreichen läßt, wollen wir nur das Verfahren erwähnen, das auf der Verwendung einer *Eichkurve* (nach Minkowskis Ausdruck) beruht. Hierfür haben wir eine geschlossene, konvexe Kurve, die in O einen Mittelpunkt besitzt und durch E und E' geht, zu nehmen. Um nun die *Entfernung* zweier Punkte P, P_1 zu bestimmen, zeichnen wir das Parallelogramm OPP_1P' und suchen den Schnittpunkt P_0 der Strecke OP' oder ihrer Verlängerung über P' hinaus mit der Eichkurve, so ist die gesuchte Entfernung

$$PP_1 = (OP'P_0).$$

Dann folgt unmittelbar (aus dem Desarguesschen Satz) die Gleichheit der Gegenseiten eines Parallelogramms.

Wir wählen nun für die Eichkurve eine *Ellipse* (vgl. Kap. X), deren Gleichung lauten wird:

$$x^2 + y^2 + 2\lambda xy = 1,$$

mit der Bedingung $\lambda^2 < 1$. Daraus ergibt sich für die Entfernung r der Punkte $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$:

$$r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + 2\lambda(x_1 - x)(y_1 - y).$$

Dieser Ausdruck erlaubt, den Winkel φ zwischen PP_1 und PP_2 durch die Gleichung

$$2PP_1 \cdot PP_2 \cdot \cos\varphi = PP_1^2 + PP_2^2 - P_1P_2^2$$

oder, wenn $OP' \# PP_1$, $OP'' \# PP_2$, durch die Gleichung

$$2OP' \cdot OP'' \cdot \cos\varphi = OP'^2 + OP''^2 - P'P''^2,$$

zu definieren. In der Tat ergibt sich, wenn x, y die Koordinaten von P', x_1, y_1 die von P'' sind,

$$\cos\varphi = \frac{(xx_1 + yy_1) + \lambda(xy_1 + yx_1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2\lambda xy} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2\lambda x_1y_1}},$$

was für $\lambda = \cos(xy)$ mit den Formeln des vorigen Kapitels übereinstimmt. Den Nachweis, daß hieraus dann die ganze metrische Geometrie fließt, können wir übergehen, und wollen nun den metrischen Charakter und die (der der Kegelschnitte analoge) metrische Klassifikation der Affinitäten kurz behandeln. Es ergibt sich zunächst:

Die Abstände aller Punkte der einen Ebene von einer geraden Linie in ihr stehen zu den Abständen der entsprechenden Punkte von der entsprechenden Geraden der anderen Ebene in demselben Verhältnis.

Sind g, g' zwei einander zugeordnete Geraden in den affinen Ebenen, so hat die Entfernung zweier Punkte auf g zu der Entfernung der entsprechenden Punkte auf g' immer dasselbe Verhältnis, wie auch die beiden Punkte auf g angenommen werden mögen.

Aus den angeführten Sätzen folgt: *In affinen ebenen Feldern stehen je zwei homologe Flächenstücke in konstantem Verhältnis zueinander.*

Sind insbesondere homologe Flächenstücke inhaltsgleich, so heißt die affine Beziehung der beiden ebenen Felder eine *Gleichheit.*

Durch zwei entsprechende Punkte der beiden Ebenen gehen im allgemeinen zwei und nur zwei Paare zueinander senkrechter Geraden, die einander in der Affinität entsprechen. Es ist also möglich, in den beiden Ebenen zwei rechtwinklige Koordinatensysteme so anzunehmen, daß die Affinität in der Form (b) darstellbar ist. Dies ist, von Parallelverschiebungen abgesehen, im allgemeinen auch nur auf *eine* Art möglich. Ist es auf zwei Arten

möglich, so entsprechen jedem Paar senkrechter Geraden der einen Ebene wieder zwei senkrechte Geraden in der anderen Ebene, und irgend zwei entsprechende Geradenpaare schließen gleiche Winkel ein. Die Affinität heißt in diesem Falle eine *Ähnlichkeit*. Das Verhältnis der Längen zweier entsprechenden Strecken ist dann dasselbe für alle Strecken.

Denken wir uns die beiden affinen Felder aufeinander gelegt, so läßt sich die Affinität, wenn wir die Punkte beider Felder auf dasselbe Koordinatensystem beziehen wollen, zunächst nur in der allgemeinen Form (a) darstellen. Wir haben sie jetzt zu deuten als eine *Transformation*, bei der die Punkte innerhalb ihrer Ebene eine Veränderung erleiden.

Dann gründet sich eine Klassifikation der affinen Transformationen auf die Frage nach den Punkten, die bei ihnen ungeändert bleiben. Setzen wir in den Gleichungen (a) $x' = x$, $y' = y$, so ergeben sie:

$$(a_1 - 1)x + a_2 y + a_0 = 0,$$
$$b_1 x + (b_2 - 1)y + b_0 = 0.$$

Diese Gleichungen gestatten ein einziges Lösungssystem (x, y) dann und nur dann, wenn die *Diskriminante*

$$D = (a_1 - 1)(b_2 - 1) - a_2 b_1$$

nicht verschwindet. Der so bestimmte Punkt ist der einzige Punkt, der bei der Transformation ungeändert bleibt, und heißt das *Zentrum* der Transformation. Wählen wir ihn zum Koordinatenursprung, so verschwinden aus den Transformationsgleichungen die konstanten Glieder a_0, b_0, sie werden also

$$\text{(d)} \qquad x' = a_1 x + a_2 y, \quad y' = b_1 x + b_2 y.$$

Eine Gerade, die in sich selbst transformiert wird, muß durch das Zentrum gehen. Wir finden sie, indem wir in (d) $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ machen. So erhalten wir für λ die quadratische Gleichung

$$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0,$$

deren Diskriminante lautet:

$$\mathfrak{D} = (a_1 - b_2)^2 - 4 a_2 b_1.$$

Ist $\mathfrak{D} > 0$, so hat die Transformation zwei reelle *Achsen*, die in sich transformiert werden. Wählen wir diese zu Koordinatenachsen, so werden die Gleichungen der Transformation einfach

$$(\alpha) \qquad x' = \alpha x, \quad y' = \beta y,$$

wobei $\alpha, \beta \neq 0$ und $\neq 1$, außerdem $\alpha \neq \beta$ vorauszusetzen ist. Für $\mathfrak{D} = 0$ erhält man die folgenden Gleichungen, in denen $\alpha \neq 1$ ist:

$$(\beta) \qquad x' = \alpha x, \quad y' = \beta x + \alpha y.$$

In diesem Falle ist die y-Achse die einzige Achse der Transformation. Nur wenn $\beta = 0$ ist, wird jede Gerade durch das Zentrum in sich transformiert. Die Transformation heißt dann *homothetisch*. Entsprechende Figuren sind ähnlich und in ähnlicher Lage. Der Koordinatenursprung ist der Ähnlichkeitspunkt.

Ist $\mathfrak{D} < 0$, so wird die einfachste Gleichungsform für die Transformation:

$$(\gamma) \qquad x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y.$$

Die Gleichungen stellen eine Ähnlichkeitstransformation dar, wenn das zugrunde gelegte Koordinatensystem ein rechtwinkliges ist.

Wird $D = 0$, so erhält man zunächst die Transformationen, deren einfachste Gleichungsform lautet:

$$(\delta) \qquad x' = x + a, \quad y' = \beta y \quad (a \neq 0, \ \beta \neq 1 \text{ und } \neq 0).$$

Kein im Endlichen gelegener Punkt geht in sich über, und nur die x-Achse wird in sich transformiert. Die Geraden, die zu ihr, und diejenigen, die zur y-Achse parallel sind, werden jedesmal in eine parallele Gerade übergeführt.

Nimmt man aber $a = 0$, so bleiben alle Punkte der x-Achse bei der Transformation ungeändert, und alle Parallelen zur y-Achse werden in sich transformiert. Derselbe Fall liegt auch vor, wenn man von den allgemeineren Gleichungen

$$(\varepsilon) \qquad x' = x, \quad y' = \alpha x + \beta y + \gamma$$

ausgeht und $\beta \neq 1$ und $\neq 0$ voraussetzt. Die *Achse* der Affinität, deren Punkte ungeändert bleiben, wird dann durch die Gleichung gegeben:

$$\alpha x + (\beta - 1)y + \gamma = 0.$$

Der letzte Typus affiner Transformationen wird durch die Gleichungen

$$(\zeta) \qquad x' = x + a, \quad y' = y + b$$

repräsentiert. Dies sind die *Translationen*, bei denen alle Punkte um gleiche Strecken in der gleichen Richtung verschoben werden. Die Translationen sind ein besonderer Fall der *Kongruenzen*, d. h. der Affinitäten, die Gleichheit und Ähnlichkeit vereinigen. Die

Gleichungen der Kongruenzen erhalten unter der Voraussetzung *rechtwinkliger Koordinaten* eine der folgenden beiden Formen:

$$(\eta) \qquad x' = a + \alpha x - \beta y, \quad y' = b + \beta x + \alpha y, \qquad (\beta \neq 0)$$
$$(\vartheta) \qquad x' = a + \alpha x + \beta y, \quad y' = b + \beta x - \alpha y,$$

wobei $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ anzunehmen ist. Die Gleichungen (η) repräsentieren die einfachen *Drehungen*, die Gleichungen (ϑ) die *Drehspiegelungen.*

Eine affine Transformation des Raumes wird unter der Voraussetzung beliebiger inhomogener Koordinaten durch drei Gleichungen von folgender Form dargestellt:

$$x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$
$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$
$$z' = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

wenn (x, y, z) und (x', y', z') zwei entsprechende Punkte sind. Die Beziehung ist wieder wechselweise eindeutig. Den Punkten einer Geraden entsprechen die Punkte einer Geraden, und zwar sind die beiden Punktreihen *ähnlich.* Den Punkten einer Ebene entsprechen die Punkte einer Ebene, und die beiden Punktfelder sind affin aufeinander bezogen. *Einander entsprechende Raumstücke stehen in konstantem Volumverhältnis, oder zwei beliebige Raumstücke verhalten sich zueinander wie die Raumstücke, in die sie durch die Transformation übergehen.* Der Beweis dieses Satzes kann auf den anderen Satz gegründet werden: Die Abstände der Punkte des Raumes von einer Ebene sind den Abständen der entsprechenden Punkte von der entsprechenden Ebene proportional.

Die Affinität wird zur *Ähnlichkeit*, wenn drei nicht parallele und damit alle ebenen Punktfelder in ähnliche Punktfelder transformiert werden, wenn also alle Winkel ungeändert bleiben. Ist eine Affinität keine Ähnlichkeit, so gehen durch jeden Punkt des Raumes drei zueinander senkrechte Achsen, denen wieder drei zueinander senkrechte Achsen entsprechen. Daraus folgt, wenn wir eine Transformation, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch die Gleichungen

$$x' = ax, \quad y' = by, \quad z' = cz$$

dargestellt wird, als eine *Grundtransformation* bezeichnen, der vielbenutzte Satz: *Eine beliebige affine Transformation läßt sich zusammensetzen aus einer Bewegung und einer Grundtransformation.* Eine Bewegung ist hierbei definiert als eine Ähnlichkeits-

transformation, bei der entsprechende Raumstücke gleiches und gleich bezeichnetes Volumen haben.

Die Klassifikation der affinen Raumtransformationen gründet sich auf die Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_1 - 1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 - 1 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 - 1 & c_0 \end{Vmatrix}.$$

Die aus den ersten drei Spalten dieser Matrix gebildete Determinante wollen wir mit D bezeichnen. Dann ist $D \neq 0$ die Bedingung dafür, daß ein *Zentrum* der Transformation existiert, d. h. daß ein einziger im Endlichen gelegener Punkt bei ihr ungeändert bleibt. Wird $D = 0$, ohne daß die übrigen Determinanten der Matrix verschwinden, so bleibt kein Punkt im Endlichen ungeändert, und *eine* gerade Linie wird in sich transformiert, während alle zu ihr parallelen Linien wieder in solche parallelen Linien übergehen. Sind alle Determinanten der Matrix Null, so bleiben alle Punkte einer geraden Linie ungeändert. Verschwinden aber diese Determinanten dadurch, daß D mit allen Unterdeterminanten verschwindet, so gibt es eine Schar paralleler Ebenen, die ineinander übergehen, und unter ihnen im allgemeinen eine, die in sich transformiert wird. Alle Geraden in diesen Ebenen ändern bei der Transformation ihre Richtung nicht. Verschwinden alle Determinanten der Matrix mit ihren Unterdeterminanten, so bleiben alle Punkte einer bestimmten Ebene ungeändert, und die affine Transformation läßt sich herstellen, indem man alle Punkte in einer bestimmten Richtung so verschiebt, daß ihre Abstände von der festen Ebene in einem konstanten Verhältnis verändert werden. Wenn schließlich die sämtlichen Elemente der Determinante D verschwinden, so reduziert die Affinität sich auf eine *Translation*, d. h. alle Punkte werden in gleicher Richtung um gleiche Strecken verschoben.

Die Lehre von der Affinität ist durch Euler begründet worden (*Introductio in analysin infinitorum*, Vol. 2, Cap. 18). Für ihre Ausbildung waren von besonderer Bedeutung Moebius' *Barycentrischer Calcul*, 1827, und Magnus' *Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie*, 1833 und 1837. Die affine Geometrie ist aber gegenüber der projektiven Geometrie sehr vernachlässigt worden und unter den Lehrbüchern hat sie erst wieder Heffter und Köhlers *Lehrbuch der analytischen Geometrie* zu ihrem Recht kommen lassen.

Kapitel VI.

Grundlagen der projektiven Geometrie.

Von *G. Guareschi* in Pavia.[1])

§ 1. Uneigentliche Elemente. Das Axiomensystem der projektiven Geometrie.

Der Grundgedanke, von dem die projektive Geometrie ausgeht, ist der, die Begriffsbestimmungen so zu modifizieren, daß aus den Axiomen die durch das Parallelenaxiom bedingten Besonderheiten verschwinden und den Aussagen „Zwei Punkte bestimmen eine Gerade", „Drei Punkte, die keiner Geraden angehören, bestimmen eine Ebene" die Aussagen ausnahmelos gegenübergestellt werden können: „Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade", „Drei Ebenen, die nicht eine Gerade gemein haben, bestimmen einen Punkt" oder auch „Zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, bestimmen einen Punkt". Diese Begriffserweiterung geschah auf Grund des Parallelenaxioms 1639 durch Desargues (*Brouillon project etc., Œuvres réunies par Poudra* 1864, I, 97) mit der Einführung der unendlich fernen Elemente, in methodisch abgeklärter Form ohne das Parallelenaxiom durch Pasch (*Vorlesungen über neuere Geometrie* 1882), wozu auch die Arbeiten von Reyes y Prosper (*Math. Ann.* **32** (1888), 157), Schur (*Math. Ann.* **39** (1891), 113), Bonola (*Giorn. di mat.* **38** (1900), 105) zu vergleichen sind.

Wir knüpfen an die Bemerkung am Schlusse von § 4 in Kap. I an und setzen sonach nur die graphischen Axiome 1—10 voraus, unter denen das letzte, das *räumliche Axiom*, von besonderer Bedeutung ist.

Man beweist dann zuerst die Sätze (Schur a.a.O.): *Sind* (abc)

1) § 1 und ein Teil von § 3 dieses Kapitels rührt von J. Mollerup in Kopenhagen her.

und $(a'b'c')$ zwei Dreikante desselben Bündels und schneiden sich die drei Ebenen aa', bb', cc' in derselben Geraden g, dann gehören die Schnittlinien $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$, $(ac, a'c')$ derselben Ebene an (*Desarguesscher Satz im Bündel*, vgl. u. § 2, Def. 9).

Werden zwei Bündel S und S' einander in der Weise zugeordnet, daß erstens drei Paare entsprechender Strahlen sich paarweise in drei Punkten M, N, P schneiden, und zweitens, wenn Q ein Punkt der Ebene MNP ist, sich immer die Strahlen SQ und $S'Q$ entsprechen, dann sind hierdurch die Bündel derart einander wechselweise eindeutig zugeordnet, daß drei Strahlen einer Ebene immer wieder drei Strahlen einer Ebene entsprechen.

Es lassen sich nun die nachstehenden Definitionen und Sätze aufstellen, für welche letzteren der Beweis aus den zugrunde gelegten Axiomen folgt.

Ein uneigentlicher (idealer) Punkt (ab) wird *definiert* durch zwei sich nicht schneidende Gerade a, b einer Ebene $[ab]$. Eine dritte Gerade c außerhalb der Ebene $[ab]$ geht durch den Punkt (ab) hindurch, wenn die Geraden a, c und b, c je einer Ebene angehören. Eine Gerade d der Ebene $[ab]$ geht durch den uneigentlichen Punkt (ab), wenn sie mit der vorher genannten Geraden c derselben Ebene angehört. Zwei uneigentliche Punkte sind identisch, wenn zwei und damit alle Geraden, die durch den einen gehen, auch den anderen enthalten. Ein eigentlicher und ein uneigentlicher Punkt bestimmen eine einzige Gerade. Zwei Gerade, die durch denselben uneigentlichen Punkt gehen, liegen in einer Ebene. Eine Ebene geht durch einen uneigentlichen Punkt, wenn sie eine und damit unendlich viele Geraden enthält, die durch den Punkt gehen. Ein uneigentlicher Punkt kann bestimmt werden durch eine Ebene und eine Gerade, welche die Ebene nicht schneidet.

Was bis hierhin Gerade genannt ist, muß als *eigentliche Gerade* ausgezeichnet werden gegenüber den *uneigentlichen Geraden*. Jeder Punkt einer uneigentlichen Geraden ist ein uneigentlicher Punkt. Eine solche Gerade wird festgelegt durch zwei sich nicht schneidende Ebenen. Ein uneigentlicher Punkt liegt auf einer uneigentlichen Geraden, wenn die zwei die letztere bestimmenden Ebenen durch den Punkt gehen. Eine uneigentliche Gerade liegt in einer Ebene, wenn die Geraden, die einen eigentlichen Punkt der Ebene mit zwei Punkten der uneigentlichen Geraden verbinden, in der Ebene liegen.

Eine uneigentliche Gerade ist bestimmt durch irgend zwei Punkte, die auf ihr liegen, oder irgend zwei Ebenen, die durch

sie gehen. Zwei uneigentliche Gerade derselben Ebene haben immer einen (uneigentlichen) Punkt gemein.

Was bis jetzt Ebene genannt ist, muß als *eigentliche Ebene* ausgezeichnet werden gegenüber einer *uneigentlichen Ebene.* Die letztere ist bestimmt durch drei uneigentliche Punkte, die nicht in einer eigentlichen Ebene liegen, oder durch einen uneigentlichen Punkt und eine uneigentliche Gerade, die nicht durch den Punkt geht. (Für die Euklidische Geometrie gibt es nur eine einzige uneigentliche Ebene.)

Wenn wir nunmehr in diesem Kapitel die Worte Punkt, Gerade, Ebene gebrauchen, so können dies eigentliche *oder* uneigentliche Punkte, Gerade oder Ebenen sein.

Aus den graphischen Axiomen 1—10 in Kap. I läßt sich nun auf Grund der neuen Begriffsbildungen ein sekundäres Axiomensystem ableiten, das als das *Axiomensystem der projektiven Geometrie* zu bezeichnen ist (vgl. Pieri, *Torino Mem.* **48** (1899), 173 und Whitehead, *The axioms of projective geometry,* Cambridge 1906). Diese Axiome lauten:

1. Es gibt mindestens zwei verschiedene Punkte.

2. Zwei voneinander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a.

3. Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden a bestimmen diese Gerade.

4. Wenn A und B zwei verschiedene Punkte sind, dann enthält die Gerade a, die durch A und B bestimmt ist, mindestens einen dritten Punkt C.

5. Wenn A und B verschiedene Punkte sind, gibt es mindestens einen Punkt C, der nicht auf der durch A und B bestimmten Geraden liegt.

6. Wenn A, B, C drei Punkte sind, die nicht in einer Geraden liegen, A' ein Punkt der Geraden BC, der nicht mit B oder C identisch ist, B' ein Punkt von AC, der nicht mit A oder C zusammenfällt, dann haben die Geraden AA' und BB' einen Punkt gemein.

7. Wenn A, B, C drei Punkte sind, die nicht in einer Geraden liegen, so gibt es stets einen Punkt D derart, daß die durch ihn und irgendeinen Punkt E der Geraden BC bestimmte Gerade mit AC oder mit AB keinen Punkt gemein hat.

Oder mit Benutzung des Begriffes der Ebene:

Es gibt außerhalb einer Ebene ABC mindestens einen Punkt D.

8. Sind A, B, C, D Punkte einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, so sind auch die Schnittpunkte von AB

mit CD, von AC mit BD und von AD mit BC nicht Punkte einer Geraden (Fanosches Axiom).

9. Drei Punkte A, B, C derselben Geraden bestimmen zwei entgegengesetzte Umlaufssinne:

$$ABC = BCA = CAB \quad \text{und} \quad ACB = CBA = BAC.$$

10. Sind A, B, C, D Punkte einer Geraden, so ist der Umlaufssinn ADB einem der Umlaufssinne ABC und ACB gleich.

11. Sind zwei Umlaufssinne einem dritten gleich, so sind sie auch einander gleich.

12. Sind A, B, C, D Punkte einer Geraden, und ist Uml. ADB = Uml. ABC, so ist auch

$$\text{Uml. } ADC = \text{Uml. } DBC = \text{Uml. } ADB = \text{Uml. } ABC.$$

13. Sind A, B, C, D Punkte einer Geraden, ist Uml. ADB = Uml. ABC, sind ferner A, B_1, C_1, D_1 Punkte einer anderen Geraden und schneiden BB_1, CC_1, DD_1 sich in demselben Punkte, so ist auch

$$\text{Uml. } AD_1B_1 = \text{Uml. } AB_1C_1.$$

14. Eine Fundamentalreihe von Punkten einer Geraden ist eine natürliche Wohlordnung (s. Kap. I, § 1, Satz 5) einer abzählbaren Menge von Punkten $A_1A_2A_3 \ldots A_n \ldots$ auf einer Geraden, wenn es eine Strecke A_1A_2B gibt, welche die ganze Menge enthält. Verdichtungsstelle einer Fundamentalreihe heißt ein Punkt A von der Eigenschaft, daß die Strecke A_1A_2A die ganze Fundamentalreihe enthält, ohne daß es einen anderen Punkt A' der Strecke A_1A_2A gibt, so daß die Strecke A_1A_2A' die ganze Fundamentalreihe enthält. Es kann nur eine solche Verdichtungsstelle geben, und diese muß, wenn sie existiert, auf der Strecke A_1A_2B liegen. Nun lautet das Stetigkeitsaxiom: Jede Fundamentalreihe von Punkten einer Geraden hat eine Verdichtungsstelle.

Bei dem letzten Axiom ist zu beachten, daß die Worte Fundamentalreihe und Verdichtungsstelle ebenso wie vorher das Wort Ebene nur zur Abkürzung der Ausdrucksweise eingeführt sind, aber keinen neuen, undefinierten Begriff involvieren. Die Urbegriffe, die undefiniert auftreten, sind *Punkt, Gerade, Umlaufssinn.* Außerdem ist die Aussage des Axioms nur als ursprünglich anzusehen, insofern es sich um eigentliche Punkte handelt (und dann identisch mit dem Dedekindschen Axiom, Kap. I § 9); die Erweiterung auf beliebige (projektive) Punkte ist ein leicht zu beweisender Lehrsatz.

§ 2. Grundlegende Sätze. Dualitätsprinzip. Harmonische Elemente.

Wir sehen jetzt als die geometrischen Grundelemente *Punkt, Gerade* und *Ebene* an. Eine Verbindung von Grundelementen heißt *Figur*. *Grundgebilde* nennt man die folgenden Figuren:

1. Die gerade *Punktreihe,* die von allen Punkten einer Geraden, des *Trägers* der Punktreihe, gebildet wird.

2. Das ebene *Punktfeld,* das von allen Punkten einer Ebene, des *Trägers* des Punktfeldes, gebildet wird.

3. Der *Punktraum,* der von der Gesamtheit aller Punkte des Raumes gebildet wird. (Wir reden gelegentlich von zwei verschiedenen Räumen, indem wir die Punkte des anschaulichen Raumes doppelt rechnen und so sprechen, als ob sie zu zwei getrennt liegenden Räumen gehörten.)

4. Das *Ebenenbüschel,* das von allen Ebenen durch eine Gerade, die *Achse* des Büschels, gebildet wird.

5. Das *Ebenenbündel,* das von allen Ebenen durch einen Punkt, den *Scheitel* oder *Mittelpunkt* des Bündels, gebildet wird.

6. Der *Ebenenraum,* der von allen Ebenen des Raumes gebildet wird.

7. Das *Strahlenbüschel,* das gebildet wird von allen Geraden oder Strahlen, die durch einen Punkt, den *Scheitel* oder *Mittelpunkt*, gehen und in einer Ebene, der *Ebene* des Büschels, liegen.

8. Das *ebene Strahlenfeld,* die Figur, die von allen Geraden einer Ebene, des *Trägers* des Feldes, gebildet wird.

9. Das *Strahlenbündel,* die Figur, die von allen Strahlen durch einen Punkt, den *Scheitel* oder *Mittelpunkt* des Bündels, gebildet wird.

Der *Strahlenraum,* die Gesamtheit *aller* geraden Linien des Raumes, wird für gewöhnlich nicht als Grundgebilde angesehen. Als *ebenes Feld* wird die Gesamtheit aller Punkte und Geraden einer Ebene, als *Bündel* die Gesamtheit aller Geraden und Ebenen durch einen Punkt bezeichnet. Die Gebilde 1. 2. 3. haben als *erzeugendes Element* den *Punkt,* die Gebilde 4. 5. 6. die *Ebene,* die Gebilde 7. 8. 9. die *Gerade.* Die Gebilde 1. 4. 7. heißen *Grundgebilde erster Stufe,* 2. 5. 8. 9. *Grundgebilde zweiter Stufe,* und 3. 6. *Grundgebilde dritter Stufe.* Die Raumelemente selbst könnten als Grundgebilde 0^{ter} Stufe gelten. Jedes Grundgebilde enthält unendlich viel Grundgebilde niedrigerer Stufe mit demselben erzeugenden Element.

Wir stellen nun an die Spitze folgende Sätze, indem wir sagen, ein Punkt gehört einer Geraden oder einer Ebene an, wenn er auf ihr liegt, eine Ebene oder Gerade gehört einem Punkt an und eine Ebene einer Geraden, wenn sie dadurch hindurchgeht. Wenn zwei Elemente einander angehören, sagen wir, sie liegen vereinigt.

Ia. *Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine Gerade, der sie angehören.*

Ib. *Zwei verschiedene Ebenen bestimmen eine Gerade, der sie angehören.*

IIa. *Drei Punkte, die nicht einer Geraden angehören, bestimmen eine Ebene, der sie angehören.*

IIb. *Drei Ebenen, die nicht einer Geraden angehören, bestimmen einen Punkt, dem sie angehören.*

Ia. gehört zu den Axiomen, IIa. ist eine Definition (vgl. Def. 2 in Kap. I, § 1), Ib., IIb. sind Folgen aus dieser Definition und den Axiomen. An IIa., IIb. gliedern sich an die Sätze:

IIIa. *Ein Punkt und eine Gerade, die nicht vereinigt liegen, bestimmen eine Ebene.*

IIIb. *Eine Ebene und eine Gerade, die nicht vereinigt liegen, bestimmen einen Punkt.*

Hinzufügen können wir noch:

IVa. *Zwei Gerade, die sich schneiden, liegen in einer Ebene.*

IVb. *Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, schneiden sich.*

Entsprechend den Sätzen I. und II. betrachten wir als lösbar die Aufgaben:

1a. *Die Verbindungslinie zweier Punkte zu finden.*

1b. *Die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden.*

2a. *Die Verbindungsebene dreier (nicht in gerader Linie liegenden) Punkte zu finden.*

2b. *Den Schnittpunkt dreier (nicht durch eine Gerade gehenden) Ebenen zu finden.*

Als *lösbar* bezeichnen wir dann jede Aufgabe, die auf diese vier *Grundaufgaben* zurückführbar ist. *In der Ebene lösbar* ist eine Aufgabe, wenn sie auf die folgenden beiden Grundaufgaben zurückführbar ist:

α. Die Verbindungslinie zweier Punkte einer Ebene zu finden.

β. Den Schnittpunkt zweier Geraden einer Ebene zu finden.

α. ist mit 1a. identisch, β. ist auf 2a. und 2b. zurückführbar.

Aus den Grundaufgaben folgen zunächst die Aufgaben des *Projizierens* und *Schneidens*. Diese lauten:

a) Eine aus Punkten und Geraden bestehende Figur aus einem außerhalb gelegenen Punkte, dem *Projektionszentrum*, zu *projizieren*, d. h. die Punkte der Figur durch Geraden, die Geraden durch Ebenen mit diesem Punkte zu verbinden.

b) Eine aus Punkten allein bestehende Figur aus einer außerhalb gelegenen (d. h. durch keinen der Punkte gehenden) Geraden, der *Projektionsachse*, zu *projizieren*, d. h. die Punkte mit dieser Geraden durch Ebenen zu verbinden.

c) Eine aus Geraden und Ebenen bestehende Figur durch eine neue Ebene, der keine Gerade der Figur angehört, (die *Schnittebene*) zu *schneiden*, d. h. die Schnittpunkte und Schnittlinien der verschiedenen Geraden und Ebenen mit der Schnittebene zu konstruieren.

d) Eine nur aus Ebenen bestehende Figur durch eine Gerade (die Schnittlinie), welche keiner Ebene der Figur angehört, zu *schneiden*, d. h. die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Ebenen der Figur zu bestimmen.

Die so definierten vier Operationen heißen die *Grundoperationen der projektiven Geometrie*. Sie werden benutzt, um ein Grundgebilde in ein anderes Grundgebilde gleicher Stufe zu verwandeln.

Projektive Eigenschaften einer Figur sind solche Eigenschaften, die sie mit jeder aus ihr durch die Grundoperationen ableitbaren Figur gleicher Art gemein hat. Damit die abgeleitete Figur von der gleichen Art, d. h. auf demselben Grundelement aufgebaut ist, müssen wenigstens zwei der Grundoperationen angewendet werden; z. B. muß ein Ebenenbüschel durch eine Ebene *geschnitten* und das so gefundene Strahlenbüschel aus einem Punkte *projiziert* werden, um wieder ein Ebenenbüschel zu erhalten. *Die projektive Geometrie beschäftigt sich mit den projektiven Eigenschaften der Figuren.* Das Wort stammt von Poncelet (*Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822).

Eine Beziehung oder Korrespondenz zwischen zwei geometrischen Figuren heißt *wechselweise eindeutig* oder kurz *eindeutig*, wenn jedem Element der einen Figur ein einziges Element der anderen Figur als *homologes* oder *entsprechendes* Element zugeordnet wird.

Sind U, U', U'' geometrische Figuren und besteht zwischen U und U' eine eindeutige Beziehung π und zwischen U' und U'' eine eindeutige Beziehung π', so wird auch zwischen U und U'' eine eindeutige Beziehung π'' hergestellt, indem man einem Ele-

ment $\mathfrak{A}$ von U dasjenige Element $\mathfrak{A}''$ von U'' entsprechen läßt, das dem zu $\mathfrak{A}$ durch π zugeordneten Element $\mathfrak{A}'$ von U' durch π' zugeordnet wird. Man nennt π'' dann das *Produkt* von π und π', in Zeichen: $\pi'' = \pi\pi'$.

Zwei Grundgebilde gleicher Stufe *verschiedener Art* (d. h. mit verschiedenartigen erzeugenden Elementen) heißen *perspektiv*, wenn das eine durch Schneiden oder Projizieren aus dem anderen hervorgeht und die vereinigt liegenden Elemente als entsprechende einander zugewiesen werden.

Zwei Grundgebilde gleicher Stufe und *gleicher* Art heißen *perspektiv*, wenn sie durch die gleiche Grundoperation aus einem und demselben Grundgebilde anderer Art hervorgehen und als entsprechende Elemente solche einander zugewiesen werden, die mit demselben Elemente des vermittelnden Grundgebildes vereinigt liegen.

Perspektivität heißt die Beziehung zwischen zwei perspektiven Grundgebilden.

Seien $u, u', \ldots u^{(n)}$ Grundgebilde gleicher Stufe, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind und von denen jedes zu dem vorhergehenden und dem folgenden perspektiv ist, dann ergibt sich zwischen u und $u^{(n)}$ eine Beziehung, deren Wesen darin besteht, daß sie sich durch wiederholtes Projizieren und Schneiden herstellen läßt, und die als *projektive Beziehung* bezeichnet wird.

Wenn man in den Sätzen I bis IV die Worte *Punkt* und *Ebene* vertauscht, das Wort *Gerade* läßt und gleichzeitig die daraus folgenden Änderungen im Ausdruck vornimmt, so erhält man jedesmal einen anderen derselben acht Sätze. Führt man in den sämtlichen Axiomen dieselben Änderungen aus, so gehen sie wieder in gültige Sätze über. Daraus folgt, daß in jedem aus den Axiomen durch logische Prozesse abgeleiteten Satze dieselben Vertauschungen vorgenommen werden können, ohne daß der Satz aufhört, richtig zu sein. Der so gewonnene neue Satz heißt der zum ursprünglichen *duale*, *korrelative* oder *reziproke Satz*. Das hiermit ausgesprochene Prinzip heißt das *Dualitätsprinzip*. Die Vertauschungen, welche es bedingt, lassen sich durch folgendes Schema übersichtlich machen:

Punkte auf einer Geraden	Ebenen durch eine Gerade
Punkte in einer Ebene	Ebenen durch einen Punkt
Gerade durch einen Punkt	Gerade in einer Ebene
Sich schneidende Gerade	Sich schneidende Gerade.

Anderseits folgt aus einem Satz, der für Gerade und Ebenen eines Bündels gilt, indem wir die Figur durch eine Ebene schneiden,

ein Satz, der für Punkte und Gerade einer Ebene gilt. Nach dem Dualitätsprinzip entspricht aber einem solchen Satze ein anderer Satz, bei dem die Punkte durch die Ebenen, die Geraden durch die Strahlen eines Bündels ersetzt sind. Verbindet man diese beiden Zuordnungen, so erhält man die *Dualität im Bündel*, bei der die Strahlen und Ebenen eines Bündels vertauscht und die Strahlen eines Büschels durch die Ebenen eines Büschels im Bündel ersetzt werden.

Aus der Dualität im Bündel ist, wenn man das Bündel durch eine Ebene schneidet, die *Dualität im ebenen Feld* eine unmittelbare Folge. Dabei sind die Punkte und Geraden des ebenen Feldes zu vertauschen und Punkte einer Punktreihe durch Strahlen eines Büschels zu ersetzen.

Aus dem räumlichen Dualitätsprinzip folgt sofort: *die Operationen des Projizierens und Schneidens sind im Raume dual.*

Um das duale Entsprechen übersichtlich zu machen, werden korrespondierende Sätze nach dem Vorgange Steiners (*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*, Berlin 1832, Werke Bd. 1, *Ostwalds Klassiker* 82, 83) in zwei Spalten derselben Seiten nebeneinander gestellt.

Ein *ebenes vollständiges n-Eck* ist die Figur, die sich zusammensetzt aus n Punkten einer Ebene als den *Ecken*, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen dürfen, und den $\binom{n}{2}$ Verbindungslinien dieser Punkte als den *Seiten*.

Ein *ebenes vollständiges n-Seit* ist die Figur, die sich zusammensetzt aus n Geraden einer Ebene als den *Seiten*, von denen keine drei durch einen Punkt gehen dürfen, und den $\binom{n}{2}$ Schnittpunkten dieser Geraden als den *Ecken*.

Die Dualität im Raume ordnet diesen Figuren das vollständige zentrische n-Kant und das vollständige zentrische n-Flach zu.

Besonders wichtige Spezialfälle dieser Figur ergeben für $n = 3$ und $n = 4$. Für $n = 3$ bekommt man das *Dreieck* oder *Dreiseit*, was dasselbe ist. Für $n = 4$ erhält man das *vollständige Viereck* und *vollständige Vierseit*.

Bei einem *Viereck* heißen *gegenüberliegend* zwei Seiten, wenn in beiden zusammen alle vier Ecken enthalten sind. Es gibt drei Paare gegenüberliegen-

Bei einem *Vierseit* heißen *gegenüberliegend* zwei Ecken, wenn durch beide zusammen alle vier Seiten gehen. Es gibt drei Paare gegenüberliegender Ecken.

der Seiten. Ihre Schnittpunkte heißen die *Diagonalpunkte* des Vierecks, sie bestimmen das *Diagonaldreieck* des Vierecks.

Ihre Verbindungslinien heißen die *Diagonalen* des Vierseits, sie bestimmen das *Diagonaldreiseit* des Vierseits.

Ein *ebenes einfaches n-Eck* besteht aus n in einer bestimmten zyklischen Reihenfolge genommenen Punkten, den *Ecken*, und den n Geraden, den *Seiten*, welche je zwei aufeinanderfolgende Ecken verbinden. Dabei dürfen keine drei aufeinanderfolgende Ecken in einer Geraden liegen.

Ein *ebenes einfaches n-Seit* besteht aus n in einer bestimmten zyklischen Reihenfolge genommenen Geraden, den *Seiten*, und den n Punkten, den *Ecken*, in denen sich je zwei aufeinanderfolgende Seiten schneiden. Dabei dürfen keine drei aufeinanderfolgende Seiten durch einen Punkt gehen.

Ein *räumliches vollständiges n-Eck* ist die Figur, die sich zusammensetzt aus n Punkten, von denen keine vier in einer Ebene liegen dürfen, (den *Ecken*), den $\binom{n}{2}$ Geraden, welche die Ecken paarweise verbinden, (den *Kanten*) und den $\binom{n}{3}$ Ebenen, welche die Ecken zu dreien verbinden, (den *Seitenflächen*). Hierzu dual ist das *räumliche vollständige n-Flach*.

Es sei in einer Ebene gegeben ein Punkt C, eine nicht durch ihn gehende Gerade c und zwei Punkte A, A', die mit C in gerader Linie liegen. *Dann ordnen wir einem Punkte B außerhalb CA einen anderen Punkt B' zu, indem wir A mit B verbinden, darauf A' mit dem Schnittpunkt S von AB und c, und endlich C mit B, der Schnittpunkt der letzteren beiden Linien ist dann B'.* Die Linie AB heiße a, $A'B'$ heiße a'. Weisen wir auf die gleiche Weise jedem Punkte P der Ebene einen anderen Punkt P' zu, so ergeben sich die Sätze: *Sind P, Q zwei Punkte, P', Q' die entsprechenden Punkte, so schneiden die Linien PQ und $P'Q'$ sich auf c. Die Punkte der Achse c und das Zentrum C entsprechen sich selbst. Den Punkten eines Strahles durch C entsprechen Punkte desselben Strahls. Den Punkten irgendeiner geraden Linie entsprechen wieder die Punkte einer geraden Linie, und die beiden Linien schneiden sich auf c. Zu einer Linie p findet man die entsprechende p', indem man den Schnittpunkt B von p und a mit C verbindet und den Schnittpunkt B' dieser Linie und der Geraden a' mit dem Schnittpunkt S von p und c verbindet, diese Verbindungslinie ist dann p'.* Eine solche Zuordnung der Punkte einer Ebene wollen wir eine *perspektive Zuordnung* nennen.

Zwei Dreiecke, die in dieser perspektiven Zuordnung einander entsprechen, liegen so, daß ihre homologen Seiten sich auf der Achse c schneiden und die Verbindungslinien homologer Ecken durch das Zentrum C gehen. So kommt man zum Desarguesschen Dreieckssatz zurück (S. 55).

Vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe heißen *vier harmonische Punkte*, wenn ein ebenes vollständiges Viereck existiert, von dem zwei gegenüberliegende Seiten durch A, zwei andere gegenüberliegende Seiten durch B und die zwei letzten Seiten durch C und D gehen.

Vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Büschels heißen *vier harmonische Ebenen*, wenn ein vollständiges Vierflach existiert, von dem zwei gegenüberliegende Kanten in α, zwei andere gegenüberliegende Kanten in β und die beiden letzten Kanten in γ und δ liegen.

Schneidet man die vier harmonischen Ebenen durch eine Ebene, so erhält man *vier harmonische Strahlen* a, b, c, d eines Strahlenbüschels. Dann existiert ein vollständiges ebenes Vierseit, von dem zwei gegenüberliegende Ecken auf a, zwei andere auf b, und die letzten beiden auf c und d liegen.

Sind vier harmonische Punkte oder Strahlen durch ein Viereck oder Vierseit gefunden, so gibt es, auch in derselben Ebene, immer noch unendlich viele, die durch eine perspektive Zuordnung verknüpft sind und dieselben vier harmonischen Punkte oder Strahlen liefern.

Drei Punkte einer Geraden, A, B, C, von denen A, B als ein Paar einander zugeordnet sind, bestimmen einen vierten harmonischen Punkt D. Die Vierseitkonstruktion, die zu ihm führt, ist aus der Definition der harmonischen Punkte leicht abzuleiten.

§ 3. Projektive Beziehungen zwischen Grundgebilden erster Stufe.

Drei Punkte A, B, C einer Geraden definieren eine (projektive) *Strecke* (ACB). Ein Punkt P gehört zu der Strecke, wenn Uml. (ACB) = Uml. (APB) ist. Dann ergibt sich eine *komplementäre Strecke*, zu der alle Punkte der Geraden zu rechnen sind, die nicht zu der ersten Strecke gehören. Ist D irgendein Punkt der komplementären Strecke, so ist diese durch das Symbol (ADB) gekennzeichnet. A, B heißen die *Grenzpunkte* der beiden Strecken. Zwei Punkte P, Q heißen *getrennt* durch A, B, wenn sie zu den komplementären Strecken (ACB), (ADB) gehören.

Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so sind A, B durch C, D getrennt, und zwar, wie wir sagen, *harmonisch getrennt*, umgekehrt sind auch C, D durch A, B harmonisch getrennt. Wenn C in einen der Punkte A, B fällt, fällt D in denselben Punkt. Die analogen Betrachtungen gelten für harmonische Strahlen und harmonische Ebenen. *Die harmonische Lage ist eine projektive Eigenschaft.* Den gegebenen Sätzen reihen sich die folgenden unmittelbar an:

Werden die Seiten eines ebenen vollständigen Vierecks von einer Geraden geschnitten, so bestimmen die Paare gegenüberliegender Seiten drei Punktepaare einer Involution (Desarguesscher Viereckssatz).

Werden die Ecken eines ebenen vollständigen Vierseits aus einem Punkte seiner Ebene projiziert, so bestimmen die Paare gegenüberliegender Ecken drei Strahlenpaare einer Involution.

Hält man von einem vollständigen Viereck vier Seiten l, m, n, p fest, von denen l, m, n sich in drei Ecken L, M, N des Vierecks schneiden, während p durch L geht und MN in U trifft, so wird, wenn die vierte Ecke P auf p wandert, eine Gerade a durch U von den beiden beweglichen Seiten MP und NP in zwei auf diese Weise eindeutig einander zugeordneten Punkten Q, R geschnitten. Diese Zuordnung nennt Schur (*Math. Ann.* **55** (1901) 182) eine *Prospektivität*, Pasch (*Vorl. über neuere Geom.*, p. 121) eine *Äquivalenz*. Sie hat projektiven Charakter und ist auf der Geraden bestimmt durch U und die Schnittpunkte S, T der Geraden LM, LN mit a. Wir bezeichnen diese Prospektivität durch (ST, U). Die Aufeinanderfolge zweier Prospektivitäten ist wieder eine Prospektivität.

Wir definieren nun: Der projektive Abstand eines Punktes A von einem Punkte O ist durch vier Punkte der Geraden OA oder a, nämlich O, A und zwei feste Punkte, U (den *Unendlichkeitspunkt*) und E (den *Einheitspunkt*), bestimmt. Lassen wir auch den Punkt O fest, so heißt er *Nullpunkt* der Abstände (OA).

Die Summe der Abstände (OA) und (OB) auf a ist der Abstand (OC), wenn die Prospektivität (OC, U) die Aufeinanderfolge der Prospektivitäten (OA, U) und (OB, U) ersetzt. Wir schreiben

$$(OA) + (OB) = (OC).$$

Es sind dann O, A zugeordnete Punkte in der Prospektivität (BC, U), O, B in (AC, U). Die Additionsgleichung hat pro-

jektiven Charakter. Die Addition ist kommutativ und assoziativ. Der Abstand (OO) ist 0. Bildet man weiter

$$(AB) + (AC) = (AD), \quad (BC) + (BD) = (BF)$$

usw., so bilden die Punkte $OABCDF \ldots$ eine Fundamentalreihe, deren Verdichtungsstelle U ist. Sind A und $\bar{A}$ durch OU harmonisch getrennt, so setzt man

$$(OA) + (O\bar{A}) = 0 .$$

Gehört A der Strecke (OEU) an, so nehmen wir (OA) *positiv*, $(O\bar{A})$ *negativ*.

Fallen A und B zusammen, so wird $(OC) = 2(OA)$ gesetzt, und A, U werden durch O, C harmonisch getrennt. Man kann dann eine Fundamentalreihe O, A_1, A_2, $\ldots$ A_n, $\ldots$ so konstruieren, daß A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, U immer vier harmonische Punkte sind. Man kann ferner eine Fundamentalreihe $OA_{\frac{1}{2}}A_1A_{\frac{3}{2}}\ldots$ so konstruieren, daß wieder drei konsekutive Punkte mit U zusammen vier harmonische Punkte bilden, darauf eine Reihe $OA_{\frac{1}{4}}A_{\frac{2}{4}}A_{\frac{3}{4}}A_1 \ldots$ von gleicher Eigenschaft usw. Die Punkte, die die man so bekommt, sollen in ihrer Gesamtheit eine *harmonische Punktmenge* heißen. Es ergibt sich dann: Jeder Teilstrecke von OA_1U gehört mindestens ein Punkt der harmonischen Punktmenge an (die Punktmenge ist überall dicht) [Beweis von Lüroth und Zeuthen, mitgeteilt von Klein, *Math. Ann.* **7** (1874) 535].

Satz von Pasch (*Vorl. üb. n. Geom.* S. 123)*: Gehen durch wiederholte Projektion vier Punkte A, B, C, D einer Geraden a in vier Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 einer anderen Geraden b über, und auf andere Weise durch wiederholte Projektion dieselben Punkte A, B, C, D in vier Punkte A_2, B_2, C_2, D_2 von b, fällt dann A_1 mit A_2, B_1 mit B_2, C_1 mit C_2 zusammen, so fällt auch D_1 mit D_2 zusammen.*

Da die Beziehung, die durch wiederholte Projektion zwischen zwei Punktreihen hergestellt wird, eine *projektive* Beziehung (bezeichnet durch $\overline{\wedge}$) ist, folgt aus dem vorigen Satze der *Staudtsche Fundamentalsatz:*

Die projektive Beziehung zweier Punktreihen ist eindeutig bestimmt, wenn zu drei Punkten A, B, C der einen die entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1 der anderen bekannt sind.

Fallen die Träger zweier projektiver Punktreihen zusammen, so können nicht mehr als zwei Punkte mit ihren entsprechenden

zusammenfallen, ohne daß alle Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen.

Satz von Schur: Zwei projektive Punktreihen in einer Ebene sind immer zu derselben dritten Punktreihe, deren Träger die Verbindungslinie irgend zweier getrennt liegenden, nicht homologen Punkte der ersten beiden Punktreihen ist, perspektiv.

Ferner ergibt sich der von Staudt zur Definition projektiver Punktreihen benutzte Satz:

Zwei Punktreihen sind projektiv, wenn vier harmonischen Punkten der einen immer wieder vier harmonische Punkte der anderen zugeordnet sind. —

Zwei projektive Punktreihen einer Ebene sind perspektiv, wenn der gemeinsame Punkt ihrer Träger sich selbst entspricht.

Aus diesem Satze und dem Schurschen Satze ist der Pascalsche Satz (S. 55) eine unmittelbare Folge. Aber auch umgekehrt folgt aus dem *Pascalschen Satze* und dem *Satze von Schur* wieder der vorstehende Satz und damit auch der *Fundamentalsatz* (Schur, *Math. Ann.* **51**, 401). Der Satz von Schur wird mittels des Desarguesschen Satzes bewiesen, auf dem auch die Theorie der harmonischen Elemente aufgebaut ist. *So läßt sich die ganze projektive Geometrie ohne ein Stetigkeitsaxiom mit Hilfe des Pascalschen und des Desarguesschen Satzes begründen.* Weil aber außerdem nach Hessenberg (*Math. Ann.* **61**, 162) der letztere eine Folge des ersteren ist, so ergibt sich, daß *zur Begründung der projektiven Geometrie der Pascalsche Satz und die graphischen Axiome ausreichen,* analog dem in Kap. V, § 2 für die affine Geometrie gewonnenen Resultat.

Auf Grund des Pascalschen Satzes aber läßt sich eine kommutative Multiplikation der projektiven Abstände festlegen. Man setzt

$$(OA)(OB) = (OC),$$

wenn

$$OEAU \nearrow OBCU$$

ist. Aus dem Pascalschen Satz folgt dann auch

$$OEBU \nearrow OACU,$$

also $(OB)(OA) = (OC)$. Die Multiplikation befolgt ferner das assoziative und distributive Gesetz.

Macht man $(OE) = 1$, so entspricht jedem Abstande (OA) eine *Zahl,* und die Abstände befolgen die Rechenregeln der gewöhnlichen Zahlen. Diese Zahlen haben die Bedeutung von *Doppelverhältnissen.* Sie sind aber hier direkt, ohne Zurückführung

auf die einfachen Verhältnisse begründet, ebenso wie wir die letzteren im vorigen Kapitel direkt, ohne die Zurückführung auf die Abstände der Punkte einer Geraden, begründet haben.

Was für projektive Punktreihen ausgeführt ist, gilt in entsprechender Modifikation auch für Strahlenbüschel derselben Ebene. Insbesondere lassen sich die Sätze gegenüberstellen:

Zwei projektive Punktreihen sind Schnitte zweier perspektiven (d. h. dieselbe Punktreihe projizierenden) Strahlenbüschel.

Projiziert man in der Ebene zwei projektive Punktreihen u, u' aus zwei Punkten S, S' einer (nicht mit u oder u' zusammenfallenden) Verbindungslinie homologer Punkte A, A', so sind die projizierenden Strahlenbüschel perspektiv, d. h. ihre entsprechenden Strahlen schneiden sich in den Punkten einer Geraden u_0.

Im Fall die Punkte S, S' mit A', A zusammenfallen, ändert sich die Gerade u_0 nicht, wenn man von A, A' zu einem anderen Paare entsprechender Punkte übergeht, und heißt dann die Projektivitätsachse der beiden Punktreihen. Sind BB', CC' irgend zwei Paare entsprechender Punkte, so schneiden die Linien $BC', B'C$ sich auf u_0. Sind D, E' die Punkte, die, wenn die Punktreihen nicht perspektiv sind, dem gemeinsamen Punkte der beiden Punktreihen jedesmal in der anderen Punktreihe entsprechen, so verbindet u_0 D mit E'.

Zwei projektive Strahlenbüschel sind Projektionen zweier perspektiven (d. h. durch dasselbe Strahlenbüschel ausgeschnittenen) Punktreihen.

Schneidet man in der Ebene zwei projektive Strahlenbüschel U, U' durch zwei Gerade s, s', die durch den (nicht mit einem der Büschelscheitel zusammenfallenden) Schnittpunkt zweier homologen Strahlen a, a' der beiden Büschel gehen, so sind die ausgeschnittenen Punktreihen perspektiv, d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt U_0.

Im Fall die Geraden s, s' mit a', a zusammenfallen, ändert sich der Punkt U_0 nicht, wenn man von a, a' zu einem anderen Paare entsprechender Strahlen übergeht, und heißt dann das Projektivitätszentrum der beiden Strahlenbüschel. Sind bb', cc' irgend zwei Paare entsprechender Strahlen, so geht die Verbindungslinie der Punkte (bc'), $(b'c)$ durch U_0. Sind d, e' die Strahlen, die, wenn die Strahlenbüschel nicht perspektiv sind, dem gemeinsamen Strahl der beiden Strahlenbüschel jedesmal in dem anderen Strahlenbüschel entsprechen, so schneiden sich d, e' in U_0.

Gehen wir zu Punktreihen mit windschiefen Trägern und zu Ebenenbüscheln über, so ergeben sich zuerst die Sätze:

Zwei windschiefe Punktreihen u und u' werden projektiv aufeinander bezogen, indem man drei Punkten A, B, C der ersten, u, irgend drei Punkte A', B', C' von u' als entsprechende zuweist. Dabei läßt sich immer ein Ebenenbüschel finden, zu dem die Punktreihen perspektiv sind, d. h. durch dessen Ebenen die Paare entsprechender Punkte ausgeschnitten werden.

Zwei Ebenenbüschel π, π' mit windschiefen Achsen werden projektiv aufeinander bezogen, indem man drei Ebenen α, β, γ des ersten, π, irgend drei Ebenen α', β', γ' von π' als entsprechende zuweist. Dabei läßt sich immer eine Punktreihe finden, zu der die Ebenenbüschel perspektiv sind, d. h. durch deren Punkte die Paare entsprechender Ebenen hindurchgehen.

Fallen die Träger zweier Punktreihen zusammen, so sind bezüglich der Doppelpunkte, d. h. der sich selbst entsprechenden Punkte, vier Fälle zu unterscheiden: 1. es existieren zwei reelle, getrennte Doppelpunkte, dann heißt die Projektivität *hyperbolisch*; 2. die Doppelpunkte fallen zusammen, d. h. es existiert nur ein sich selbst entsprechender Punkt, dann heißt die Projektivität *parabolisch*; 3. es existieren keine reellen Doppelpunkte, dann heißt die Projektivität *elliptisch*; 4. alle Punkte fallen mit ihren entsprechenden zusammen und die Projektivität wird zur *Identität*.

Entsprechen den Punkten A, B, C die Punkte A', B', C', so heißt die Projektivität *konkordant*, wenn Uml. $ABC =$ Uml. $A'B'C'$, und *diskordant*, falls Uml. $ABC =$ Uml. $A'C'B'$. Eine diskordante Projektivität ist immer hyperbolisch; eine elliptische oder parabolische Projektivität muß immer konkordant sein. Eine hyperbolische Projektivität ist festgelegt, wenn außer den Doppelpunkten ein Paar entsprechender Punkte gegeben ist; die Projektivität ist *diskordant* oder *konkordant*, je nachdem die Doppelelemente durch das Paar entsprechender Punkte getrennt werden oder nicht. Eine parabolische Projektivität wird bestimmt durch das Doppelelement und ein Paar entsprechender Elemente. Die gleichen Unterscheidungen und Benennungen gelten für projektive Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel und projektive Ebenenbüschel mit gemeinsamer Achse.

Eine nicht identische Projektivität zwischen zwei trägergleichen Grundgebilden 1. Stufe U, U' heißt *involutorisch*, wenn in ihr ein Paar nicht zusammenfallender und damit alle Paare homologer Elemente sich in doppelter Weise entsprechen, d. h.

wenn sowohl einem Elemente A, das man zu U rechnet, ein Element A' entspricht, das zu U' gehört, als auch dem Elemente A', wenn man es zu U rechnet, das Element A als Element von U' zugeordnet ist. Die Elemente A, A' heißen dann *konjugierte* Elemente der Involution. Sind die Doppelelemente reell, so werden sie durch die Paare konjugierter Elemente harmonisch getrennt. In einer elliptischen Involution trennen sich immer zwei Paare konjugierter Elemente, während in der hyperbolischen Involution zwei Paare konjugierter Elemente sich nie trennen. Eine elliptische Involution ist immer konkordant, eine hyperbolische Involution immer diskordant. Eine parabolische Involution (deren Doppelpunkte zusammenfallen) gibt es bei dieser Definition der Involution nicht. Eine Involution ist bestimmt durch zwei Paar konjugierter Elemente, die aber kein gemeinsames Element haben dürfen, während die Elemente eines Paares zusammenfallen können.

Zwei Involutionen in Grundgebilden mit demselben Träger haben ein reelles Paar entsprechender Elemente gemein, wenn sie nicht zugleich beide hyperbolisch sind und die Doppelemente der einen durch die Doppelelemente der anderen getrennt werden.

In jedem Grundgebilde gibt es ein und nur ein Paar von Elementen, die zwei gegebene, sich nicht trennende Paare von Elementen harmonisch trennen.

Nach dem Desarguesschen Viereckssatz läßt sich in einer Involution zu jedem Punkte der konjugierte linear konstruieren, wenn die Involution durch zwei Paare konjugierter Punkte gegeben ist.

Eine Projektivität zwischen trägergleichen Grundgebilden 1. Stufe, bei der irgendeinem Elemente P des ersten ein Element P' des zweiten, dem Element P' des ersten ein Element P'' des zweiten usf., schließlich dem Element $P^{(n-1)}$ des ersten wieder das Element P des zweiten Grundgebildes entspricht, heißt *zyklisch* von der *Ordnung* n, und die Punktgruppen $PP' \ldots P^{(n-1)}$ heißen ihre *Zykeln*. Die Involutionen sind zyklische Projektivitäten der Ordnung 2.

§ 4. Projektive Beziehungen zwischen Grundgebilden zweiter Stufe.

Zwei Grundgebilde 2. Stufe heißen *projektiv* und die Beziehung zwischen ihnen eine *Projektivität*, wenn sie so aufeinander bezogen sind, daß jedem Element des einen ein einziges Element des anderen entspricht und den Elementen eines Grundgebildes

1. Stufe, das in dem einen der beiden Grundgebilde 2. Stufe enthalten ist, in dem anderen wieder die Elemente eines Grundgebildes 1. Stufe entsprechen.

Da durch die Grundoperationen sich alle in Betracht kommenden Grundgebilde auf ebene Felder zurückführen lassen, wollen wir die Betrachtung auf diese beschränken.

Zwei ebene Felder heißen *kollinear* (*homographisch*), wenn sie so projektiv aufeinander bezogen sind, daß entsprechende Elemente von *gleicher* Art sind, *reziprok* (*korrelativ*), wenn in der Projektivität Elemente verschiedener Art, d. h. Punkte und Gerade, einander entsprechen. *Kollineation* und *Korrelation* heißen die Beziehungen selbst.

Zwei ebene Felder, die zu einem dritten beide kollinear oder beide reziprok sind, sind zueinander kollinear. Zwei ebene Felder, von denen das eine zu einem dritten Felde kollinear, das andere zu diesem selben Felde reziprok ist, sind zueinander reziprok.

Zwei ebene Felder, die durch wiederholtes Projizieren und Schneiden aufeinander bezogen werden, sind kollinear.

Es gilt nun das grundlegende allgemeine Theorem: *Zwei Grundgebilde 1. Stufe, die in projektiven Grundgebilden 2. Stufe einander entsprechen, sind selbst projektiv aufeinander bezogen.*

Also sind entsprechende Punktreihen und Strahlenbüschel in kollinearen Feldern projektiv, und bei zwei reziproken Feldern ist eine Punktreihe in dem einen projektiv zu dem entsprechenden Strahlenbüschel in dem anderen.

Eine Projektivität zwischen zwei Grundgebilden 2. Stufe ist bestimmt, wenn zu vier Elementen von gleicher Art des einen die entsprechenden Elemente des anderen gegeben sind, vorausgesetzt, daß keine drei der vier Elemente einem Grundgebilde 1. Stufe angehören. Dieser Satz ist gleichbedeutend mit dem folgenden:

Zwischen zwei Grundgebilden 2. Stufe existiert eine einzige Projektivität, bei der zwei gegebene Paare von Grundgebilden 1. Stufe in einer vorgeschriebenen projektiven Beziehung stehen, so daß die dem einen und anderen Paare gemeinsamen Elemente einander als entsprechende zugeordnet sind.

Eine nicht auf die Identität hinauslaufende Kollineation zwischen zwei übereinander gelagerten Feldern kann nicht vier Doppelelemente (d. h. sich selbst entsprechende Punkte oder Gerade) haben, von denen keine drei einem Grundgebilde 1. Stufe angehören. Gehören aber drei einem Grundgebilde 1. Stufe an, so haben die beiden Felder *alle* Elemente dieses Grundgebildes zu Doppelelementen. Sie besitzen dann eine Punktreihe, deren

Punkte, und ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen sich selbst entsprechen, und wir gelangen zu der oben bereits behandelten *perspektiven Kollineation.*

Dafür, daß zwei getrennt liegende kollineare ebene Felder *perspektiv* sind, ist die notwendige und hinreichende Bedingung die, daß sie die Punkte ihrer Schnittlinien entsprechend gemein haben.

Eine *involutorische Kollineation* zwischen zwei übereinander gelagerten Feldern ist immer perspektiv und dadurch charakterisiert, daß ein und damit jedes Paar entsprechender Punkte durch das Zentrum und den Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit der Achse harmonisch getrennt wird.

Affinität, Ähnlichkeit und Kongruenz sind spezielle Fälle der Kollineation.

Eine *involutorische Korrelation* heißt *Polarität* oder *Polarsystem.* Ein ebenes Polarsystem kann definiert werden als eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten und Geraden der Ebene von der Art, daß, wenn eine Gerade p durch einen Punkt P' geht, der der Geraden p entsprechende Punkt P auf der dem Punkt P' entsprechenden Geraden p' liegt.

Ein Punkt heißt dann der *Pol* seiner entsprechenden Geraden und eine Gerade die *Polare* ihres entsprechenden Punktes.

Eine Korrelation ist eine Polarität, wenn ein Dreieck existiert, in welchem jede Seite der gegenüberliegenden Ecke als entsprechende Gerade zugeordnet ist. Ein solches Dreieck heißt dann ein *Polardreieck* der Polarität. Solche Polardreiecke gibt es in jeder Polarität unendlich viele, es kann von ihm eine Ecke und eine durch diese Ecke gehende Seite beliebig angenommen werden, dadurch ist das Polardreieck eindeutig bestimmt.

Die Polarität ist bestimmt durch ein Polardreieck und ein Paar entsprechender Elemente, von denen keines mit einem Elemente des Polardreiecks vereinigt liegt.

In einem ebenen Polarsystem heißen

zwei Punkte *konjugiert*, wenn der eine auf der Polare des anderen liegt.

Selbstkonjugiert heißt ein Punkt, der auf seiner eigenen Polaren liegt.

Durch einen selbstkonjugierten Punkt geht eine einzige selbstkonjugierte Gerade, seine Polare.

zwei Gerade *konjugiert*, wenn die eine durch den Pol der anderen geht.

Selbstkonjugiert heißt eine Gerade, die durch ihren eigenen Pol geht.

In einer selbstkonjugierten Geraden liegt ein einziger selbstkonjugierter Punkt, ihr Pol.

Durch einen nicht selbstkonjugierten Punkt gehen unendlich viele Paare konjugierter Strahlen, diese bilden eine Strahleninvolution, die der Polarität *subordiniert* ist.

Durch einen nicht selbstkonjugierten Punkt gehen *zwei* selbstkonjugierte Strahlen oder *keiner*.

Auf einer nicht selbstkonjugierten Geraden liegen unendlich viele Paare konjugierter Punkte, diese bilden eine Punktinvolution, die der Polarität *subordiniert* ist.

Auf einer nicht selbstkonjugierten Geraden liegen *zwei* selbstkonjugierte Punkte oder *keiner*.

Die Polaritäten zerfallen in zwei Kategorien:

1. Die *gleichförmigen Polaritäten,* die keine selbstkonjugierten Elemente enthalten. In diesen liegen die Polaren so, daß, wenn p, p' die Polaren zweier Punkte P, P' sind und P_1 der Schnittpunkt der Linie PP' mit p, P_1' ihr Schnittpunkt mit p' ist, stets P, P_1 durch P', P_1' *getrennt* werden.

2. Die *ungleichförmigen Polaritäten,* die selbstkonjugierte Elemente besitzen. Eine solche sei durch ein Polardreieck und die Polare p eines Punktes P gegeben; projiziert man dann P aus den Ecken des Polardreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten und nimmt die Schnittpunkte der Seiten mit p, so werden nie auf allen Seiten die Ecken durch die so ermittelten Punkte getrennt.

In einer ungleichförmigen Polarität existieren drei Kategorien von Geraden, je nachdem sie zwei, einen oder keinen selbstkonjugierten Punkt enthalten, und entsprechend auch drei Kategorien von Punkten, je nachdem durch sie zwei, eine oder keine selbstkonjugierte Gerade geht.

Wenn ein ebenes Polarsystem *ein* selbstkonjugiertes Element enthält, enthält es unendlich viele selbstkonjugierte Punkte und unendlich viele selbstkonjugierte Geraden. Die Punkte sind die *Punkte* und die Geraden die *Tangenten* eines *Kegelschnittes*, der der *Ordnungskegelschnitt* des Polarsystems heißt (vgl. Kap. XI).

Aus dem ebenen Polarsystem folgt durch das Dualitätsprinzip die *Polarität im Bündel,* bei der sich die Strahlen und Ebenen des Bündels in eindeutiger Weise entsprechen.

Bei irgendeiner Kollineation bleiben alle projektiven Eigenschaften erhalten. Bei einer Korrelation geht jede Eigenschaft einer Figur in die entsprechende der dual korrespondierenden Figur über. Man kann demnach die Korrelationen als ein Mittel ansehen, um das Dualitätsprinzip in der Ebene und im Bündel zu begründen. In dieser Hinsicht ist der Streit von Bedeutung, der zwischen Poncelet und Gergonne um die Entdeckung des

Dualitätsprinzips entbrannte. Poncelet hatte seine Begründung in der Polarität gefunden, Gergonne dagegen hatte es in den geometrischen Grundlagen gesucht, ohne indes über die bloße Tatsache der Analogie hinauszukommen. Man vgl. hierzu Poncelet, *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, Journ. f. Math.* **4**, 1 (1829), in der 2. Aufl. des *Traité*, Vol. 2, p. 57, Gergonne, *Ann. de Math.* **15**, 157, **16**, 209, **17**, 214 (1825—27).

§ 5. Projektive Beziehungen zwischen Grundgebilden dritter Stufe.

Zwei Räume heißen *kollinear* (*homographisch*), wenn sie derart aufeinander bezogen sind, daß jedem Punkt des einen ein einziger Punkt des anderen entspricht, den Punkten einer Geraden immer wieder die Punkte einer Geraden und damit den Punkten einer Ebene immer wieder die Punkte einer Ebene zugeordnet sind.

Zwei Räume heißen *reziprok* (*korrelativ*), wenn sie derart aufeinander bezogen sind, daß jedem Punkte des einen eine einzige Ebene des anderen entspricht und hierbei den Punkten einer geraden Punktreihe immer die Ebenen eines Ebenenbüschels und damit den Punkten eines ebenen Feldes die Ebenen eines Ebenenbündels entsprechen. Auf diese Weise wird auch einem Punkte des zweiten Raumes (dem Scheitel des Ebenenbündels) eine Ebene des ersten Raumes (der Träger des ebenen Feldes) zugeordnet, und die Beziehung zwischen den beiden Räumen ist durchaus wechselseitig. Kollineation und Korrelation gelten als die projektiven Beziehungen zwischen den beiden Räumen.

Zwei Räume, die zu demselben dritten in projektiver Beziehung stehen, sind zueinander kollinear oder reziprok, je nachdem die Beziehung zu dem dritten Raum von gleicher oder verschiedener Art ist.

Bei Kollineationen und Korrelationen im Raume entsprechen die Geraden einander (als Träger entweder von Punktreihen oder von Ebenenbüscheln), und den Strahlen eines Strahlenbüschels entsprechen wieder die Strahlen eines Strahlenbüschels.

In projektiven Räumen sind entsprechende Grundgebilde 1. Stufe und 2. Stufe projektiv aufeinander bezogen.

Eine *Kollineation* zwischen zwei Räumen ist festgelegt,

wenn 5 Punkten des einen Raumes, von denen aber keine 4 in einer Ebene liegen dürfen, die

wenn 5 Ebenen des einen Raumes, von denen aber keine 4 durch einen Punkt gehen dürfen,

entsprechenden Punkte des anderen Raumes, die derselben Bedingung unterliegen, zugeordnet sind.

die entsprechenden Ebenen des anderen Raumes, die derselben Bedingung unterliegen, zugeordnet sind.

Eine *Korrelation* zwischen zwei Räumen ist festgelegt, wenn 5 Punkten des einen, von denen keine 4 in einer Ebene liegen, die entsprechenden Ebenen des anderen, von denen keine 4 durch einen Punkt gehen dürfen, zugeordnet sind.

Sehen wir die Räume als ineinanderliegend an, so kann eine Kollineation, ohne eine Identität zu werden, nicht 5 sich selbst entsprechende Punkte, von denen keine 4 in einer Ebene liegen, besitzen, und keine 5 sich selbst entsprechende Ebenen, von denen keine 4 durch einen Punkt gehen.

Existieren mehr als vier sich selbst entsprechende Punkte oder mehr als vier sich selbst entsprechende Ebenen, so existieren unendlich viele. Die sich selbst entsprechenden Punkte können zunächst aus zwei einzelnen Punkten P, Q und allen Punkten einer Geraden r bestehen. Dann entsprechen auch alle Ebenen durch die Gerade PQ oder s sich selbst und außerdem die zwei Ebenen, die r mit P und mit Q verbinden. Diese Kollineation heißt *axial*, r, s sind ihre Achsen. Die sich selbst entsprechenden Punkte können sich aber auch entweder auf zwei windschiefe Geraden, die *Achsen*, verteilen, dann ist die Kollineation eine *biaxiale Homologie*, oder es entsprechen außer einem isolierten Punkte, dem *Homologiezentrum*, alle Punkte einer Ebene, der *Homologieebene*, sich selbst, dann heißt die Kollineation eine *zentrische Homologie*. In beiden Fällen entsprechen auch immer unendlich viele Ebenen sich selbst, die bei einer biaxialen Homologie durch irgendeine der beiden *Achsen* oder bei einer zentrischen Homologie durch das *Zentrum* gehen, im letzteren Falle kommt noch die Homologieebene als eine Ebene, von der jeder Punkt sich selbst entspricht, hinzu. Bei einer *biaxialen Homologie* liegen je zwei entsprechende Punkte P, P' auf einer Geraden, die beide Achsen schneidet, und die beiden Schnittpunkte bilden mit den Punkten P, P' ein konstantes Doppelverhältnis. Bei einer *zentrischen Homologie* liegen je zwei entsprechende Punkte mit dem Zentrum in gerader Linie und bilden ein konstantes Doppelverhältnis mit dem Zentrum und dem Punkte, in dem ihre Verbindungslinie die Homologieebene trifft. Bei der biaxialen Homologie haben zwei entsprechende Ebenen die Schnittpunkte mit den Achsen gemein, bei einer zentrischen Homologie haben sie die Schnittlinie mit der Homologieebene gemein und sind perspektiv aufeinander bezogen.

Bei einer biaxialen Homologie können auch die Achsen zusammenfallen, dann heißt sie *parabolisch* im Gegensatz zu der bisher betrachteten Homologie, die *hyperbolisch* genannt wird. Es gibt noch eine *elliptische Homologie*, bei der überhaupt keine Punkte sich selbst entsprechen, aber unendlich viele Paare entsprechender Punkte auf jeder Geraden liegen, die zwei einander entsprechende Punkte verbindet.

Jede der besprochenen Homologien mit Ausnahme der parabolischen kann *involutorisch* werden. Dann bilden die Paare entsprechender Punkte auf den Strahlen, die sie enthalten, jedesmal eine Involution.

Eine *involutorische Korrelation* heißt ein *räumliches Polarsystem* oder *Polarität*. Sie läßt sich definieren als eine Beziehung zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes, bei der, wenn ein Punkt in einer Ebene liegt, die dem Punkt entsprechende Ebene durch den der Ebene entsprechenden Punkt geht. Punkt und Ebene, die einander entsprechen, heißen *Pol* und *Polarebene*. Als zwei *reziproke Polaren* werden definiert zwei Geraden von der Eigenschaft, daß, wenn ein Punkt auf der einen wandert, seine Polarebene sich um die andere dreht.

In einem räumlichen Polarsystem heißen *konjugiert*

zwei Punkte, wenn der eine in der Polarebene des anderen liegt,

zwei Ebenen, wenn die eine durch den Pol der anderen geht,

ein Punkt und eine Gerade, wenn die Gerade in der Polarebene des Punktes liegt und mithin der Punkt auf der reziproken Polaren der Geraden liegt.

eine Ebene und eine Gerade, wenn die Gerade durch den Pol der Ebene geht und mithin die Ebene durch die reziproke Polare der Geraden geht.

Zwei Gerade sind konjugiert, wenn die eine die reziproke Polare der anderen trifft.

Selbstkonjugiert ist ein Punkt, der in seiner eigenen Polarebene liegt.

Selbstkonjugiert ist eine Ebene, die durch ihren eigenen Pol geht.

Selbstkonjugiert ist eine Gerade, wenn sie ihre reziproke Polare trifft oder mit ihr zusammenfällt.

Ein räumliches Polarsystem heißt ein *eigentliches Polarsystem*, wenn nicht jeder Punkt und damit jede Ebene selbstkonjugiert ist. Ist das Gegenteil der Fall, so heißt das Polarsystem ein *Nullsystem*.

Eine Korrelation im Raum ist ein eigentliches Polarsystem, wenn ein Tetraeder existiert, dessen Seitenflächen den gegenüberliegenden Ecken entsprechen. Ein derartiges Tetraeder heißt ein *Polartetraeder*. Gibt es *ein* solches, so gibt es unendlich viele. Eine Ecke des Polartetraeders, eine durch die Ecke gehende Kante und eine durch diese Kante gehende Seitenfläche können beliebig angenommen werden, dann ist das Polartetraeder jedesmal eindeutig bestimmt.

Ein eigentliches Polarsystem ist festgelegt, wenn außer einem Polartetraeder ein Punkt mit seiner Polarebene gegeben ist, vorausgesetzt, daß die letzteren beiden mit keinem Elemente des Polartetraeders vereinigt liegen.

Die in einer nicht selbstkonjugierten Ebene liegenden Punkte und ihre konjugierten Geraden, die derselben Ebene angehören, stehen in der Beziehung eines ebenen Polarsystems.

Die Paare konjugierter Punkte auf einer nicht selbstkonjugierten Geraden bilden eine Involution.

Die durch einen nicht selbstkonjugierten Punkt gehenden Strahlen und ihre durch denselben Punkt gehenden konjugierten Ebenen stehen in der Beziehung eines Polarsystems im Bündel.

Die Paare konjugierter Ebenen durch eine nicht selbstkonjugierte Gerade bilden eine Involution.

Die Geraden, die in einer selbstkonjugierten Ebene liegen und durch deren Pol gehen, sind einander paarweise konjugiert und bilden eine Involution.

Bei einem *Nullsystem* liegen in jeder Ebene unendlich viele selbstkonjugierte Gerade. Diese bilden ein Büschel, dessen Scheitel der Pol der Ebene ist. Sie heißen nach Moebius die *Nullinien* des *Nullsystems*, der Pol wird der *Nullpunkt* seiner Polarebene und die Ebene selbst *Nullebene* ihres Poles genannt. Wir können also sagen: Die Nullinien, die in einer Ebene liegen, gehen durch den Nullpunkt dieser Ebene. Die Nullinien, die durch einen gegebenen Punkt gehen, liegen umgekehrt immer in einer bestimmten Ebene, der Nullebene des Punktes. Jede Linie, die zwei reziproke Polaren eines Nullsystems trifft, ist stets eine Nullinie. Eine Ebene, die durch eine der reziproken Polaren geht, wird von der anderen in ihrem Nullpunkt geschnitten, und die Nullebene eines Punktes auf einer der beiden Polaren ist die Ebene, die den Punkt mit der anderen Polaren verbindet. Jedes einfache Fünfeck im Raum, von dem keine vier Ecken in einer Ebene liegen, bestimmt ein Nullsystem, in dem jeder Ecke des

Fünfecks die diese Ecke mit den benachbarten Ecken verbindende Ebene als Nullebene zugeordnet ist.

Das Nullsystem ist von Giorgini entdeckt (*Mem. della Soc. Ital. Modena* **20**, *parte mat.*, 1828, p. 243) und dann von Moebius wiedergefunden und ausführlich behandelt worden (*Journ. f. Math.* **10** (1833) 317, *Werke* Bd. 1, S. 489, vgl. sein *Lehrbuch der Statik*, 1837, insbesondere § 84, *Werke* Bd. 1, S. 118ff.).

Für die allgemeinen Grundlagen der projektiven Geometrie sind zunächst zu vergleichen die bereits zitierten grundlegenden Werke von Poncelet, *Traité des propriétés proj. des figures* 1822, und Steiner, *Systematische Entwickelung usw.* 1832 (*Werke* Bd. 1), ferner Moebius' *Barycentrischer Calcul* 1827 (*Werke* Bd. 1). Eine neue Epoche beginnt mit v. Staudts *Geometrie der Lage* 1847, in der zuerst die Prinzipien der projektiven Geometrie von allen metrischen Beimischungen gereinigt sind. Das Werk ist fortgeführt in den *Beiträgen zur Geometrie der Lage*, 3 Teile, 1856 bis 1860. Den Abschluß der Entwicklung in Frankreich bezeichnet Chasles [*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* 1837 (1875, 1883), *Géométrie supérieure* 1852 (1870)].

Unter den neueren Lehrbüchern sind besonders zu nennen:

Reye, *Geometrie der Lage*, zuerst 1866, 1. Teil, 5. Aufl. 1908, 2. Teil, 4. Aufl. 1907, 3. Teil, 4. Aufl. im Erscheinen. Cremona, *Elementi di geometria proiettiva* 1873. Hankel, *Elemente der proj. Geom.* 1875. De Paolis, *Sui fondamenti di geom. proiett.* 1881. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geom.* 1882. Weyr, *Elemente der proj. Geom.*, 2 Teile, 1883, 1887. Sannia, *Geom. proiettiva* 1894. Bobek-Küpper, *Einl. in die proj. Geom. der Ebene* 1897. Döhlemann, *Proj. Geom.* 1898 (Sammlung Göschen). Böger, *Ebene Geom. d. Lage* 1900. Enriques, *Lezioni di geom. proiett.* 1898 (1904), deutsch von Fleischer 1903.

Kapitel VII.

Projektive Koordinaten.

Von *G. Guareschi* in Pavia.

§ 1. Projektive Koordinaten in den Grundgebilden erster Stufe.

Die projektiven Koordinaten lassen sich, entsprechend der doppelten Begründungsart der projektiven Geometrie, auf zweierlei Weisen einführen: man kann entweder von metrischen Beziehungen oder rein projektiven Sätzen ausgehen. In beiden Fällen aber kann man die Koordinaten auf den Begriff des Doppelverhältnisses zurückführen.

Unter einem Grundgebilde erster Stufe verstehen wir wie früher eine gerade Punktreihe, ein Strahlenbüschel oder ein Ebenenbüschel. Wir nehmen in ihm nun drei Elemente, A, B, C, an. Zu jedem vierten Elemente P des Grundgebildes gehört dann ein und nur ein Wert x des Doppelverhältnisses (PC, BA), und umgekehrt, wenn eine Zahl x gegeben ist, so bestimmt sich in eindeutiger Weise *das* Element P des Grundgebildes, für das $(PC, BA) = x$ wird. Diese Zahl x heißt die *projektive Koordinate* des Elementes P. Die Elemente A, B, C heißen die *Grundelemente* des Koordinatensystems und werden, weil $(AC, BA) = \infty$, $(BC, BA) = 0$, $(CC, BA) = 1$, als die Elemente ∞, 0, 1 bezeichnet.

Vom metrischen Gesichtspunkte aus sind einzelne Koordinatensysteme ausgezeichnet. Die wichtigsten sind folgende:

1. In der eigentlichen Punktreihe u lege man einen positiven Richtungssinn und eine Maßeinheit fest, man nehme dann für das Element A den unendlich fernen Punkt der Geraden und für B und C zwei eigentliche Punkte, für welche die Entfernung $BC = 1$ ist, so wird die Koordinate eines beliebigen Punktes P

$$x = (PC, BA) = BP.$$

Dies x heißt *Abszissenkoordinate* und B der *Ursprung* des Koordinatensystems.

2. In einem eigentlichen (zentrischen) Strahlenbüschel U lege man einen positiven Drehsinn fest und nehme für die Grundelemente zwei zueinander senkrechte Strahlen a, b des Büschels und für c den Strahl, für den $\sphericalangle (ac) = \sphericalangle (cb)$. Dann wird die Koordinate eines Strahles p des Büschels

$$x = (pc,\ ba) = \operatorname{tang} (bp).$$

Dies x heißt *Tangentialkoordinate* und b die *Achse* des Koordinatensystems.

Das Doppelverhältnis von vier Elementen P_1, P_2, P_0, P eines Grundgebildes erster Stufe ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer Koordinaten x_1, x_2, x_0, x:

$$(xx_0,\ x_2x_1) = \frac{x - x_2}{x - x_1} : \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1}.$$

Wenn in einem Grundgebilde erster Stufe ein Koordinatensystem festgelegt ist, so wollen wir übereinkommen, auch jedem komplexen Werte der Koordinate ein Element des Grundgebildes entsprechen zu lassen. Dieses Element heißt, wenn der imaginäre Teil der komplexen Zahl nicht verschwindet, ein *imaginäres Element*.

Wenn von vier Elementen P_1, P_2, P_0, P irgendwelche imaginär sind, so definieren wir als das Doppelverhältnis der vier Elemente das Doppelverhältnis ihrer Koordinaten. Wenn insbesondere von den sechs Doppelverhältnissen, die sich aus den vier Punkten bilden lassen, eines gleich $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ wird, so bilden die vier Punkte *eine äquianharmonische Gruppe*.

Ist in einem Grundgebilde erster Stufe ein Koordinatensystem festgelegt, so entspricht jeder Gleichung mit einer einzigen Unbekannten in dem Grundgebilde die Gruppe derjenigen Elemente, deren Koordinaten der vorgelegten Gleichung genügen. Ist die Gleichung algebraisch und vom Grade n, so enthält die Gruppe n (reelle oder imaginäre, getrennt liegende oder zusammenfallende) Elemente. Umgekehrt kann man, um eine Gruppe von n Elementen darzustellen, statt ihrer Koordinaten eine Gleichung n^{ten} Grades angeben, der diese Koordinaten genügen.

Aus der projektiven Koordinate x leitet man die *homogenen projektiven Koordinaten* x_1, x_2 her, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

setzt. Dann wird x_1, x_2 nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Nimmt man an, daß keines von beiden je unendlich wird, so wird $x_2 = 0$ für den Punkt A, für den $x = \infty$ ist.

In homogenen Koordinaten wird eine *Gruppe* von n Elementen des Grundgebildes bestimmt durch eine homogene algebraische Gleichung n^{ten} Grades $f = 0$, wo f von der Form

$$f = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x_1^{n-i} x_2^i.$$

Die algebraische Theorie der Binärformen findet so ihre geometrische Interpretation in den Grundgebilden erster Stufe.

Die Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von x_1, x_2

$$\Delta_y f = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2\right]$$

stellt, gleich Null gesetzt, eine Gruppe von $n-1$ Punkten dar, welche die (erste) *Polargruppe* des Punktes (y_1, y_2) bezüglich der Punktgruppe $f = 0$ heißt.

Als die (*gemischte*) *Polare* von k Punkten $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$ bezeichnet man die Gruppe von $n-k$ Punkten, die durch die Gleichung

$$\Delta_y \Delta_{y'} \ldots \Delta_{y^{(k-1)}} f = 0$$

gegeben wird. Diese gemischte Polare wird zur k^{ten} *Polare* eines Punktes y:

$$\Delta_y^k f = 0,$$

wenn die k Punkte $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$ zusammenfallen (Jonquières, *J. de Math.* (2) **2**, 249 (1857)).

Die k^{te} Polare eines Punktes P bez. einer Punktgruppe P_1, $P_2 \ldots P_n$ läßt sich auch durch die *metrische* Relation definieren (Cremona, *Introd. alle curve piane*, Art. III):

$$\sum \left(\frac{1}{PP'} - \frac{1}{PP_1}\right)\left(\frac{1}{PP'} - \frac{1}{PP_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{PP'} - \frac{1}{PP_k}\right) = 0,$$

wobei die Summation über alle Kombinationen der Zahlen 1 bis n zu je k zu erstrecken ist und P' einen Punkt der polaren Gruppe bezeichnet.

Für $k = n-1$ ergibt sich ein einziger Punkt, der nach Poncelet (*J. f. Math.* **3**, 213 (1828)) das *Zentrum P' der harmonischen Mittel* des Poles P heißt und durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{1}{PP'} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{PP_1} + \frac{1}{PP_2} + \cdots + \frac{1}{PP_n}\right).$$

Rückt der Pol ins Unendliche, so wird der letztgenannte Punkt das *Zentrum M der mittleren Entfernungen* und ist dann durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{MP_1} + \frac{1}{MP_2} + \cdots + \frac{1}{MP_n} = 0.$$

Jede *Kovariante* der Form f stellt gleich Null gesetzt eine *kovariante Punktegruppe* zu der Punktegruppe dar, die durch das Verschwinden von f gegeben wird. Insbesondere liefert die Gleichung $H = 0$, wo

$$H = \frac{1}{n^2(n-1)^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right],$$

eine kovariante Gruppe von $m = 2(n-2)$ Punkten, welche die *Hessesche Gruppe* der durch $f=0$ gegebenen Gruppe von n Punkten heißt. Eine neue kovariante Gruppe wird durch die Gleichung $S = 0$, wo

$$S = \frac{1}{mn}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial H}{\partial x_1}\right],$$

geliefert usw. Das Verschwinden einer *Invariante* von f bedeutet allemal eine projektive Beziehung zwischen den Punkten der Punktegruppe $f = 0$. Ist z. B. eine Form vierter Ordnung

$$f = a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4$$

gegeben, so bedeutet das Verschwinden der Invariante

$$i = 2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2),$$

daß die vier Punkte $f = 0$ *in äquianharmonischer Lage* sind, das Verschwinden von

$$j = 6(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4),$$

daß sie *vier harmonische Punkte* bilden.

Zwei Punktgruppen von je n Punkten:

$$\sum\binom{n}{i}a_ix_1^{n-i}x_2^i = 0, \quad \sum\binom{n}{i}b_ix_1^{n-i}x_2^i = 0$$

heißen zueinander *apolar*, wenn die bilineare simultane Invariante

$$\sum(-1)^i\binom{n}{i}a_ib_{n-i}$$

für die beiden Formen verschwindet.

Zwei Punktgruppen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0$$

haben mindestens einen Punkt gemein, wenn die *Resultante* von f_1 und f_2 verschwindet.

Eine Punktgruppe f enthält einen *doppelt zählenden Punkt,* wenn ihre *Diskriminante,* d. h. die Resultante der ersten Polaren irgend zweier Punkte der Punktreihe bez. der Punktgruppe f verschwindet.

Die Punktgruppe f enthält allgemein einen $(k+1)$-fachen Punkt $(k<n)$, wenn die Resultante der gemischten Polaren irgend zweier Gruppen von je k Punkten der Punktreihe verschwindet.

Wenn zwei Grundgebilde erster Stufe projektiv aufeinander bezogen sind, ist das Doppelverhältnis von irgend vier Elementen A, B, C, P des einen gleich dem Doppelverhältnis der vier entsprechenden Elemente A', B', C', P' des anderen. Lassen wir A, B, C und A', B', C' fest und beziehen darauf projektive Koordinaten x, x', indem wir setzen

$$(PC, BA) = x, \quad (P'C', B'A') = x',$$

so wird

$$x = x',$$

und die projektive Beziehung drückt sich einfach so aus, daß entsprechenden Elementen derselbe Koordinatenwert zukommt.

Sind aber die Koordinatensysteme in den beiden Grundgebilden irgendwie anders angenommen, werden dann a, b, c, x die Koordinaten von A, B, C, P und a', b', c', x' die Koordinaten von A', B', C', P', so drückt sich die Gleichheit der Doppelverhältnisse aus wie folgt:

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} = \frac{a'-c'}{b'-c'} : \frac{a'-x'}{b'-x'}.$$

Dieser Gleichung läßt sich die Form geben

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \tag{1}$$

wobei die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Die Ausdrücke $\alpha\delta - \beta\gamma$ und $\beta - \gamma$ heißen die *Invarianten* der projektiven Beziehung.

Umgekehrt *stellt jede bilineare Gleichung zwischen x, x' mit nicht verschwindender Determinante eine projektive Beziehung zwischen den beiden Grundgebilden dar.*

In homogenen Koordinaten wird die Gleichung mit veränderter Bezeichnung der Koeffizienten

$$(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)x_1' - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_2' = 0.$$

Diese Gleichung aber läßt sich in die folgenden zwei zerlegen:

$$\varrho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$\varrho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

wobei ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet und die Determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist.

Sind die beiden Grundgebilde von gleicher Art und trägergleich (konjektiv oder kollokal), so sind ihre Doppelelemente U, V (die sich selbst entsprechen) aus der Gleichung zu bestimmen

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0.$$

Die Projektivität ist *hyperbolisch, parabolisch* oder *elliptisch,* je nachdem $\Delta = (\beta - \gamma)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = (\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta \gtreqless 0$; im letzten Falle kann man sagen, die Doppelelemente seien konjugiert imaginär. Sind P, P' irgend zwei entsprechende Elemente, so wird das Doppelverhältnis

$$\vartheta = (P'P,\ VU) = \frac{\beta - \gamma + \sqrt{\Delta}}{\beta - \gamma - \sqrt{\Delta}};$$

es ist also konstant und heißt die *absolute Invariante* der Projektivität. Die Projektivität wird zur Involution und $\vartheta = -1$, wenn in der Grundgleichung (1) $\beta = \gamma$ ist.

Sind zwei eigentliche Punktreihen u, u' projektiv aufeinander bezogen, so heißen *Fluchtpunkte* I, J' die beiden Punkte, die jedesmal dem unendlich fernen (uneigentlichen) Punkte der anderen Punktreihe entsprechen. Liegen I, J im Endlichen und bezieht man die Punkte der beiden Punktreihen auf zwei Systeme von Abszissenkoordinaten, bei denen der Ursprung durch je einen der Punkte I, J' gebildet wird, so wird die Gleichung der Projektivität

$$IP \cdot J'P' = \text{const.},$$

sie sagt aus, daß das Produkt der Abstände zweier entsprechenden Punkte P, P' von den zugehörigen Fluchtpunkten I, J' konstant ist.

Die Projektivität wird zur *Ähnlichkeit,* wenn die unendlich fernen Punkte in beiden Punktreihen einander entsprechen. Dann ist das Verhältnis der Längen entsprechender Strecken konstant. Wird dies *Ähnlichkeitsverhältnis* gleich 1, so wird die Ähnlichkeit zur Kongruenz.

In jedem von zwei eigentlichen projektiven Strahlenbüscheln gibt es ein und nur ein Paar zueinander senkrechter Strahlen,

dem in dem anderen Büschel ein ebensolches Paar entspricht. Gibt es zwei solcher Paare, so entspricht jedem Paare senkrechter Strahlen im einen Büschel ein ebensolches Paar im anderen Büschel, und die Winkel, die die Paare entsprechender Strahlen bilden, sind allemal gleich, die Strahlenbüschel sind *kongruent*. Gehören sie einer Ebene an, so ist die *direkte* und die *inverse* Kongruenz zu unterscheiden, je nachdem bei der Drehung eines Strahles im einen Büschel der entsprechende Strahl im anderen Büschel sich im *gleichen* oder *entgegengesetzten* Sinne dreht. Zwei solche Strahlenbüschel begründen auf der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene zwei und nur zwei Projektivitäten, welche als *direkte* und *inverse Kongruenz* (oder *Gleichheit*) auf der unendlich fernen Geraden unterschieden werden.

m Grundgebilde erster Stufe stehen *in m-linearer Beziehung*, wenn zwischen den m Koordinaten $x, x', \ldots, x^{(m)}$, welche die Elemente in den einzelnen Grundgebilden festlegen, eine m-lineare Beziehung, d. h. eine Gleichung, die für jede dieser Variabeln linear ist, besteht. Dann wird durch je ein Element aus $m-1$ der m Grundgebilde das zugehörige Element des letzten Grundgebildes eindeutig bestimmt. Über trilineare Grundgebilde vgl. man insbesondere Schubert, *Math. Ann.* **17** (1880) 457 und Sturm, *Geom. Verwandschaften* 1908, p. 319.

Sind $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$ Binärformen n^{ter} Ordnung, die einzeln $= 0$ gesetzt Gruppen von je n Elementen eines Grundgebildes erster Stufe darstellen, so sagt man von allen Elementegruppen des Grundgebildes, die in der Form

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_{k+1} f_{k+1} = 0$$

darstellbar sind, daß sie eine *Involution* von der *Ordnung* oder dem *Grade n* und von der *Stufe* oder der *Dimension k* bilden. *Durch je k Elemente einer Gruppe der Involution sind die übrigen $n-k$ bestimmt,* denn durch sie lassen sich die Verhältnisse der $k+1$ Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ bestimmen.

Eine simultane Invariante der $k+1$ Formen $f_1, \ldots, f_{k+1}$ stellt durch ihr Verschwinden nur dann eine projektive Eigenschaft der Involution dar, wenn sie sich bei einer Vertauschung der Formen mit irgendwelchen anderen linear unabhängigen aus der linearen Formenschar $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{k+1} f_{k+1}$ nur um einen Faktor, der von den Koeffizienten der Grundformen frei ist, ändert, mit anderen Worten, eine *Kombinante der linearen Formenschar* ist. Ähnliches gilt für die Kovarianten. Insbesondere liefert die Kovariante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^k f_1}{\partial x_1^k} & \frac{\partial^k f_2}{\partial x_1^k} & \cdots & \frac{\partial^k f_{k+1}}{\partial x_1^k} \\ \frac{\partial^k f_1}{\partial x_1^{k-1}\partial x_2} & \frac{\partial^k f_2}{\partial x_1^{k-1}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^k f_{k+1}}{\partial x_1^{k-1}\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^k f_1}{\partial x_2^k} & \frac{\partial^k f_2}{\partial x_2^k} & \cdots & \frac{\partial^k f_{k+1}}{\partial x_2^k} \end{vmatrix}.$$

die eine Kombinante ist, $= 0$ gesetzt, die Elemente, in deren jedem sich $k+1$ Elemente einer Gruppe der Involution vereinigen.

So existieren im allgemeinen $(k+1)(n-k)$ Punkte, die für eine Punktgruppe der Involution die Multiplizität $k+1$ besitzen. Für $k=1$ ergibt sich insbesondere die *Jacobische Gruppe* zweier Punktgruppen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$.

Die auf Moebius zurückgehende Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe hat namentlich v. Staudt in seinen *Beiträgen zur Geometrie der Lage* systematisch ausgestaltet.

§ 2. Projektive Koordinaten in den Grundgebilden zweiter Stufe.

Unter den Grundgebilden zweiter Stufe betrachten wir nur die Ebene, die hier gewonnenen Resultate lassen sich sofort auf das Bündel übertragen.

Es sei in der Ebene ein Dreieck, das *Grunddreieck*, mit den Ecken X, Y, Z, den *Grundpunkten*, und ein Punkt E, der *Einheitspunkt*, der nicht auf einer Seite des Grunddreiecks liegen darf, gegeben. Dann wird ein *projektives Koordinatensystem* begründet, indem man den darzustellenden Punkt P und den Einheitspunkt E mit X und Y verbindet und die *inhomogenen projektiven Koordinaten* x, y von P gleich den Doppelverhältnissen der vier durch Y und X gehenden Strahlen setzt; symbolisch kann man schreiben:

$$x = Y(PE, ZX), \quad y = X(PE, ZY).$$

Verbindet man P und E auch mit der dritten Ecke Z, so ergibt sich die weitere Gleichung:

$$\frac{x}{y} = Z(PE, YX).$$

Homogene Koordinaten werden eingeführt durch den Ansatz

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

aus dem folgt, daß die betrachteten Doppelverhältnisse gleich den Verhältnissen dieser drei Zahlen x_1, x_2, x_3 sind. Die letzteren sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. Läßt man für sie nur endliche Werte zu, so wird $x_1 = 0$ für die Seite YZ, $x_2 = 0$ für ZX, $x_3 = 0$ für XY. Für den Einheitspunkt E wird $x_1 = x_2 = x_3$, für die Ecken des Grunddreiecks verschwinden je zwei der homogenen Koordinaten.

In einer eigentlichen Ebene erhält man durch metrische Spezialisierung besondere Koordinatensysteme. Nimmt man X und Y auf der uneigentlichen Geraden an, so erhält man ein *affines* Koordinatensystem. Sind ZX und ZY ferner senkrecht aufeinander und hat E von ihnen beiden den Abstand 1, so gelangt man zu den gewöhnlichen *rechtwinkligen cartesischen Koordinaten.*

Wählt man das Grunddreieck beliebig, aber für den Einheitspunkt den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, so erhält man die *trimetrischen* oder *trilinearen Koordinaten*, die den Abständen des darzustellenden Punktes von den Seiten des Grunddreiecks proportional sind. Wählt man zum Einheitspunkt den Schwerpunkt (Schnittpunkt der Mittellinien) des Grunddreiecks, so erhält man die *baryzentrischen Koordinaten.* Diese sind gleich drei Massen, die man in den Ecken des Grunddreiecks anbringen muß, damit der Schwerpunkt in den darzustellenden Punkt fällt.

Die homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 der Punkte einer geraden Linie genügen einer homogenen linearen Gleichung

(a) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Dabei ist unter den Geraden mit einbegriffen die unendlich ferne Gerade. Ist

(b) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Gleichung für die letztere, so wird

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{a_1}{h_1} p_1 : \frac{a_2}{h_2} p_2 : \frac{a_3}{h_3} p_3,$$

wenn p_1, p_2, p_3 die Abstände des darzustellenden Punktes von den Seiten des Grunddreiecks und h_1, h_2, h_3 dessen Höhen bedeuten. Die Gerade, deren Gleichung lautet:

(c) $$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

heißt die *Einheitsgerade.* Sind U_0, V_0, W_0 die Schnittpunkte derselben mit den Seiten YZ, ZX, XY des Grunddreiecks und U, V, W die entsprechenden Punkte für die Gerade (a), so findet man für die Doppelverhältnisse der vier Punkte, die man so auf jeder Dreiecksseite erhält:

$$\frac{u_2}{u_3} = (UU_0,\ YZ),\quad \frac{u_3}{u_1} = (VV_0,\ ZX),\quad \frac{u_1}{u_2} = (WW_0,\ XY).$$

u_1, u_2, u_3 sind allgemeine *homogene projektive Linienkoordinaten.* Sie sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegt. Sie werden einander gleich für die Einheitsgerade. Für eine Gerade durch X verschwindet u_1, usw. Für die Seiten des Grunddreiecks verschwinden je zwei der Linienkoordinaten.

Zu inhomogenen Linienkoordinaten u, v geht man über, indem man setzt:

$$u = \frac{u_1}{u_3},\quad v = \frac{u_2}{u_3},$$

die Gleichung der geraden Linie ist dann die folgende:

$$ux + vy + 1 = 0,$$

wenn x, y die zugehörigen inhomogenen Punktkoordinaten bedeuten.

Die Gleichung (a) drückt aus, daß der Punkt (x_1, x_2, x_3) und die Gerade (u_1, u_2, u_3) vereinigt liegen. Läßt man in ihr also x_1, x_2, x_3 fest und sieht u_1, u_2, u_3 als veränderlich an, so *liefert sie die Gleichung eines Punktes in Linienkoordinaten.*

Benutzt man die homogenen projektiven Koordinaten, um die Grundbeziehungen zwischen den Punkten und Geraden der Ebene aufzustellen, so ergeben sich folgende Sätze:

1a. Die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden (u_1, u_2, u_3) und (u_1', u_2', u_3') sind proportional den Determinanten

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2' & u_3' \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u_3' & u_1' \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}.$$

1b. Die Kordinaten der Verbindungslinie zweier Punkte (x_1, x_2, x_3) und (x_1', x_2', x_3') sind proportional den Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2' & x_3' \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ x_3' & x_1' \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}.$$

2a. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß drei Gerade (u_1, u_2, u_3), (u_1', u_2', u_3'), (u_1'', u_2'', u_3'') durch einen Punkt gehen, lautet

2b. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß drei Punkte (x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3'), (x_1'', x_2'', x_3'') auf einer Geraden liegen, lautet

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

3 a. Die Koordinaten (u_1, u_2, u_3) einer Geraden p des Strahlenbüschels, das durch zwei Gerade p', p'' mit den Koordinaten (u_1', u_2', u_3') und (u_1'', u_2'', u_3'') bestimmt wird, sind von der Form

$$u_1 = \lambda' u_1' + \lambda'' u_1'',$$
$$u_2 = \lambda' u_2' + \lambda'' u_2'',$$
$$u_3 = \lambda' u_3' + \lambda'' u_3'',$$

wenn λ', λ'' endliche, nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen sind.

Der Parameter $\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'}$ ist die projektive Koordinate des Strahls p in dem Büschel, bezogen auf die Strahlen p', p'' und den Strahl p_0 mit den Koordinaten

$$u_1' + u_1'', \quad u_2' + u_2'', \quad u_3' + u_3'',$$

mit anderen Worten das Doppelverhältnis $(pp_0, p'p'')$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

3 b. Die Koordinaten (x_1, x_2, x_3) eines Punktes P der geraden Punktreihe, die durch zwei Punkte P', P'' mit den Koordinaten (x_1', x_2', x_3') und (x_1'', x_2'', x_3'') bestimmt wird, sind von der Form

$$x_1 = \lambda' x_1' + \lambda'' x_1'',$$
$$x_2 = \lambda' x_2' + \lambda'' x_2'',$$
$$x_3 = \lambda' x_3' + \lambda'' x_3'',$$

wenn λ', λ'' endliche, nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen sind.

Der Parameter $\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'}$ ist die projektive Koordinate des Punktes P in der Punktreihe, bezogen auf die Punkte P', P'' und den Punkt P_0 mit den Koordinaten

$$x_1' + x_1'', \quad x_2' + x_2'', \quad x_3' + x_3'',$$

mit anderen Worten das Doppelverhältnis $(PP_0, P'P'')$.

Sind X, Y, Z, E Grundpunkte und Einheitspunkt eines Koordinatensystems und X', Y', Z', E' die analogen Punkte für ein zweites Koordinatensystem, so besteht zwischen den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) und (x_1', x_2', x_3') desselben Punktes in den beiden Systemen eine Relation von folgender Form:

$$\varrho x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3,$$
$$\varrho x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3,$$
$$\varrho x_3' = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3,$$

wobei ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet und die Determinante der Koeffizienten $|a_{ik}|$ von Null verschieden ist. Umgekehrt läßt sich jede homogene lineare Substitution von der vor-

stehenden Form deuten als der Übergang zu einem neuen System projektiver Koordinaten.

Für inhomogene Koordinaten x, y und x', y' werden die Substitutionsgleichungen

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Wir kommen überein, auch komplexen Werten der allgemeinen Koordinaten x, y einen Punkt entsprechen zu lassen. Diesen Punkt nennen wir einen *imaginären Punkt. Konjugiert imaginär* nennen wir zwei Punkte, deren gleichnamige Koordinaten konjugiert komplexe Werte haben. Es läßt sich dann immer eine und nur eine lineare Gleichung finden, der die Koordinaten beider Punkte genügen: *die Verbindungslinie konjugiert imaginärer Punkte ist reell, aber außer ihr geht durch keinen der beiden Punkte eine reelle Gerade hindurch.*

Die analogen Festsetzungen treffen wir auch für die Geraden der Ebene. Wir finden zu jeder imaginären Geraden eine konjugiert imaginäre, und der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist reell, er ist aber auch der einzig reelle Punkt einer jeden der beiden Geraden.

Ebene analytische Kurve heißt die Gesamtheit aller Punkte der Ebene, deren inhomogene Koordinaten x, y einer analytischen Gleichung $f(x, y) = 0$ genügen. Ist f ein Polynom n^{ten} Grades, so heißt die Kurve eine *algebraische Kurve n^{ter} Ordnung.*

Ebene analytische Enveloppe heißt die Gesamtheit aller Geraden, deren inhomogene Koordinaten u, v einer analytischen Gleichung $F(u, v) = 0$ genügen. Ist F ein Polynom n^{ten} Grades, so heißt die Enveloppe eine *algebraische Enveloppe n^{ter} Klasse.*

Die Gleichungen werden homogen bei Benutzung homogener Koordinaten. Sie sind also für eine algebraische Kurve von der Form

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_1^{h} x_2^{i} x_3^{j} = 0 \qquad (h + i + j = n),$$

für eine algebraische Enveloppe von der Form

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} u_1^{h} u_2^{i} u_3^{j} = 0 \qquad (h + i + j = n).$$

Sind zwei Ebenen π, π' kollinear aufeinander bezogen, wird in jeder ein System homogener projektiver Koordinaten angenommen, sind dann (x_1, x_2, x_3) die Koordinaten eines Punktes P von π,

(x_1', x_2', x_3') die Koordinaten des entsprechenden Punktes P' von π', so bestehen Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned}\varrho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \varrho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\ \varrho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}$$

mit nicht verschwindender Determinante $|a_{ik}|$. Gleichzeitig bestehen zwischen den auf dieselben Koordinatensysteme bezogenen Koordinaten (u_1, u_2, u_3) und $(u_1', u_2' u_3')$ zweier entsprechenden Geraden p und p' die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sigma u_1 &= a_{11}u_1' + a_{21}u_2' + a_{31}u_3',\\ \sigma u_2 &= a_{12}u_1' + a_{22}u_2' + a_{32}u_3',\\ \sigma u_3 &= a_{13}u_1' + a_{23}u_2' + a_{33}u_3',\end{aligned}$$

wenn σ, wie ϱ, einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Wählt man die Koordinatensysteme in den Ebenen so, daß die Grundpunkte und Einheitspunkte durch entsprechende Punkte gebildet werden, dann reduzieren die vorstehenden Gleichungen sich auf

$$x_1' : x_2 : x_3' = x_1 : x_2 : x_3$$

und

$$u_1 : u_2 : u_3 = u_1' : u_2' : u_3'.$$

Werden die kollinearen Felder π, π' aufeinandergelegt, so wird man die Grundelemente ihrer Koordinatensysteme ebenfalls übereinanderliegend wählen. Dann erhebt sich sofort die Frage nach den bei der kollinearen Beziehung übereinanderliegenden Elementen oder Doppelelementen der Kollineation. Zur Bestimmung der Doppelpunkte ergibt sich, indem man $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$ setzt, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(a_{11} - \varrho)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0,\\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \varrho)x_2 + a_{23}x_3 &= 0,\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \varrho)x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Demnach muß

$$\Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

sein. Dies ist eine Gleichung dritten Grades für ϱ, deren drei

Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 entsprechend man drei Doppelpunkte erhält. Die Doppelgeraden sind dann die Linien, die diese Punkte paarweise verbinden. Fallen zwei der drei Wurzeln derart zusammen, daß für diesen Wert von ϱ die Determinante $\Delta(\varrho)$ mit ihren ersten Unterdeterminanten verschwindet, so hat die Kollineation unendlich viele Doppelpunkte, die eine gerade Linie erfüllen, wir erhalten also eine *perspektive Kollineation* (Homologie).

Sind die drei Doppelpunkte der Kollineation reell und wählen wir sie zu Grundpunkten des Koordinatensystems, so wird die Kollineation in der folgenden einfachen Form darstellbar:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \alpha_1 x_1 : \alpha_2 x_2 : \alpha_3 x_3 .$$

In diese Form lassen sich die Homologien einschließen, die sich für $\alpha_2 = \alpha_3$ ergeben. Dann ist $\alpha_1 : \alpha_2$ das konstante Doppelverhältnis, das zwei entsprechende Punkte P, P' mit dem Homologiezentrum X und dem Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der Homologieachse bilden.

Bei einer kollinearen Beziehung zwischen zwei ebenen Feldern π, π', die keine Affinität ist, entspricht der unendlich fernen Geraden der einen Ebene eine eigentliche Gerade, die *Fluchtlinie*, in der anderen Ebene. Unter den Loten der Fluchtlinie in der einen Ebene gibt es eines, dem in der anderen Ebene wieder ein Lot ihrer Fluchtlinie entspricht. Die Fußpunkte dieser Lote heißen *Mittelpunkte* oder *Augenpunkte*, die Lote selbst Hauptlinien oder *Fokallinien* der kollinearen ebenen Felder. Bezieht man auf die Fluchtlinien und Fokallinien als Achsen gewöhnliche kartesische Koordinaten x, y und x', y', so wird in diesen die kollineare Beziehung durch die einfachen Gleichungen gegeben

$$x' = c' \frac{c}{x}, \quad y' = c' \frac{y}{x},$$

als deren Umkehrung sich sofort ergibt

$$x = c \frac{c'}{x'}, \quad y = c \frac{y'}{x'}.$$

Die Punkte F, F_1 in π, für die $x = \pm c$, $y = 0$, und die entsprechenden Punkte F', F_1' in π', für die $x' = \pm c'$, $y = 0$ wird, heißen die *Brennpunkte* der beiden projektiven ebenen Felder. Zwei Strahlen durch einen Brennpunkt bilden denselben Winkel wie die entsprechenden Strahlen durch den entsprechenden Brennpunkt der anderen Ebene.

Die Parallelen f, f_1 zur Fluchtlinie ($x = 0$) in π, für deren Punkte $x = \pm c'$, und die ihnen entsprechenden Parallelen f', f_1'

zur Fluchtlinie ($x' = 0$) in π', für deren Punkte $x' = \pm c$ wird, heißen die *Leitlinien* (equisegmental axes) der beiden projektiven Felder. Zwei Punkte auf einer von ihnen haben dieselbe Entfernung wie die entsprechenden Punkte auf der entsprechenden Leitlinie der anderen Ebene.

Die sehr interessanten metrischen Relationen zwischen kollinearen Feldern sind behandelt worden von Smith, *Lond. Math. Soc. Proc.* **2**, 196, Papers I, p. 545, Reye, *Math. Ann.* **46**, 423; man findet sie ausführlich dargestellt bei Fiedler, *Darstellende Geometrie*, Reye, *Geom. d. Lage*, 4. Aufl., Bd. 2, Anhang, Sturm, *Lehre von den geom. Verwandtschaften*, 1908, II.

Sind π, π' zwei *reziproke* ebene Felder, und nehmen wir in jedem von ihnen wieder ein projektives Koordinatensystem beliebig an, so wird die Beziehung zwischen den Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes P von π und den Koordinaten u_1', u_2', u_3' der entsprechenden Geraden p' von π' durch die *Gleichungen der Reziprozität* gegeben, die folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned}
\varrho u_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\
\varrho u_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\
\varrho u_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,
\end{aligned}$$

wobei die Determinante der Koeffizienten wieder $\neq 0$ ist. Sind x_1', x_2', x_3' die Koordinaten eines Punktes P' auf p', so daß $u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0$ wird, dann findet man aus den vorstehenden Gleichungen sofort die bilineare Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_i x_k' = 0,$$

die auch zur Darstellung der Reziprozität benutzt werden kann.

Sind die beiden Felder übereinandergelagert, so sind die Punkte, die auf der ihnen zugeordneten Geraden liegen, durch die Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +\\
&\quad + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + (a_{31} + a_{13})x_3x_1 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 = 0,
\end{aligned}$$

die einen Kegelschnitt darstellt. Die Reziprozität wird dann und nur dann zur *Polarität*, wenn $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$ ist. Dann ist jedem Punkt dieselbe Gerade zugeordnet, gleichgültig ob man ihn zum ersten oder zweiten Felde rechnet. Die vorstehende Gleichung liefert den Ordnungskegelschnitt der Polarität,

dessen Punkten die in ihnen berührenden Kegelschnitttangenten als entsprechende Gerade zugeordnet sind.

Jede kollineare oder reziproke Beziehung zwischen zwei *Bündeln* läßt sich durch eine ebensolche Beziehung zwischen zwei konjektiven ebenen Feldern, deren gemeinsamer Träger die Mittelpunkte der Bündel nicht enthält, erzeugen. Sind die Bündel zentrisch, so kann man für diese Ebene die uneigentliche Ebene wählen. In dieser Ebene aber ist eine reziproke Beziehung, die *orthogonale*, vor allen anderen ausgezeichnet. So ergibt sich auch zwischen zwei Bündeln eine ausgezeichnete reziproke Beziehung, die der *Orthogonalität*, bei der jedem Strahl des einen Bündels die zu ihm senkrechte Ebene des anderen Bündels zugeordnet ist. Bei dieser Beziehung wird der Winkel zwischen zwei Strahlen des einen Bündels gleich dem Winkel, den die entsprechenden Ebenen des anderen Bündels bilden, woraus man die bekannte Tatsache folgern kann, daß das Gesetz der Dualität im Bündel sich auch auf die metrischen Eigenschaften erstreckt.

Sind die beiden Bündel konzentrisch, so wird die Zuordnung der Orthogonalität ein besonderer Fall der Polarität. Der Ordnungskegel dieser Polarität, dessen Strahlen die in ihnen berührenden Tangentialebenen zugeordnet sind, ist ein imaginärer Kegel, der der *absolute Kegel* des Bündels heißt. Alle die Kegel, die man so erhält, haben die imaginäre Ordnungskurve der orthogonalen Beziehung in der unendlich fernen Ebene, den unendlich fernen Kugelkreis, gemeinsam.

Betreffs der Einführung homogener projektiver Koordinaten in der Ebene vgl. man Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, 1828—31, *Über ein neues Koordinatensystem, Journ. f. Math.* **5** (1830) 1, *Abh. I*, p. 124, Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Kurven*, Kap. I.

§ 3. Projektive Koordinaten in den Grundgebilden dritter Stufe.

Im Raume sei ein *Grundtetraeder* gegeben mit den Ecken *X, Y, Z, T*, den *Grundpunkten*, und ein Punkt *E*, der *Einheitspunkt*, der keiner Seitenfläche des Tetraeders angehören darf. Dann werden als *projektive homogene Koordinaten* eines beliebigen Raumpunktes *P* vier endliche und nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 definiert, für welche die folgenden Relationen bestehen:

$$\frac{x_1}{x_4} = \overline{YZ}(PE, TX), \quad \frac{x_2}{x_4} = \overline{ZX}(PE, TY), \quad \frac{x_3}{x_4} = \overline{XY}(PE, TZ),$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \overline{TX}(PE, ZY), \quad \frac{x_3}{x_1} = \overline{TY}(PE, XZ), \quad \frac{x_1}{x_2} = \overline{TZ}(PE, YX);$$

von diesen sind drei eine Folge der übrigen. Es bezeichnet in ihnen z. B. $\overline{YZ}(PE, TX)$ das Doppelverhältnis der vier Ebenen, die aus der Kante YZ des Grundtetraeders die Punkte P, E, T, X projizieren. Die homogenen Koordinaten sind wieder nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. Die *nicht homogenen Koordinaten* werden eingeführt durch die Gleichungen

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Für einen Punkt der Ebene XYZ wird mindestens eine von ihnen unendlich.

In homogenen projektiven Koordinaten wird durch eine homogene lineare Gleichung ausgedrückt, daß ein Punkt einer Ebene angehört. *Umgekehrt ist jede Ebene, die uneigentliche Ebene eingeschlossen, durch eine solche Gleichung darstellbar.* Ist

$$(\alpha) \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

die Ebenengleichung, so heißen u_1, u_2, u_3, u_4 die *homogenen projektiven Koordinaten dieser Ebene* π; aus ihnen werden die inhomogenen Koordinaten durch den Ansatz

$$u = \frac{u_1}{u_4}, \quad v = \frac{u_2}{u_4}, \quad w = \frac{u_3}{u_4}$$

abgeleitet, können aber auch direkt durch die Gleichung der Ebene in inhomogenen Punktkoordinaten

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

definiert werden.

Die Ebene ε, deren Gleichung

$$(\beta) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

ist, heißt die *Einheitsebene.* Mit ihrer Hilfe können die homogenen Ebenenkoordinaten direkt durch die folgenden Relationen definiert werden, in denen ξ, η, ζ, τ die Seitenflächen des Grundtetraeders bezeichnen, so daß ξ der Ecke X gegenüberliegt usw.

$$\frac{u_1}{u_4} = \overline{\eta\zeta}(\pi\varepsilon, \tau\xi), \quad \frac{u_2}{u_4} = \overline{\xi\zeta}(\pi\varepsilon, \tau\eta), \quad \frac{u_3}{u_4} = \overline{\xi\eta}(\pi\varepsilon, \tau\zeta),$$

$$\frac{u_2}{u_3} = \overline{\tau\xi}(\pi\varepsilon, \zeta\eta), \quad \frac{u_3}{u_1} = \overline{\tau\eta}(\pi\varepsilon, \xi\zeta), \quad \frac{u_1}{u_2} = \overline{\tau\zeta}(\pi\varepsilon, \eta\xi).$$

Dabei bedeutet z. B. $\overline{\eta\zeta}(\pi\varepsilon, \tau\xi)$ das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die Schnittlinie von η und ζ getroffen wird von den Ebenen π, ε, τ, ξ.

Faßt man in der Gleichung (α) die x als fest und die u als veränderlich auf, so stellt sie einen *Punkt* in *Ebenenkoordinaten* dar.

Es seien (x_1, x_2, x_3, x_4), (x_1', x_2', x_3', x_4'), $(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$, $(x_1''', x_2''', x_3''', x_4''')$ die Koordinaten von vier Punkten P, P', P'', P''', analog (u_1, u_2, u_3, u_4), (u_1', u_2', u_3', u_4'), $(u_1'', u_2'', u_3'', u_4'')$, $(u_1''', u_2''', u_3''', u_4''')$ die Koordinaten von vier Ebenen π, π', π'', π''', so ergibt sich:

1a. Ist P ein Punkt auf der Verbindungslinie von P', P'', so sind seine Koordinaten von der Form

$$x_i = \lambda' x_i' + \lambda'' x_i'' \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Der Parameter $\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'}$ ist die projektive Koordinate von P in der Punktreihe, bezogen auf die Grundpunkte P', P'' und P_0, wobei P_0 die Koordinaten

$$x_i' + x_i'' \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

hat, oder mit anderen Worten das Doppelverhältnis $(PP_0, P'P'')$.

Die Beziehung zwischen den Punkten P, P', P'' läßt sich auch so ausdrücken, daß die Determinanten der aus ihren Koordinaten gebildeten Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{Vmatrix}$$

verschwinden.

2a. Ist P ein Punkt auf der Verbindungsebene von P', P'', P''', so sind seine Koordinaten von der Form

$$x_i = \lambda' x_i' + \lambda'' x_i'' + \lambda''' x_i''' \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

1b. Ist π eine Ebene durch die Schnittlinie von π', π'', so sind ihre Koordinaten von der Form

$$u_i = \lambda' u_i' + \lambda'' u_i'' \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Der Parameter $\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'}$ ist die projektive Koordinate von π in dem Ebenenbüschel, bezogen auf die Grundebenen π', π'' und π_0, wobei π_0 die Koordinaten

$$u_i' + u_i'' \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

hat, oder mit anderen Worten das Doppelverhältnis $(\pi\pi_0, \pi'\pi'')$.

Die Beziehung zwischen den Ebenen π, π', π'' läßt sich auch so ausdrücken, daß die Determinanten der aus ihren Koordinaten gebildeten Matrix

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \end{Vmatrix}$$

verschwinden.

2b. Ist π eine Ebene durch den Schnittpunkt von π', π'', π''', so sind ihre Koordinaten von der Form

$$u_i = \lambda' u_i' + \lambda'' u_i'' + \lambda''' u_i''' \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Die Werte $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ lassen sich als homogene Koordinaten des Punktes P in dem ebenen Feld, bezogen auf die Grundpunkte P', P'', P''' und den Einheitspunkt P_1 mit den Koordinaten

$$x_i' + x_i'' + x_i''' \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

auffassen.

Die Beziehung, die zwischen den vier Punkten P, P', P'', P''' besteht, läßt sich auch so ausdrücken, daß die folgende Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix}.$$

Die Werte $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ lassen sich als homogene Koordinaten der Ebene π in dem Ebenenbündel, bezogen auf die Grundebenen π', π'', π''' und die Einheitsebene π_1 mit den Koordinaten

$$u_i' + u_i'' + u_i''' \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

auffassen.

Die Beziehung, die zwischen den vier Ebenen π, π', π'', π''' besteht, läßt sich auch so ausdrücken, daß die folgende Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' & u_4''' \end{vmatrix}.$$

3. Bei beliebiger Lage der Punkte P, P', P'' sind die Koordinaten der Ebene, welche diese Punkte verbindet, proportional den Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2' & x_3' & x_4' \\ x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_4 \\ x_3' & x_1' & x_4' \\ x_3'' & x_1'' & x_4'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_4'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_2' & x_1' & x_3' \\ x_2'' & x_1'' & x_3'' \end{vmatrix}.$$

Analog werden die Koordinaten des Punktes, in dem sich die drei Ebenen π, π', π'' schneiden, gegeben durch die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \end{Vmatrix}.$$

Die Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) und (x_1', x_2', x_3', x_4') desselben Punktes P in zwei verschiedenen Koordinatensystemen sind durch *Transformationsgleichungen* von folgender Form vermittelt:

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \varrho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ \varrho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ \varrho x_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{aligned}$$

wobei die Determinante der Koeffizienten $|a_{ik}|$ wieder von Null verschieden ist. Die entsprechenden Formeln für inhomogene Koordinaten sind daraus wie bei der Ebene abzuleiten.

Wir kommen wie früher überein, auch jeder Kombination von komplexen Werten der inhomogenen Koordinaten einen *imaginären Punkt* entsprechen zu lassen.

Bei einer *analytischen Fläche* ist eine von den Koordinaten ihrer Punkte eine analytische Funktion der übrigen. Wird diese Funktion durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades zwischen den Koordinaten festgelegt, so heißt die Fläche eine *algebraische Fläche n^{ter} Ordnung*. Ihre Gleichung in homogenen Punktkoordinaten ist dann von der Form

$$\sum_{ijk} a_{ijk} x_1^h x_2^i x_3^j x_4^k = 0 \qquad (h+i+j+k=n).$$

Als *analytische Raumkurve* bezeichnet man die Gesamtheit der Punkte, von deren drei inhomogenen Koordinaten zwei irgendwelche analytische Funktionen der dritten oder alle drei analytische Funktionen eines Parameters sind. Genügen die Koordinaten aller Punkte der Kurve zwei algebraischen Gleichungen, so heißt die Raumkurve *algebraisch*.

Ebenenenveloppe nennt man die Gesamtheit der Ebenen, deren inhomogene Koordinaten u, v, w einer Gleichung $f(u, v, w) = 0$ genügen. Ist f ein Polynom n^{ten} Grades, so spricht man von einer *algebraischen Ebenenenveloppe n^{ter} Klasse*.

Ebenengewinde heißt die Gesamtheit der Ebenen, deren Koordinaten (analytische) Funktionen eines Parameters sind. Genügen die Koordinaten aller Ebenen des Gewindes zwei algebraischen Gleichungen, so heißt das Ebenengewinde *algebraisch*.

Seien Σ, Σ' zwei kollineare Räume, die beide auf ein System projektiver Koordinaten bezogen werden. Sind dann (x_1, x_2, x_3, x_4) und (x_1', x_2', x_3', x_4') die Koordinaten zweier entsprechenden Punkte P und P', so lauten die *Gleichungen der Kollineation* genau ebenso wie die Transformationsgleichungen der projektiven Koordinaten:

$$\varrho x_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Die Determinante $|a_{ik}|$ ist wieder stets von Null verschieden. Bedeutet σ, wie ϱ, einen Proportionalitätsfaktor, so kann man die vorstehenden Gleichungen auch durch die folgenden ersetzen:

$$\sigma u_k = \sum_{i=1}^{4} a_{ik} u_i' \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

welche die Koordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) und (u_1', u_2', u_3', u_4') zweier entsprechenden Ebenen verknüpfen.

Bei Verwendung inhomogener Koordinaten werden die Koordinaten x', y', z' von P' *gebrochene lineare Funktionen* der Koordinaten x, y, z von P.

Sind die beiden Räume auf dasselbe Koordinatensystem bezogen, so bestimmen sich die Doppelpunkte (d. h. die sich selbst entsprechenden Punkte) der Kollineation aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \varrho)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0,\\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \varrho)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \varrho)x_3 + a_{34}x_4 &= 0,\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44} - \varrho)x_4 &= 0,
\end{aligned}$$

aus denen folgt:

$$\Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Den Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 dieser Gleichung entsprechen im allgemeinen vier Doppelpunkte, die in irgendwelcher Weise auch koinzidieren können. Hat die Gleichung eine Doppelwurzel $\varrho_2 = \varrho_4$ derart, daß für diese auch alle ersten Unterdeterminanten von $\Delta(\varrho)$ verschwinden, so ist die Kollineation *axial*: alle Punkte einer bestimmten geraden Linie sind sich selbst zugeordnet. Wird auch $\varrho_1 = \varrho_3$ und gilt für diese Doppelwurzel das gleiche wie für die erste, so ist die Kollineation *biaxial perspektiv*. Wird dagegen $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4$ und verschwinden für diese dreifache Wurzel alle zweiten Unterdeterminanten von $\Delta(\varrho)$, so ist die Kollineation *zentrisch perspektiv*.

Läßt man imaginäre Grundpunkte des Koordinatensystems zu, so kann man die Darstellung der Kollineation immer auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1' &= \varrho_1 x_1,\\
\varrho x_2' &= \varrho_{21} x_1 + \varrho_2 x_2,\\
\varrho x_3' &= \varrho_{31} x_1 + \varrho_{32} x_2 + \varrho_3 x_3,\\
\varrho x_4' &= \varrho_{41} x_1 + \varrho_{42} x_2 + \varrho_{43} x_3 + \varrho_4 x_4.
\end{aligned}$$

Hat die Kollineation vier getrennt liegende Doppelpunkte, so wird ihre einfachste Darstellung von der Form:

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \varrho_1 x_1 : \varrho_2 x_2 : \varrho_3 x_3 : \varrho_4 x_4.$$

Wird gleichzeitig $\varrho_1 = \varrho_3$, $\varrho_2 = \varrho_4$, so ist die Kollineation biaxial perspektiv, und für $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4$ ist sie zentrisch perspektiv. $\varrho_1 : \varrho_2$ liefert in diesen Fällen das invariante Doppelverhältnis der Kollineationen.

Ist die Kollineation keine Affinität, so läßt sich durch Einführung zweier, für Σ und Σ' im allgemeinen verschiedenen, rechtwinkligen *cartesischen* Koordinatensysteme die Beziehung auf die kanonische Form bringen

$$x' = \frac{\alpha}{x}, \quad y' = \alpha \frac{y}{x}, \quad z' = \beta \frac{z}{x}.$$

Die Ebenen $x = 0$ und $x' = 0$ sind dann die *Fluchtebenen* der Räume Σ, Σ', die jedesmal der unendlich fernen Ebene des anderen Raumes entsprechen.

Sind zwei Räume Σ, Σ *reziprok* aufeinander bezogen, so wird diese Beziehung durch Gleichungen von folgender Form vermittelt:

$$\varrho u_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

bei denen wieder die Determinante $|a_{ik}| \neq 0$ ist und durch die dem Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) von Σ die entsprechende Ebene (u_1', u_2', u_3', u_4') von Σ' zugeordnet wird. Sind (x_1', x_2', x_3', x_4') die Koordinaten eines Punktes der Ebene, so ergibt sich die bilineare Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k x_i' = 0,$$

aus dieser kann man rückwärts auch die Beziehungen

$$\sigma u_k = \sum_{i=1}^{4} a_{ik} x_i' \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

ableiten, welche die Koordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) einer Ebene von Σ mit den Koordinaten (x_1', x_2', x_3', x_4') des entsprechenden Punktes von Σ' verknüpfen.

Eine *Polarität* ergibt sich, wenn $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ ist, ein *Nullsystem* für $a_{ik} = -a_{ki}$, $a_{ii} = 0$.

Die Entdeckung der homogenen Koordinaten von Punkten im Raume gebührt anscheinend Karl Feuerbach (zuerst in

Okens Isis 1826, S. 565, dann in der Schrift *Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide* 1827). Fast gleichzeitig treten dieselben Koordinaten in Möbius' *Barycentrischem Calcul*, 1827, auf, der sie, wie aus seinen Diarien (vgl. *Werke* **4**, 710) hervorgeht, schon 1821 besaß. Ihre endgültige Methodisierung, die mit einer Erweiterung des Begriffes über die von Feuerbach und Möbius innegehaltenen Grenzen verbunden war, ist Plücker zu danken (*Analytisch geometrische Entwicklungen* 1828—31, *Analytische Geometrie des Raumes* 1846, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 1, 1895). Die Fortführung der auf sie gegründeten Theorien ist vor allen durch Hesse (*Ges. Abhandlungen* 1895, *Analytische Geometrie des Raumes*, 3. Aufl., 1876), Cayley (*Collected papers*, 13 Bde., 1889—1897), Clebsch (vgl. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*) geschehen. Siehe auch Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, 1. Teil, 4. Aufl., 1898, Castelnuovo, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, 1904.

§ 4. Linienkoordinaten.

Es handelt sich endlich noch darum, die geraden Linien des Raumes durch projektive Koordinaten festzulegen. Der Weg, der hierzu führt, ist schon von Feuerbach betreten, aber erst von Cayley bis zu Ende verfolgt worden (*Quart. Journ.* **3** (1860) 225, *Papers* IV 446). Vgl. Zeuthen, *Math. Ann.* **1** (1869) 432.

Als homogene projektive Koordinaten einer geraden Linie bezeichnen wir sechs Ausdrücke, die aus den Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) und (y_1, y_2, y_3, y_4) zweier Punkte der Geraden derart gebildet sind, daß sie sich nur um einen gemeinsamen Faktor ändern, wenn die Punkte eine beliebige Verschiebung auf ihrer Verbindungslinie erfahren. Solche Ausdrücke werden durch die Determinanten der zweireihigen Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Vmatrix}$$

geliefert, und zwar wollen wir setzen:

$$\varrho p_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \qquad \varrho p_4 = x_1 y_4 - x_4 y_1,$$
$$\varrho p_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \qquad \varrho p_5 = x_2 y_4 - x_4 y_2,$$
$$\varrho p_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \qquad \varrho p_6 = x_3 y_4 - x_4 y_3.$$

Dann besteht die identische Beziehung:

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0.$$

Sind (u_1, u_2, u_3, u_4) und (v_1, v_2, v_3, v_4) die homogenen Koordinaten zweier Ebenen, die sich in der Verbindungslinie der Punkte (x_1, x_2, x_3, x_4) und (x_1', x_2', x_3', x_4') durchschneiden, so wird auch:

$$\sigma p_1 = u_1 v_4 - u_4 v_1, \qquad \sigma p_4 = u_2 v_3 - u_3 v_2,$$
$$\sigma p_2 = u_2 v_4 - u_4 v_2, \qquad \sigma p_5 = u_3 v_1 - u_1 v_3,$$
$$\sigma p_3 = u_3 v_4 - u_4 v_3, \qquad \sigma p_6 = u_1 v_2 - u_2 v_1,$$

wo σ, wie ϱ, einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Die Ebenen, welche die gerade Linie mit den Ecken des Grundtetraeders verbinden, haben die Gleichungen:

$$p_6 x_2 - p_5 x_3 + p_1 x_4 = 0,$$
$$p_4 x_3 - p_6 x_1 + p_2 x_4 = 0,$$
$$p_5 x_1 - p_4 x_2 + p_3 x_4 = 0,$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0.$$

Die Punkte, in denen die gerade Linie die Seitenflächen des Tetraeders trifft, haben die Gleichungen:

$$p_3 u_2 - p_2 u_3 + p_4 u_4 = 0,$$
$$p_1 u_3 - p_3 u_1 + p_5 u_4 = 0,$$
$$p_2 u_1 - p_1 u_2 + p_6 u_4 = 0,$$
$$p_4 u_1 + p_5 u_2 + p_6 u_3 = 0.$$

Bei jedem dieser Gleichungssysteme sind zwei Gleichungen eine Folge der übrigen. Dem ersten Gleichungssystem genügen die Koordinaten jedes Punktes, der auf der Geraden liegt, dem zweiten die Koordinaten jeder Ebene, die durch die Gerade geht.

Zwei gerade Linien $(p_1, p_2, \ldots, p_6)$ und $(q_1, q_2, \ldots, q_6)$ schneiden sich, wenn

$$p_1 q_4 + p_2 q_5 + p_3 q_6 + p_4 q_1 + p_5 q_2 + p_6 q_3 = 0.$$

Eine Transformation des Koordinatensystems wird ausgedrückt durch homogene lineare Gleichungen

$$\varrho p_i' = \sum_{k=1}^{6} \alpha_{ik} p_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

zwischen den ursprünglichen Koordinaten $(p_1, p_2, \ldots, p_6)$ und den transformierten Koordinaten $(p_1', p_2', \ldots, p_6')$ einer geraden Linie.

Aber nur, wenn durch die Transformationsgleichungen die Relation

$$(\alpha) \qquad p_1'p_4' + p_2'p_5' + p_3'p_6' = \tau(p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6),$$

wobei τ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet, identisch erfüllt wird, sind die neuen Koordinaten ebenso wie die alten aus Punkt- oder Ebenenkoordinaten abzuleiten.

Im anderen Falle gelangt man so zu einem erweiterten Begriffe von Linienkoordinaten, die in ihrer allgemeinsten Form als homogene lineare Funktionen der ursprünglichen Linienkoordinaten definiert sind.

Besonders beachtenswert ist noch der spezielle Fall, wo durch die Transformationsgleichungen die identische Relation

$$(\beta) \qquad p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 - p_4'^2 - p_5'^2 - p_6'^2 = \\ = \tau(p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6)$$

befriedigt wird. Von solcher Art sind z. B. die Koordinaten

$$p_1' = \frac{\sqrt{\tau}}{2}(p_1 + p_4), \quad p_4' = \frac{\sqrt{\tau}}{2}(p_1 - p_4),$$

$$p_2' = \frac{\sqrt{\tau}}{2}(p_2 + p_5), \quad p_5' = \frac{\sqrt{\tau}}{2}(p_2 - p_5),$$

$$p_3' = \frac{\sqrt{\tau}}{2}(p_3 + p_6), \quad p_6' = \frac{\sqrt{\tau}}{2}(p_3 - p_6).$$

Die Koordinatensysteme, die der Beziehung (α) genügen, werden als *tetraedrale* von den *kanonischen* Systemen unterschieden, bei denen die Identität (β) erfüllt ist.

Man vgl. F. Klein, *Diss.* 1868, abgedruckt *Math. Ann.* **23** (1884) 531, und *Math. Ann.* **2** (1870) 201, 366.

Kapitel VIII.

Geometrische Rechnungsarten.

Von *H. Timerding* in Straßburg.

§ 1. Geometrische Theorie der komplexen Zahlen.

Da die besonderen Methoden, durch welche die analytischen Operationen direkt auf geometrische Größen ausgedehnt werden, im folgenden nicht weiter benutzt werden, können einige allgemein orientierende Bemerkungen über sie genügen. Sie haben ihren Ausgangspunkt genommen von der geometrischen Darstellung der (gemeinen) komplexen Zahlen, die nach einem ersten Versuch von Kühn, *Novi Comm. Ac. Petrop.* **3** (1753), 170, von Wessel (*Essai sur la représentation analytique de la direction*, Paris Mém. 1797) und Argand (*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, 1806) begründet worden ist und gewöhnlich nach Gauß (vgl. *Werke*, Bd. 2, S. 171) benannt wird.

Diese Darstellung besteht in Folgendem. Wird in einer Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem festgelegt und sind in diesem x, y die Projektionen einer Strecke AB auf die Koordinatenachsen, so weist man der *Strecke* die *komplexe Zahl* $z = x + iy$ $(i = \sqrt{-1})$ zu. Der Strecke BA ist dann die komplexe Zahl $-z$ zuzuweisen; einer Strecke, die zur x-Achse, der *reellen Achse*, parallel ist, entspricht eine reelle Zahl.

Es ergibt sich sofort, daß, wenn zwei Strecken AB und $A'B'$ gleich lang und gleich gerichtet sind, ihnen dieselbe komplexe Zahl zugeordnet ist. Die Strecken heißen dann nach Bellavitis *äquipollent* (*Ann. di Scienze del Regno Lomb. Ven.* **5** (1835), **7** (1837), *Nouv. Ann.* (2) **12** (1873), **13** (1874) in französischer Übersetzung von Laisant. Vgl. Hoüel, *Nouv. Ann.* (2) **8** (1869) 237, 289, ferner Scheffler, *Über das Verhältnis der Arithmetik zur Geometrie* 1846, Riecke, *Die Rechnung mit Richtungszahlen*

1856, Hankel, *Theorie der komplexen Zahlensysteme* 1867, Stolz und Gmeiner, *Theoret. Arithmetik* 1902, XI. Abschnitt).

Alle Operationen mit komplexen Zahlen lassen sich unmittelbar auf die sie darstellenden Strecken übertragen, wobei man sich jede Strecke nach Belieben, ohne Änderung ihrer Länge und Richtung, in der Ebene verschiebbar zu denken hat. Die 0 wird durch eine Strecke mit zusammenfallenden Endpunkten, also mit verschwindender Länge und unbestimmter Richtung, repräsentiert.

Die *Summe* zweier komplexen Zahlen wird gefunden, indem man die sie darstellenden Strecken aneinander legt. Ist die eine AB, die andere BC, so ist AC die Strecke, welche die Summe $AB + BC$ der beiden ersten Strecken und der zugehörigen komplexen Zahlen darstellt.

Um die *Differenz* zweier komplexen Zahlen zu finden, läßt man die sie darstellenden Strecken von demselben Punkte A ausgehen. Sind B und C ihre Endpunkte, so wird genommen

$$BC = AC - AB,$$

welche Gleichung sich direkt auf die zugehörigen komplexen Zahlen übertragen läßt.

Die *Proportion*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

ist für *gerichtete* Strecken dann und nur dann erfüllt, wenn im Sinne der Elementargeometrie

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

ist. Die vorstehende Gleichung ist gleichbedeutend mit der folgenden:

$$A'C' \cdot AB = AC \cdot A'B'.$$

Setzt man für die Strecken die zugehörigen komplexen Zahlen ein, so ist unter der angegebenen Voraussetzung diese Gleichung bei Annahme der gewöhnlichen Multiplikationsregeln und der Relation $i^2 = -1$ in der Tat erfüllt, und sie liefert die geometrische Darstellung der *Multiplikation* komplexer Zahlen, wenn man für $A'C'$ eine Strecke 1, nämlich eine mit der positiven x-Achse (der *reellen* Achse) gleichgerichtete Strecke AE von der Länge 1 nimmt. So sieht man, daß die Gleichung

$$AB = AC \cdot AD$$

erfüllt ist, wenn

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$$

Aus der Multiplikationsgleichung folgt die *Divisionsgleichung*

$$AB : AC = AD$$

und ihre geometrische Bedeutung sofort.

Nennt man r die Länge der Strecke AB, welche die Zahl $z = x + iy$ darstellt, φ den Winkel, welchen sie mit der positiven x-Achse bildet, so wird $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und

$$z = x + iy = re^{i\varphi};$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt der *Modul*, φ die *Amplitude* der komplexen Zahl. Gehört zu einer anderen Strecke AC die Zahl $z' = r'e^{i\varphi'}$, so wird

$$\frac{AB}{AC} = \frac{r}{r'} e^{i(\varphi - \varphi')}.$$

Liegen A, B, C in gerader Linie, so ist $\varphi - \varphi' = 0$. *Das Streckenverhältnis dreier Punkte ist dann und nur dann reell, wenn die drei Punkte in gerader Linie liegen, und zwar ist es in diesem Falle gleich dem zugehörigen Abstandsverhältnis.*

Liegen A, B, C nicht in gerader Linie und bildet man für einen weiteren Punkt D analog

$$\frac{DB}{DC} = \frac{r_1}{r_1'} e^{i(\varphi_1 - \varphi_1')},$$

so wird $\varphi - \varphi' = \varphi_1 - \varphi_1'$ dann und nur dann, wenn die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen. *Das Doppelverhältnis*

$$\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC}$$

von vier Punkten wird dann und nur dann reell, wenn die vier Punkte entweder auf einem Kreise oder auf einer Geraden liegen, und zwar ist es in diesem Falle gleich dem Doppelverhältnis der zugehörigen Abstände $\frac{r}{r'} : \frac{r_1}{r_1'}$.

Statt den *Strecken* einer Ebene kann man die komplexen Zahlenwerte auch den *Punkten* der Ebene zuordnen, indem man die darstellenden Strecken alle vom Koordinatenursprung O ausgehen läßt und statt jeder Strecke selbst ihren Endpunkt nimmt. Punkte, die zu konjugiert komplexen Zahlen $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ gehören, liegen hierbei symmetrisch zur reellen Achse. Man kann weiter auch die Ebene durch eine Kugel ersetzen, auf die man die Punkte der Ebene durch stereographische Projektion überträgt. Sind λ, θ die geographische Länge und Breite eines

Punktes auf der Kugel und r, φ die Polarkoordinaten des zugehörigen Punktes in der Ebene, so ist

$$\varphi = \lambda, \quad r = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

zu setzen, und dem Punkte (λ, θ) auf der Kugel wird sonach die komplexe Zahl $x + iy$, für die

$$x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\cos\lambda, \quad y = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\sin\lambda,$$

zugeordnet.

Setzt man $Z = X + iY$ als lineare Funktionen von $z = x + iy$ an in der Form

$$Z = az + b,$$

wobei $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ konstante komplexe Zahlen sind, so wird:

$$X = a_1 x - a_2 y + b_1,$$
$$Y = a_2 x + a_1 y + b_2.$$

Diese Gleichungen bedeuten bei der Darstellung der komplexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene eine *Ähnlichkeits*transformation dieser Ebene, durch welche die Punkte z in die Punkte Z übergehen.

Der allgemeinere Ansatz für $Z = X + iY$ oder $\overline{Z} = X - iY$

$$\text{(a)} \quad Z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{oder (b)} \quad \overline{Z} = \frac{az + b}{cz + d}$$

führt zu einer eindeutigen Punkttransformation, bei welcher die Punkte eines Kreises (oder einer Geraden) immer wieder in die Punkte eines Kreises (oder einer Geraden) übergehen, mit anderen Worten zu einer Kreisverwandtschaft. Bei dieser bleiben wie bei einer Ähnlichkeitstransformation die Winkel ungeändert, indem irgend zwei Kreise sich unter demselben Winkel schneiden wie die ihnen entsprechenden. Bei der Form (a) bleibt auch der *Sinn* des Winkels erhalten, bei der Form (b) wird er umgekehrt. In einer der beiden Formen aber läßt sich jede Kreisverwandtschaft darstellen.

§ 2. Die Quaternionen. Vektoren. Äußere und innere Produkte.

Der Gedanke, die durch die komplexen Zahlen gelieferte geometrische Analyse der Ebene auf den Raum zu übertragen, lag sehr nahe. Der Weg, der zu dieser Übertragung führt, wurde

aber lange vergebens gesucht, bis W. R. Hamilton 1843 seine Auffindung gelang (*Proc. R. Irish Acad.* **2** (1844), *Philos. Mag.* (2) **25** (1844) 10). Man kann ihn unmittelbar an die Darstellung der gemeinen komplexen Zahlen durch die *Streckenverhältnisse* in einer Ebene anknüpfen. Bilden zwei Strecken AB und AC von den Längen r, r' miteinander den Winkel α, so ist die durch das Verhältnis $AB : AC$ dargestellte komplexe Zahl:

$$z = \frac{r}{r'} e^{i\alpha}.$$

AB soll die *Zählerstrecke*, AC die *Nennerstrecke* heißen. Die 0 wird durch ein Streckenverhältnis mit verschwindender Zählerstrecke, die 1 durch ein Verhältnis, bei dem Zähler- und Nennerstrecke zusammenfallen, repräsentiert. Ein Streckenverhältnis hat einen rein imaginären Wert, wenn seine Strecken aufeinander senkrecht stehen. Wir wollen es dann der Kürze halber ein *normales Streckenverhältnis* nennen.

Es ergeben sich sofort folgende drei Regeln:

1. Wenn drei Streckenverhältnisse die Nennerstrecken gemeinsam haben, während die Zählerstrecken sich ohne Änderung ihrer Länge und Richtung zu einem Dreiecke von bestimmtem Umlaufssinne schließen lassen, so ist ihre *Summe* gleich 0.

2. Wenn drei Streckenverhältnisse aus drei Strecken AB, AC, AD in der folgenden Weise gebildet sind:

$$\frac{AB}{AC}, \quad \frac{AC}{AD}, \quad \frac{AD}{AB},$$

so ist ihr *Produkt* gleich 1, und es wird das Produkt zweier von ihnen gleich dem umgekehrten dritten Verhältnis.

3. Ein normales Streckenverhältnis ergibt mit sich selbst multipliziert ein reelles Verhältnis, das gleich dem negativen Verhältnis aus den Quadraten der Längen von Zähler- und Nennerstrecke ist, und der umgekehrte Wert eines normalen Streckenverhältnisses ist gleich dem Negativen desjenigen, das man bekommt, wenn man die Längen der Strecken durch ihre umgekehrten Werte ersetzt.

Diese Regeln lassen sich nun unmittelbar auf den Raum übertragen, indem man die Forderung, daß die ein Streckenverhältnis liefernden Strecken AB, AC einer festen Ebene angehören sollen, fallen läßt, aber nach wie vor die Forderung festhält, daß ein Streckenverhältnis seinen Wert nicht ändert, wenn seine Strecken parallel verschoben oder in ihrer Ebene so gedreht werden, daß der Winkel zwischen ihnen ungeändert bleibt, oder

die eine in beliebigem Verhältnis vergrößert und die andere in demselben Verhältnis verkleinert wird.

Gemäß der ersten Regel ergibt sich zunächst, daß man ein Streckenverhältnis mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man die *Länge* seiner Zählerstrecke mit dieser Zahl multipliziert, während man ihre *Richtung* und die Nennerstrecke völlig ungeändert läßt.

Man kann dann weiter alle Streckenverhältnisse auf vier Einheiten zurückführen, von denen eine die durch zwei zusammenfallende Strecken gelieferte Zahleinheit 1 ist und die übrigen drei, i, j, k, durch drei zueinander senkrechte Strecken OX, OY, OZ von der Länge 1 in der folgenden Weise gegeben werden:

$$i = \frac{OZ}{OY}, \quad j = \frac{OX}{OZ}, \quad k = \frac{OY}{OX},$$

woraus nach der dritten Regel auch folgt:

$$-i = \frac{OY}{OZ}, \quad -j = \frac{OZ}{OX}, \quad -k = \frac{OX}{OY}.$$

Dann ist auf Grund der ersten Regel jedes Streckenverhältnis in der Form darstellbar

$$q = \vartheta + \xi i + \eta j + \zeta k,$$

wobei ϑ, ξ, η, ζ reelle Zahlen bedeuten. Wegen der Vierzahl der Terme hat Hamilton diese Streckenverhältnisse *Quaternionen* genannt. Die Zahl $\sqrt{\vartheta^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ heißt der *Tensor* oder absolute Betrag der Quaternion.

Fallen die Geraden der das Streckenverhältnis bestimmenden Strecken zusammen, so reduziert sich das Verhältnis auf eine reine Zahl ϑ, es ist, wie Hamilton sagt, ein *Skalar,* und zwar *positiv,* wenn die beiden Strecken *gleich, negativ,* wenn sie *entgegengesetzt* gerichtet sind.

Sind die Strecken senkrecht aufeinander, so fehlt in dem Streckenverhältnis das Zahlglied oder *der skalare Teil* ϑ. Hamilton spricht dann von einem *Vektor.* Sind r, r' die Längen der beiden Strecken AB, AC, so kann man eine dritte Strecke AD von der Länge $\frac{r}{r'}$ hinzunehmen, die zu den ersten beiden senkrecht und mit ihnen ebenso orientiert ist wie die drei Einheitsstrecken OX, OY, OZ, von denen wir annehmen wollen, daß sie ein Rechtssystem bilden (d. h. die eine nach rechts, die andere nach vorn, die dritte nach oben weist). Die dritte hinzugefügte Strecke kann das normale Streckenverhältnis oder den *Vektor* verbildlichen,

denn bei einer gemeinsamen Drehung der beiden ersten Strecken in ihrer Ebene ändert sich deren Verhältnis nicht und ebensowenig, wenn die Länge der einen in demselben Verhältnis vergrößert wird, in dem man die der anderen verkleinert. Schreibt man den Vektor $\varrho = \xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k}$, so sind ξ, η, ζ die Projektionen der ihn darstellenden Strecke auf die Achsen, die die Einheitsstrecken OX, OY, OZ enthalten.

Aus der dritten Regel folgt sofort für die Multiplikation der Einheiten

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1,$$

aus der zweiten

$$\boldsymbol{ijk} = -1,$$

und weiter

$$\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}.$$

Jede Quaternion läßt sich als Produkt zweier Vektoren gewinnen. Sind diese $\varrho = \xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k}$, $\varrho' = \xi' \boldsymbol{i} + \eta' \boldsymbol{i} + \zeta' \boldsymbol{k}$, so wird das Produkt gemäß der zweiten Regel

$$q = \varrho \cdot \varrho' = -(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') + (\eta\zeta' - \zeta\eta')\boldsymbol{i} + \\ + (\zeta\xi' - \xi\zeta')\boldsymbol{j} + (\xi\eta' - \eta\xi')\boldsymbol{k},$$

d. h. es wird gewonnen, indem man die Ausdrücke der Vektoren wie algebraische Summen multipliziert unter Beachtung der für die Produkte der Einheiten gegebenen Regeln. Der vorstehende Ausdruck läßt sich auch schreiben

$$q = -ss' \cos\sigma + ss' \sin\sigma \,(\cos\lambda \boldsymbol{i} + \cos\mu \boldsymbol{j} + \cos\nu \boldsymbol{k}),$$

wenn s, s' die Längen der die Vektoren verbildlichenden Strecken sind, σ den Winkel, den sie einschließen, bedeutet, und λ, μ, ν die Richtungswinkel der mit ihnen ein Rechtssystem bildenden Normalen ihrer Ebene bezeichnen. Insbesondere wird $\varrho^2 = -s^2$.

Den skalaren Teil des vorstehenden Produktes bezeichnet Hamilton mit $S\varrho\varrho'$, sein entgegengesetzter Wert heißt nach Graßmann das *innere Produkt* der beiden Vektoren und wird von ihm $[\varrho \mid \varrho']$ geschrieben (*Ausdehnungslehre von 1862*, S. 120, *Werke*, Bd. 1^2, S. 125). Das innere Produkt wird bei der Streckendarstellung der Vektoren gefunden, indem man das Produkt der Längen dieser Strecken miteinander und mit dem Kosinus des Winkels zwischen ihnen multipliziert. Es verschwindet, wenn die Strecken zueinander senkrecht sind, und ändert sich nicht, wenn die beiden Faktoren vertauscht werden.

Der vektorielle Teil des Quaternionenproduktes, der nach Tilgung des skalaren Teils übrig bleibt, heißt das *Vektorprodukt* der beiden Vektoren und wird von Hamilton $V\varrho\varrho'$, jetzt auf verschiedene Arten geschrieben. Der Vektor, der es darstellt, steht senkrecht auf der Ebene der beiden multiplizierten Vektoren, bildet mit ihnen, wenn man sie in der gehörigen Reihenfolge nimmt, ein Rechtssystem und ist an Länge gleich dem Inhalte des Parallelogramms, das die beiden Vektoren als zwei Seiten bestimmen.

Dieses Parallelogramm kann aber auch unmittelbar zur Darstellung des Vektorproduktes benutzt werden, wenn man ihm noch einen bestimmten Umlaufssinn gibt. Diesen wählt man so, daß der im Produkt voranstehende Vektor in dem richtigen Sinne durchlaufen wird. Von dem Parallelogramme braucht man, um dadurch das Vektorprodukt darzustellen, nur festzuhalten: seinen Inhalt, seinen Umlaufssinn und die Stellung seiner Ebene. Eine solche geometrische Größe bezeichnete Graßmann (*Ausdehnungslehre von 1844*, S. 48, *Werke*, Bd. 1^1, S. 77) direkt als *Parallelogramm* oder *Spateck* und nannte das dadurch dargestellte Vektorprodukt ein *äußeres Produkt*, das er $[\varrho\varrho']$ schreibt. Das Charakteristische des äußeren Produktes ist, daß es bei Vertauschung der beiden Faktoren sein Vorzeichen wechselt, indem der Umlaufssinn des dasselbe darstellenden Parallelogramms sich umkehrt, und daß es verschwindet, wenn die zu multiplizierenden Vektoren der Richtung nach zusammenfallen.

Ist $q = \varrho \cdot \varrho'$ und setzt man $\bar{q} = \varrho' \cdot \varrho$, so wird

$$\bar{q} = Sq - Vq$$

und heißt die zu q *konjugierte* Quaternion; es ist $q \cdot \bar{q} = \varrho^2 \cdot \varrho'^2$.

Das Produkt dreier Vektoren ϱ, ϱ', ϱ'' kann auf doppelte Art gebildet werden, einmal indem man ϱ, ϱ' zu einer Quaternion vereinigt und diese mit ϱ'' multipliziert, zweitens aber auch, indem man ϱ mit dem Produkt von ϱ' und ϱ'' multipliziert. Beidemal aber ergibt sich dasselbe Resultat. Dieses assoziative Gesetz:

$$(\varrho \cdot \varrho') \cdot \varrho'' = \varrho \cdot (\varrho' \cdot \varrho'')$$

ist eine der wichtigsten Eigenschaften des Quaternionenkalküls. Vgl. dazu u. a. Möbius, *Leipz. Ber.* **11** (1859) 138, *Werke* II 55.

Das Produkt von drei Vektoren $\varrho = \xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k}$, $\varrho' = \xi' \boldsymbol{i} + \eta' \boldsymbol{j} + \zeta' \boldsymbol{k}$, $\varrho'' = \xi'' \boldsymbol{i} + \eta'' \boldsymbol{j} + \zeta'' \boldsymbol{k}$ kann man sonach einfach schreiben $\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho''$, indem man nach Belieben zuerst die beiden ersten oder die beiden letzten Faktoren zu einer Quaternion ver-

einigen kann. Zerlegt man das Produkt dann in seinen skalaren und vektoriellen Teil, so findet man für den ersteren

$$S(\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'') = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}.$$

Diese Zahl bedeutet das Volumen des von den drei Vektoren als drei Kanten bestimmten Parallelepipedons, positiv genommen, wenn die drei Vektoren in der Reihenfolge, in welcher sie in dem Produkt erscheinen, ein Rechtssystem bilden, negativ im entgegengesetzten Falle. Den so bestimmten Ausdruck sieht Graßmann als das *äußere Produkt der drei Vektoren* an, weil er sein Vorzeichen wechselt, wenn man zwei in ihm nebeneinanderstehende Vektoren vertauscht. Er verschwindet, außer wenn einer der Vektoren verschwindet, dann und nur dann, wenn die drei Vektoren in *einer* Ebene liegen (bezw. *einer* Ebene parallel sind).

Der vektorielle Teil des Quaternionenproduktes wird in der Hamiltonschen Schreibweise

$$V(\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'') = \varrho' \cdot S(\varrho \cdot \varrho'') - \varrho \cdot S(\varrho' \cdot \varrho'') - \varrho'' \cdot S(\varrho \cdot \varrho').$$

Er gibt zu keinen weiteren Bemerkungen Anlaß.

Der *Quotient* zweier Vektoren ist nach Hamilton definiert durch

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\varrho \cdot \varrho'}{\varrho'^2},$$

wobei, für $\varrho' = \xi' \boldsymbol{i} + \eta' \boldsymbol{j} + \zeta' \boldsymbol{k}$, $\varrho'^2 = -(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)$ wird.

Nach dieser Definition ist der Quotient zweier Vektoren identisch mit dem Quotient der die Vektoren verbildlichenden Strecken.

Es läßt sich nun zeigen, daß, wenn man zwei Quaternionen $q = \vartheta + \varrho$, $q' = \vartheta' + \varrho'$ oder

$$q = \vartheta + \xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k}, \quad q' = \vartheta' + \xi' \boldsymbol{i} + \eta' \boldsymbol{j} + \zeta' \boldsymbol{k}$$

nach der gewöhnlichen Regel für die Multiplikation zweier Summen miteinander multipliziert, der entstehende Ausdruck

$$Q = q \cdot q' = (\vartheta\vartheta' - \xi\xi' - \eta\eta' - \zeta\zeta') + (\vartheta\xi' + \xi\vartheta' + \eta\zeta' - \zeta\eta')\boldsymbol{i} + \\ + (\vartheta\eta' - \xi\zeta' + \eta\vartheta' + \zeta\xi')\boldsymbol{j} + (\vartheta\zeta' + \xi\eta' - \eta\xi' + \zeta\vartheta')\boldsymbol{k}$$

der durch die zweite der vorangestellten Regeln geforderte ist.

Das Produkt der zwei Quaternionen

$$\mathfrak{q} = \frac{\varrho}{\varrho'}, \quad \mathfrak{q}' = \frac{\varrho'}{\varrho}$$

ist gleich 1, denn es wird

$$\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}' = \frac{\varrho}{\varrho'} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{(\varrho \cdot \varrho') \cdot (\varrho' \cdot \varrho)}{\varrho'^2 \cdot \varrho^2} = \frac{q \cdot \bar{q}}{\varrho^2 \cdot \varrho'^2} = \frac{\varrho^2 \cdot \varrho'^2}{\varrho^2 \cdot \varrho'^2} = 1.$$

$\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ heißen *reziproke* Quaternionen, und man schreibt $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}^{-1}$.

Über Quaternionen vgl. zunächst die Originalwerke von W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions,* Dublin 1853, *Elements of Quaternions* (posthum) London 1866, Tait, *An elementary Treatise on Quaternions,* zuerst London 1867, später mehrere Auflagen (deutsch von Scherff, Leipzig 1880), Hankel, *Theorie der komplexen Zahlensysteme,* Leipzig 1867, Graefe, *Theorie der Quaternionen,* Leipzig 1883.

Die Quaternionen haben eine besondere arithmetische Bedeutung gewonnen durch den von Frobenius, *J. f. Math.* **84**, 63, geführten Nachweis, daß sie die einzige Erweiterung der gemeinen komplexen Zahlen bilden, für die sich eine Multiplikation mit allen Regeln der gewöhnlichen Zahlenmultiplikation, allein ausgenommen das kommutative Gesetz, aufstellen läßt. Vgl. Stolz-Gmeiner, *Theoret. Arithmetik,* X. Abschnitt.

Über Vektoranalysis s. die übersichtlichen Darstellungen in Heaviside, *Electromagnetic Theory* (1894), Vol. I, p. 132 seq., Föppl, *Geometrie der Wirbelfelder*, 1897, Ferraris, *Lezioni di elettrotecnica,* Kap. I, 1899, Abraham-Föppl, *Theorie der Elektrizität,* Bd. 1, 1907, Gibbs-Wilson, *Vector Analysis,* 1905, und die neueren Lehrbücher: Gans, *Einführung in die Vektoranalysis,* 1905, Bucherer, *Elemente der Vektoranalysis,* 2. Aufl., 1905, Jahnke, *Vorlesungen über Vektorenrechnung*, 1905 (letzteres mit starker Betonung der Graßmannschen Theorie).

§ 3. Die Graßmannsche Punktrechnung.

Die Bedeutung Graßmanns für die geometrische Operationssymbolik liegt in der Ausbildung einer wesentlich von Möbius' „baryzentrischem Calcul" beeinflußten Punktrechnung. Diese Punktrechnung trägt im Gegensatz zu der äquiform metrischen Hamiltonschen Analyse in ihren Grundlagen einen *affin metrischen* Charakter.

Sowie man versucht, mit Punkten analog wie mit Zahlen zu operieren, stellt sich die Notwendigkeit heraus, den Punkt nicht

schlechthin als geometrisches Element, sondern mit einem positiven oder negativen Zahlfaktor behaftet als *Punktgröße* aufzufassen. So ergibt sich für eine allgemeine Punktgröße der symbolische Ausdruck

$$\mathfrak{P} = mP.$$

Hierbei bezeichnet m den Zahlfaktor, P den zugehörigen *einfachen Punkt*, der als Träger der Punktgröße auftritt und sich selbst als Punktgröße für $m = 1$ ergibt. Für $m = 0$ findet man entweder eine *verschwindende* oder eine *uneigentliche* Punktgröße, ersteres, wenn der zugehörige einfache Punkt als ein im Endlichen gelegener Punkt bestehen bleibt, letzteres, wenn dieser Punkt ins Unendliche rückt, d. h. nur als eine *Richtung* fortbesteht. Die Punktgröße kann dann in der Form

$$\mathfrak{P} = \mu \cdot p$$

angesetzt werden, wo p ein Symbol für die betr. Richtung und μ ein neuer Zahlfaktor ist. Diese uneigentlichen Punktgrößen sind mit den *Vektoren* identisch und werden von Graßmann als *Strecken* bezeichnet. Zur Unterscheidung ist es gut, die Punktgrößen, für die m einen endlichen, von 0 verschiedenen Wert und P eine bestimmte Lage im Endlichen hat, als *eigentliche* Punktgrößen auszuzeichnen.

Die *Summation* zweier eigentlichen Punktgrößen $m_1 P_1$ und $m_2 P_2$ entspricht, solange $m = m_1 + m_2 \neq 0$, genau dem Archimedischen Hebelgesetze. Es ergibt sich als Summe eine eigentliche Punktgröße mP, wobei P der Punkt auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2 ist, für den der Größe und dem Sinne nach

$$\frac{PP_1}{PP_2} = + \frac{m_2}{m_1}$$

wird. Ist dagegen $m_1 + m_2 = 0$, so ist die Summe ein Vektor μp, dessen Richtung wenn $m_1 > 0$, die der Strecke $P_2 P_1$ und dessen Zahlwert $\mu = m_1 \cdot P_2 P_1$ ist. So läßt sich jeder Vektor AB als die Differenz $B - A$ seiner als einfache Punkte behandelten Endpunkte auffassen, wenn man die Subtraktion einer Punktgröße durch die Addition der *entgegengesetzten* Punktgröße (mit demselben Träger und entgegengesetzt gleichen Zahlfaktor) definiert.

Nimmt man vier einfache Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, welche die Ecken eines *Grundtetraeders* bilden, beliebig an, so läßt sich *jede* Punktgröße in der Form darstellen

$$\mathfrak{P} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4,$$

sie wird zum einfachen Punkt P, wenn

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

ist. Die Zahlfaktoren x_1, x_2, x_3, x_4 sind Moebius' *baryzentrische Koordinaten.*

Statt der *Punkte* A_2, A_3, A_4 kann man die *Vektoren* $e_1 = A_2 - A_1$, $e_2 = A_3 - A_1$, $e_3 = A_4 - A_1$ einführen und findet dann für einen einfachen Punkt die (inhomogene) Darstellung

$$P = A_1 + xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

wenn man x, y, z für x_2, x_3, x_4 schreibt. x, y, z sind die gewöhnlichen affinen (cartesischen) Koordinaten des Punktes, wenn für die Einheitsstrecken auf den Koordinatenachsen die Tetraederkanten A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 genommen werden.

Sind P, Q *zwei* Punkte, so wird jede Punktgröße, die der Geraden PQ angehört, von der Form $\lambda P + \mu Q$. Sind P, Q, R *drei* Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, so wird jede Punktgröße, die der Ebene PQR angehört, von der Form $\lambda P + \mu Q + \nu R$.

Das wesentliche Hilfsmittel für die Raumanalyse ist bei Graßmann nun die Bildung der *äußeren Produkte* von Punktgrößen. Für diese Produkte gilt allgemein die Regel, daß sie ihr Vorzeichen (ihren Sinn) wechseln, wenn in ihnen zwei nebeneinanderstehende Faktoren vertauscht werden, und verschwinden, sowie in ihnen zwei gleiche Faktoren vorkommen, ferner gilt für sie stets das assoziative Gesetz $[a(bc) = (ab)c]$. Wir wollen die Produktbildungen hier auf einfache Punkte beschränken, die Ausdehnung auf beliebige Punktgrößen gibt keine wesentliche Erweiterung.

Das Produkt zweier Punkte P, Q ist der *Linienteil* (oder die Liniengröße) $[PQ]$, d. h. eine Strecke von bestimmter Länge und bestimmtem Richtungssinn auf einer bestimmten geraden Linie, so daß das Produkt zweier Punkte sich nicht ändert, wenn man die beiden Punkte in der Richtung ihrer Verbindungslinie um dieselbe Strecke verschiebt.

Das Produkt dreier Punkte P, Q, R ist der *Ebenenteil* (oder die Ebenengröße) $[PQR]$, d. h. eine Fläche von bestimmtem Inhalt und bestimmtem Umlaufssinn in einer bestimmten Ebene. Das Produkt dreier Punkte ändert sich demnach nicht, wenn man die Punkte in ihrer Verbindungsebene derart verschiebt, daß der Inhalt des Dreiecks, das sie bilden, und der Umlaufssinn, den sie durch ihre Reihenfolge an demselben bestimmen, sich nicht ändert.

Das Produkt von vier Punkten P, Q, R, S ist der *Raumteil* $[PQRS]$, d. h. ein Körper von bestimmtem Volumen und bestimmtem Umkreisungssinn in seiner Oberfläche. Das Volumen ist bestimmt durch das Tetraeder $PQRS$, der Umkreisungssinn durch die Reihenfolge der Ecken PQR.

Die Verwendung der Ausdrücke Länge, Fläche, Volumen kann den Anschein erwecken, als handelte es sich hier um Kongruenzbestimmungen und nicht um affine Beziehungen. Man erkennt aber sofort, daß in Wirklichkeit nur Längen auf derselben Geraden und Flächen in derselben Ebene verglichen werden, und diese Vergleichung gehört in das Gebiet der affinen Geometrie. Bei den Raumteilen handelt es sich um die Vergleichung des veränderlichen Volumens mit einem festen Volumen, für das man zweckmäßig das Volumen des Grundtetraeders wählt, und auch diese Vergleichung gehört in die affine Geometrie. Sind die vier Punkte in der Form gegeben:

$$P = \Sigma x_i A_i, \quad Q = \Sigma x_i' A_i, \quad R = \Sigma x_i'' A_i, \quad S = \Sigma x_i''' A_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so findet man für das in Rede stehende Volumenverhältnis:

$$\frac{[PQRS]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix}.$$

Führt man in gleicher Weise das Produkt $[PQ]$ nach der gewöhnlichen Regel für die algebraische Multiplikation zweier Summen aus, indem man hier bedenkt, daß $[A_i A_k] = -[A_k A_i]$ und $[A_i A_i] = 0$ wird, so ergibt sich

$$[PQ] = \sum_{i,k} p_{ik} [A_i A_k] \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4,\ i \neq k).$$

Dabei ist

$$p_{ik} = x_i x_k' - x_k x_i'$$

und läßt sich gemäß der obigen Formel deuten als Volumenverhältnis, so daß z. B.

$$p_{23} = \frac{[A_1 P Q A_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]}, \quad p_{14} = \frac{[P A_2 A_3 Q]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]}$$

wird. Analog wird das Produkt

$$[PQR] = u_1 [A_2 A_3 A_4] - u_2 [A_1 A_3 A_4] + u_3 [A_1 A_2 A_4] - u_4 [A_1 A_2 A_3],$$

wobei die u als die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{Vmatrix}$$

auftreten und sich auch als Volumenverhältnisse in folgender Weise festlegen lassen:

$$u_1 = \frac{[A_1 PQR]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]}, \quad u_2 = \frac{[A_2 PQR]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]}, \quad u_3 = \frac{[A_3 PQR]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]},$$
$$u_4 = \frac{[A_4 PQR]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]}.$$

Die p_{ik} sind die homogenen Koordinaten der geraden Linie PQ, die u_i die homogenen Koordinaten der Ebene PQR, so wie sie sich auf Grund der Möbiusschen Punktkoordinaten ergeben. Aus dem Vorstehenden ergibt sich die folgende übereinstimmende Definition aller dieser Koordinaten: *Nimmt man das Volumen des Grundtetraeders als die Volumeneinheit an, so werden die Koordinaten eines Punktes P gegeben durch die (mit bestimmten Vorzeichen genommenen) Volumina der Tetraeder, welche dieser Punkt P mit je drei Ecken des Grundtetraeders zusammen bestimmt, die Koordinaten einer Geraden PQ werden gegeben durch die Volumina der Tetraeder, welche P, Q mit je zwei Ecken des Grundtetraeders bestimmen, und die Koordinaten einer Ebene durch die Volumina der Tetraeder, welche P, Q, R mit je einer Ecke des Grundtetraeders bestimmen.*

Durch Multiplikation mit einer Zahl geht jede der betrachteten geometrischen Größen in eine gleichartige über, deren Träger (Punkt, Gerade, Ebene, Raum) derselbe ist.

Auf Grund des distributiven Gesetzes der äußeren Multiplikation, das sich in der Formel $[a(b + c)] = [ab] + [ac]$ ausspricht, ergibt sich, daß ein äußeres Produkt nicht nur dann verschwindet, wenn zwei seiner Faktoren gleich sind, sondern auch, wenn ein Faktor durch lineare Kombination (insbesondere durch Addition oder Subtraktion) aus den übrigen entsteht.

Das Produkt zweier Punkte $[PQ]$ verschwindet nur dann, wenn die beiden Punkte zusammenfallen, das Produkt dreier Punkte $[PQR]$, wenn sie in gerader Linie liegen, das Produkt von vier Punkten $[PQRS]$, wenn sie in einer Ebene liegen.

Die Summe $\pi + \pi'$ zweier Ebenenteile π, π' ist immer wieder ein Ebenenteil. Alle Ebenenteile, die von der Form

$\lambda\pi + \lambda'\pi'$ sind, gehören den Ebenen eines *Büschels* an; alle Ebenenteile, welche die Form $\lambda\pi + \lambda'\pi' + \lambda''\pi''$ haben, gehören den Ebenen eines *Bündels* an.

Die Summe zweier Linienteile $[PQ]$ und $[RS]$ ist nur dann wieder ein Linienteil, wenn $[PQRS] = 0$ ist. Die Summe beliebig vieler Linienteile läßt sich aber immer auf die Summe von höchstens zwei Linienteilen zurückführen. Die Summen von Linienteilen finden ihre mechanische Deutung in der Vereinigung der Kräfte am starren Körper, sie sind auch für die Theorie des Nullsystems (s. S. 125) von großer Bedeutung, indem die Linien zweier (windschiefen) Linienteile, welche dieselbe Summe ergeben, immer reziproke Polaren eines bestimmten Nullsystems sind.

Auf die Ergänzungen, welche die vorstehenden Sätze erfordern, wenn man auch die uneigentlichen Punktgrößen in Betracht zieht, wollen wir nicht weiter eingehen.

Für die Graßmannsche Theorie vgl. man außer den bereits zitierten Hauptwerken die Preisschrift *Geometrische Analyse* usw., Leipzig 1847, *Werke* I^1, S. 321, und die im zweiten Bande der gesammelten Werke vereinigten Abhandlungen, insbesondere die aus *Journ. f. Math.* **49** (1855) 10 (*Werke* II^1, S. 145.)

Für das Verhältnis von Graßmanns Lehre zu den Untersuchungen von Möbius ist lehrreich die nachgelassene Arbeit des letzteren in seinen Werken IV, S. 663.

Eine Darstellung der Graßmannschen Ausdehnungslehre haben gegeben: V. Schlegel, *System der Raumlehre,* Leipzig 1875, und *Graßmanns Leben und Werke,* Leipzig 1878, Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Graßmann.* Torino 1888, Deutscher Auszug von Schepp, Leipzig 1891, Kraft, *Abriß des geometrischen Kalkuls,* Leipzig 1893.

Als eine Fortführung der Hamiltonschen Quaternionen lassen sich in gewissem Sinne die *Biquaternionen* von Clifford (*Proc. Lond. M. Soc.* **4** (1873), 381, *Math. papers* p. 181) ansehen. Der Weg, der zu diesen geführt hat, mündet aus in den Untersuchungen von Study, die in dessen *Geometrie der Dynamen* (1903) ihre zusammenfassende Darstellung gefunden haben. Das Charakteristische an Cliffords Forschung ist der Übergang zur nichteuklidischen (elliptischen) Geometrie, aus dieser heraus sind auch die Studyschen Arbeiten zu verstehen, er hat aber seine Resultate nachher auf den gewöhnlichen Raum übertragen. Es handelt sich darum, mehrere einfache Raumelemente (Punkte, Gerade, Ebenen) zu einem höheren Raumelemente zusammenzufassen und auch auf diese höheren Raumelemente den Begriff

der Summation zu übertragen. So erscheint der Inbegriff zweier Ebenen als *Keil*, eine Ebene und ein in ihr liegender Punkt als *Quirl* usw. Eine Gerade von bestimmtem Richtungssinn und ein auf ihr liegender Punkt als primitives Raumelement haben schon in der Lieschen Theorie der *Berührungstransformationen* eine große Rolle gespielt.

§ 4. Theorie der Matrices.

Die gemeinen komplexen Zahlen $\gamma = \alpha + i\beta$ lassen sich nicht bloß durch die Punkte einer Ebene darstellen, sie lassen sich auch durch die Ähnlichkeitstransformationen um den Ursprung O

$$x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y$$

repräsentieren, deren Vergrößerungsverhältnis der Modul, deren Drehungswinkel die Amplitude der komplexen Zahl ist, und die für $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$ in der einfachen Form dargestellt werden:

$$z' = \gamma z.$$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen wird dann durch die Aufeinanderfolge der zugehörigen Transformationen gegeben.

Die komplexen Zahlen lassen sich aber auch zu einer bestimmten Gruppe von Kreisverwandtschaften in einfache Beziehung bringen. Ist $\alpha + i\beta$ die komplexe Zahl, so wird die zugehörige Kreisverwandtschaft durch die Gleichung dargestellt:

$$z' = \frac{\alpha z + i\beta}{i\beta z + \alpha}.$$

In der Tat ergibt sich, wenn man eine neue gleichgeartete Kreisverwandtschaft hinzunimmt:

$$z'' = \frac{\alpha' z' + i\beta'}{i\beta' z' + \alpha'},$$

für die aus diesen beiden zusammengesetzte Transformation:

$$z'' = \frac{(\alpha'\alpha - \beta'\beta)z + i(\alpha'\beta + \beta'\alpha)}{i(\alpha'\beta + \beta'\alpha)z + (\alpha'\alpha - \beta'\beta)},$$

also eine Kreisverwandtschaft von derselben Art, die durch die Gleichung

$$z'' = \frac{\alpha'' z + i\beta''}{i\beta'' z + \alpha''}$$

dargestellt wird, wenn man

$$\alpha'' + i\beta'' = (\alpha + i\beta)(\alpha' + i\beta')$$

setzt. Die so resultierende Verwandtschaft bezeichnet man als das *Produkt* der beiden gegebenen. Dieses Produkt ist von der Reihenfolge, in der die Transformationen angewandt werden, unabhängig. Die zur Verwendung kommenden Transformationen sind *vertauschbar* und bilden eine Gruppe vertauschbarer Transformationen oder eine *Abelsche Gruppe*. Sie sind ferner dadurch charakterisiert, daß sie zwei auf der reellen Achse im Abstand 1 vom Nullpunkte O liegende Punkte ($z = 1$ und $z = -1$) ungeändert lassen.

Betrachtet man nun die allgemeinere Gruppe von Kreisverwandtschaften, die durch Gleichungen von der Form

$$z' = \frac{(\vartheta + i\xi)z + i(\eta + i\zeta)}{i(\eta - i\zeta)z + (\vartheta - i\xi)}$$

dargestellt werden, so ergibt sich, wenn wir eine neue Transformation derselben Art hinzunehmen, nämlich

$$z'' = \frac{(\vartheta' + i\xi')z' + i(\eta' + i\zeta')}{i(\eta' - i\zeta')z' + (\vartheta' - i\xi')},$$

für das Produkt der beiden Transformationen:

$$z'' = \frac{(\vartheta'' + i\xi'')z + i(\eta'' + i\zeta'')}{i(\eta'' - i\zeta'')z + (\vartheta'' - i\xi'')},$$

indem wir ϑ'', ξ'', η'', ζ'' durch das Quaternionenprodukt

$$(\vartheta'' + \xi''i + \eta''j + \zeta''k) =$$
$$= (\vartheta + \xi i + \eta j + \zeta k)(\vartheta' + \xi' i + \eta' j + \zeta' k)$$

definieren. Dieser interessante Zusammenhang zwischen den Quaternionen und linearen Transformationen im binären Gebiet ist von Cayley aufgedeckt worden. S. *Math. Ann.* **15** (1879) 238, **16** (1880) 260, 439, *Papers* X 153, XI 237, *Mess. of Math.* **14** (1885) 108, *Papers* XII, 300, und das von Cayley herrührende Kap. VI in Taits *Treatise on Quaternions* 1890.

Nimmt man statt der Darstellung der komplexen Zahlwerte durch die Punkte einer Ebene die analoge Darstellung auf der Kugel, so bedeutet die Transformation (3), falls

$$\vartheta^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

ist, eine einfache Drehung der Kugel um einen ihrer Durchmesser, dessen Endpunkte den Werten

$$z = \frac{\xi \pm \sqrt{1-\vartheta^2}}{\eta^2+\zeta^2}(\eta + i\zeta)$$

entsprechen. Der Drehungswinkel ω ist dabei durch die einfache Gleichung

$$\vartheta = \sin \tfrac{1}{2}\omega$$

bestimmt.

Diese Deutung der Quaternionen legt es nahe, eine lineare Transformation

$$y = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}},$$

oder homogen geschrieben

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

direkt als Gegenstand einer analytischen Operationssymbolik anzusehen und sie einfach in der folgenden Weise zu charakterisieren:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sie wird dann als eine *Matrix* bezeichnet, und für die Multiplikation der Matrices ergibt sich die Regel

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Variablensysteme selbst lassen sich durch die Matrices

$$(y) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

repräsentieren, und die Transformationsgleichungen schreiben sich dann einfach

$$(y) = A(x).$$

Die Multiplikationsregel der Matrices erinnert an die Multiplikation der Determinanten. Schreibt man

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A|,$$

und nennt man diese Determinante den *Modul* der Matrix A, so ergibt sich aus der Gleichung

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

sofort der Satz: *Der Modul des Produktes zweier Matrices ist das Produkt aus den Modulen der einzelnen Matrices.*

Das Rechnen mit Matrices läßt sich auf solche mit beliebig vielen Zeilen und Spalten übertragen. Für die Geometrie kommen zunächst nur die mit drei und vier Zeilen in Betracht, welche sich ebenso auf die projektiven Transformationen der Grundgebilde *zweiter* und *dritter* Stufe beziehen wie die zweizeiligen auf die Projektivitäten in den Grundgebilden *erster* Stufe. Wir wollen uns der Kürze und Bequemlichkeit halber auf die dreizeiligen Matrices beschränken.

Eine dreizeilige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

begründet eine lineare Transformation

$$(y) = A(x)$$

im ternären Gebiet. Mit jeder solchen Transformation ist eine andere

$$(u) = A'(v)$$

für die zu x_i, y_i kontragredienten Variabeln u_i, v_i, deren Zusammenhang durch die Identität

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \equiv v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$$

definiert ist, verbunden. A' unterscheidet sich von A nur dadurch, daß Zeilen und Spalten vertauscht sind, und heißt die *Transponierte* von A.

Für die Zusammensetzung zweier Transformationen, d. h. das Produkt der zugehörigen Matrices ergibt sich jetzt die Regel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Unter allen Matrices ist die *uneigentliche Matrix,* deren sämtliche Elemente 0 sind und die mit O bezeichnet werden mag, und die Matrix, für welche die Elemente in der Hauptdiagonale (a_{11}, a_{22}, a_{23}) gleich 1, alle anderen gleich 0 sind, besonders ausgezeichnet. Die zur letzteren gehörige Transformation ist die

Identität, die Matrix selbst mag, da sie die Rolle der *Einheit* spielt, mit E bezeichnet werden. Bei Multiplikation mit E bleibt jede Matrix ungeändert, und es ist $E^\mu = E$. Eine Matrix mit nicht verschwindendem Modul ergibt, mit einer anderen multipliziert, nur dann die Matrix O, wenn der zweite Faktor selbst die Matrix O ist. Ist nun das Produkt zweier Matrices mit nicht verschwindenden Moduln $A \cdot B = E$ und damit auch $B \cdot A = E$, so heißt B die *Inverse* von A und wird geschrieben

$$B = A^{-1}.$$

Ist $(y) = A(x)$, so wird

$$(x) = A^{-1}(y).$$

Die Inverse wird also durch die Umkehrung der ursprünglichen Transformation geliefert.

Die Transponierte der Inversen ist die Inverse der Transponierten, und aus $AB = C$ folgt

$$A = CB^{-1}, \quad B = A^{-1}C, \quad C^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Zwei Matrices A, B heißen wie die zugehörigen Transformationen vertauschbar, wenn $A \cdot B = B \cdot A$ ist. Dann ist auch $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$: *die Inversen vertauschbarer Matrices (und ebenso ihre Transponierten) sind wieder vertauschbar.*

Wendet man auf die Variabeln in der Transformationsgleichung $(y) = A(x)$ eine und dieselbe Transformation an, indem man setzt

$$(y) = T(\eta), \quad (x) = T(\xi),$$

so ergibt sich $T(\eta) = AT(\xi)$ oder

$$(\eta) = T^{-1}AT(\xi),$$

während umgekehrt

$$(\xi) = T^{-1}A^{-1}T(\eta)$$

wird. Die zueinander inversen Matrices

$$A_\tau = T^{-1}AT \text{ und } A_\tau^{-1} = T^{-1}A^{-1}T$$

heißen die *Transformierten* von A und der Inversen A^{-1} durch T. Aus $AB = C$ folgt sofort $A_\tau B_\tau = C_\tau$: *die Transformierte des Produktes ist das Produkt aus den Transformierten der Faktoren.*

Die *Summe* zweier Matrices wird definiert durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend wird, wenn m eine beliebige Zahl bedeutet,

$$m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

gesetzt. Von allen Matrices, welche sich aus μ gegebenen A_1, A_2, ... A_μ linear zusammensetzen in der Form

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_\mu A_\mu,$$

und ebenso von den zugehörigen Transformationen sagt man, daß sie ein lineares System $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Stufe bilden.

Die Summen der Matrices befolgen die gewöhnlichen Rechenregeln der Addition. Für die Verbindung von Addition und Multiplikation gilt das distributive Gesetz, das sich in der Formel ausspricht:

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Zwischen irgend 10 Matrices (bei n-reihigen Matrices $n^2 + 1$) besteht immer eine homogene lineare Relation, d. h. eine der Matrices läßt sich aus den übrigen linear zusammensetzen. Aus einer vorgelegten Matrix A kann man die Matrices ableiten

$$mE + m_1 A + m_2 A^2 + \cdots + m_\mu A^\mu.$$

Hierbei aber ergibt sich für μ die obere Grenze 2 (allgemein $n - 1$), indem jede höhere Potenz auf Grund einer Relation

$$A^3 = -g_1 A^2 - g_2 A - g_3 E,$$

aus der auch für $\mu > 3$

$$A^\mu = -g_1 A^{\mu-1} - g_2 A^{\mu-2} - g_3 A^{\mu-3}$$

folgt, auf niedrigere Potenzen zurückgeführt werden kann. Jede dreireihige Matrix genügt so einer symbolischen Gleichung

$$A^3 + g_1 A^2 + g_2 A + g_3 E = 0,$$

die von Hamilton entdeckt ist. Die Bedeutung der Koeffizienten g_1, g_2, g_3 ist die, daß sie gleichzeitig die Koeffizienten in der Gleichung dritten Grades

$$-\begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - z \end{vmatrix} = 0$$

sind, die sonach ausgeschrieben lautet

$$z^3 + g_1 z^2 + g_2 z + g_3 = 0.$$

Anderseits kann man, wenn z_1, z_2, z_3 die Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen, die symbolische Gleichung, der die Matrix genügt, auch in der Form schreiben:

$$(A - z_1 E)(A - z_2 E)(A - z_3 E) = 0.$$

Die Theorie der Matrices ist begründet worden durch Cayley, *Philos. Trans.* 148 (1858) 17, *Papers* II 475. Sie ist in origineller Weise ausgeführt von Frobenius, *J. f. Math.* **84** (1878) 1, und von Sylvester zu einer „universellen Algebra" systematisch ausgebildet: Sylvester, *Am. J. of Math.* **6** (1884) 270; Taber, ibid. **12** (1890) 337 (hier S. 352 ff. eine Skizze der Geschichte dieser Theorie). Vgl. auch das neue Lehrbuch von Whitehead, *A Treatise on universal Algebra,* 1900.

Kapitel IX.

Topologie.

Von *M. Dehn* in Münster i. W.

§ 1. Einleitung.

1. Begriff der Topologie. Die „Topologie“ (Listing) oder Analysis situs (Leibniz, Euler) beschäftigt sich mit der Anordnung räumlich ausgedehnter Gebilde. Sie wird neuerdings in zwei nach Methode und Inhalt ganz verschiedene Teile zerfällt. Der erste davon gehört der sogenannten Präzisionsmathematik an. Hier werden die Fragen behandelt: Wann stellt eine Menge von Zahlen, Zahlenpaaren, Zahlentripeln usw. auf der geraden Linie, in der Ebene oder im Raume Strecken, Kurvenstücke, geschlossene Kurven, geschlossene oder berandete, ein- oder zweiseitige Flächen usw. dar? Dieser Teil soll hier nicht näher behandelt werden. Als *Literatur* sei angeführt: Schönflies, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (*Math. Ver.*) I, 1900, II 1908.

Der andere Teil, die eigentliche Topologie, liefert zunächst die Grundlagen für die vorigen Untersuchungen, indem diejenigen Eigenschaften der Reihe nach aufgestellt werden, die jene Gebilde und ihre mehrdimensionalen Analoga charakterisieren. Sodann aber behandelt diese Topologie die Eigenschaften der Gebilde, die ihre Zusammensetzung aus Punkten, Kurven, Flächen usw. zur Folge hat.

2. Axiome. Der Betrachtung zugrunde liegt das folgende System von Postulaten (vgl. *Math. Enz.*, Bd. III, S. 168):

I. *Existentialaxiome.*

a) *Es gibt unbegrenzt viele Punkte.*

b) *Linienstücke (Strecken), Flächen- und Raumstücke sind Punktmengen.*

c) *Zu je zwei Punkten gibt es beliebig viele von diesen Punkten begrenzte Linienstücke (Strecken), die sonst keine gemeinsamen Punkte haben.*

d) *Zu je zwei Linienstücken mit gemeinsamen Grenzpunkten, sonst aber ohne gemeinsame Punkte, gibt es beliebig viele von diesen zwei Linien begrenzte Flächenstücke ohne sonstige gemeinsame Punkte.*

c) *Zu je zwei Flächenstücken, die durch dieselben beiden Linien begrenzt werden und sonst keine gemeinsamen Punkte haben, gibt es ein und nur ein von ihnen begrenztes Raumstück.*

II. *Zerlegungsaxiome.*

a) 1. *Jedes Linienstück mit den Grenzpunkten P_0' und P_0'' ist gleich der Gesamtheit von zwei Linienstücken, die einen gemeinsamen Punkt Q_0 haben und durch die Punkte P_0' und Q_0 resp. durch Q_0 und P_0'' begrenzt werden.*

2. *Jedes Flächenstück mit den Grenzstrecken S_1' und S_1'' ist gleich der Gesamtheit von zwei Flächenstücken, die bloß eine Strecke T_1 gemeinsam haben, und von S_1' und T_1, resp. von T_1 und S_1'' begrenzt werden.*

3. *Jedes Raumstück mit den Grenzflächen S_2' und S_2'' ist gleich der Gesamtheit von zwei Raumstücken, die bloß eine Fläche T_2 gemeinsam haben und von S_2' und T_2, resp. T_2 und S_2'' begrenzt werden.*

Ein Linienstück S_1, ein Flächenstück S_2 oder ein Raumstück S_3 geht durch derartige beliebig oft wiederholte Zerlegungen über in ein Gebilde, das wir als elementare ein-, zwei- resp. dreidimensionale Mannigfaltigkeit E_1, E_2 resp. E_3 oder auch als Streckenzug, Elementarflächenstück resp. Elementarraumstück bezeichnen wollen.

b) *Gegeben sei irgendwie eine endliche Anzahl von Punkten, Strecken, Flächen und Raumstücken. Dann kann man ein Raumstück S_3 so finden, daß jedes einzelne dieser Elemente ein inneres Element einer aus S_3 durch Zerlegung nach* II a) 1., 2., 3. *entstehenden E_3 ist. Man kann für alle Elemente eine solche E_3 finden, wenn zwei Linien des gegebenen Systems nur eine endliche Anzahl von isolierten Punkten, zwei Flächen eine endliche Anzahl von isolierten Punkten und Strecken, zwei Raumstücke nur eine endliche Anzahl von isolierten Punkten, Strecken und Flächen gemeinsam haben.*

3. Literatur. Aus der Fülle der topologischen Abhandlungen seien als besonders ergiebige Quellen hervorgehoben: Listing, *Vorstudien zur Topologie* (1847) und *Census räumlicher Complexe* (1862), Riemann, *Dissertation* (1851) und *Abelsche Funktionen* (*J. f. Math.* (1857)), *Werke*, S. 88; Möbius, *Leipz. Ber.* **15** (1863), *Werke* **2**, 435, C. Jordan, *J. d. Math.*

(2) **11** (1866), Dyck, *Math. Ann.* **32** (1888), Poincaré, *J. éc. polyt.* (2) **1** (1895), *Palermo Rend.* **13** (1899) und ebenda **18** (1904), *Lond. Math. Soc.* **32** (1900). Man vgl. für alles Folgende auch den zusammenfassenden und systematisch ergänzenden Artikel *Math. Enzyklopädie,* Bd. III 1, S. 153 (zitiert als „Enzykl.").

4. Einteilung der Topologie. Man kann in der Topologie verschiedene Gebiete außerhalb des die Grundlagen betreffenden Teiles unterscheiden, nämlich:

I. Complexus. Man läßt die verschiedenen Elemente (Punkte, Strecken, Flächenstücke), aus denen das zu betrachtende Gebilde zusammengesetzt ist, unzerlegt und untersucht so z. B. die Beziehungen zwischen den Anzahlen der Punkte (Ecken), Strecken (Kanten) und Flächenstücken, die eine geschlossene Fläche bilden (Eulerscher Polyedersatz).

II. Nexus. Man gestattet beliebige Zerlegungen der Elemente und behandelt als wichtigstes Problem die Frage nach den bei solchen Zerlegungen unverändert bleibenden topologischen Beziehungen, die man etwa Zerlegungsinvarianten nennen kann, oder was auf dasselbe herauskommt, man fragt nach den Bedingungen, wann zwei gegebene Gebilde durch Zerlegung zu identisch zusammengesetzten (*isomorphen*) gemacht werden können, d. i., wann sie *gleich-zusammenhängend* sind; daher der Name „Nexus" (Zusammenhang). Zwei solche Gebilde werden im Anschluß an Poincaré *homöomorph* genannt. Möbius brauchte die Bezeichnung „elementarverwandt".

III. Connexus. Man betrachtet Gebilde, die Teile von anderen Gebilden sind, und führt gewisse besonders einfache Transformationen der ersteren Gebilde innerhalb der letzteren ein, z. B. die stetigen Transformationen einer Fläche im gewöhnlichen Raume. Man untersucht dann etwa, welche Flächen bei solchen Transformationen ineinander übergehen können. Besonders wichtig ist die Frage nach den Raumkurven, die aus einer gegebenen Raumkurve durch stetige Transformation des ganzen Raumes hervorgehen können (*Knotenproblem*). Für eine streng systematische Untersuchung ist vor Inangriffnahme solcher Probleme der Begriff „stetige Transformation" topologisch zu definieren (*Enzykl.* S. 164).

Die stetigen Transformationen des Raumes und im Raume bildeten früher den Ausgangspunkt für die Beschreibung der Ziele der Topologie: *die Topologie untersuchte die Invarianten der räumlichen Gebilde gegenüber jenen Transformationen.* Nach der hier vertretenen Auffassung werden die Gebilde zunächst unabhängig von

ihrer Darstellung im gewöhnlichen Raume betrachtet und bloß durch ihre Zusammensetzung aus den Elementen definiert. A posteriori ergeben sich dann, wie unmittelbar ersichtlich, die Invarianten des „Nexus" als Invarianten der stetigen Raumtransformationen und, durch weitere Überlegungen, in besonders wichtigen Fällen als die einzigen solchen Invarianten (s. S. 187).

§ 2. Complexus.

5. Einteilung der Komplexe. Eine Gesamtheit von Strecken der Art, daß je zwei von ihnen zu einem aus Strecken der Gesamtheit gebildeten Streckenzug gehören, heißt *Streckenkomplex*, *Liniensystem* oder *eindimensionaler Komplex* C_1. Die Punkte, die die verschiedenen Strecken begrenzen, heißen kurzweg die *Punkte des Komplexes*. Eine Gesamtheit von Flächenstücken von der Art, daß die begrenzenden Strecken einen Streckenkomplex bilden (hierdurch wird das Zusammenhängen der Flächenstücke garantiert), heißt *Flächenkomplex oder zweidimensionaler Komplex* C_2. Die Strecken und Punkte, die zur Begrenzung der Flächenstücke gehören, heißen kurz *Strecken und Punkte des* C_2.

Unter den Komplexen nehmen eine ausgezeichnete Stellung ein die *Mannigfaltigkeiten*: Die eindimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind die geschlossenen Kurven, bei denen an jedem Punkt gerade zwei Strecken hängen, die ungeschlossenen entstehen aus den geschlossenen durch Weglassung einer Strecke und sind also Streckenzüge oder Kurvenstücke. Eindimensionale Mannigfaltigkeiten mögen mit M_1 bezeichnet werden, ebenso die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit M_2. Eine solche M_2, die wir auch kurz als *Fläche* bezeichnen, wird, wenn sie geschlossen ist, durch die Eigenschaft charakterisiert, daß an jeder Strecke gerade zwei Flächenstücke hängen und daß an jedem Punkt eine und nur eine Gruppe von Flächen hängt, die sich lückenlos aneinander schließen. Die ungeschlossene, berandete Fläche entsteht hieraus durch Weglassung einer Reihe von Flächenstücken. Analog lassen sich drei- und mehrdimensionale Komplexe und Mannigfaltigkeiten erklären (s. *Enzykl.* S. 161 ff.).

6. Streckenkomplexe. Im allgemeinen kann man aus einem Komplex C_1 Strecken (ohne ihre Grenzen) entfernen, so daß *ein* Komplex C_1' übrig bleibt. Ein C_1, der durch Wegnahme jeder Strecke zerfällt (entweder in zwei Komplexe, wenn die weggenommene Strecke eine „innere" Strecke war, oder in einen

Komplex und einen isolierten Punkt, wenn jene Strecke eine „Randstrecke" war), heißt ein *Baum*.

Durch Induktion gelangt man leicht zu folgender Beziehung: *Die Anzahl μ der Strecken, deren Wegnahme einen Komplex C_1 zu einem Baum macht, ist, unabhängig von der Wahl der Strecken, gleich $\alpha_0 - \alpha_1 + 1$, wenn α_1 die Anzahl der Strecken* und *α_0 die Anzahl der Punkte des C_1 ist* (s. Fig. 1, wo ein System von Strecken, deren Wegnahme den C_1 zu einem Baum macht, durch Punktieren ausgezeichnet ist).

Die Zahl μ hat noch eine andere Bedeutung: Wir wollen jeder Strecke des Komplexes einen bestimmten Anfangs- und Endpunkt und damit einen bestimmten Durchlaufungssinn geben und die so gerichtete Strecke mit $+ l_i$ bezeichnen. Die Strecke im entgegengesetzten Sinn gerichtet werde mit $- l_i$ bezeichnet. Irgendeine lineare Verbindung

$$\sum \varepsilon_i l_i \qquad \left(\begin{smallmatrix} i = 1, 2 \ldots \alpha_1 \\ \varepsilon_i = +1, -1 \text{ oder } 0 \end{smallmatrix}\right)$$

stellt dann eine Reihe von Strecken in bestimmtem Sinn durchlaufen dar. Wir wollen den Fall betrachten, daß eine solche Verbindung in geeigneter Reihenfolge eine geschlossene Kurve (einen *„Kreis"*) Π_1 in bestimmtem Sinne durchlaufen darstellt, und schreiben dann

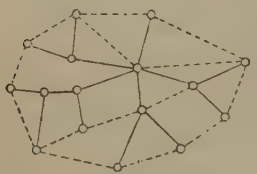


Fig. 1.

$$\Pi_1 \equiv \sum \varepsilon_i l_i .$$

Eine solche Relation wird *Kongruenz* genannt. Bei Poincaré [s. die später folgenden Literaturangaben] ist die Kongruenz etwas anders definiert. Es gibt dann gerade μ *voneinander unabhängige Kreise* im Komplex, d. i. jedes einen beliebigen Kreis des Komplexes darstellende lineare Aggregat der Strecken l_i läßt sich darstellen als lineare Verbindung von μ geeignet gewählten Aggregaten, die voneinander unabhängig sind.

Es ist interessant, daß zuerst wohl der Physiker Kirchhoff (*Pogg. Ann.* **72** (1847)) bei seinen Studien über die Verzweigung des elektrischen Stromes auf dies Resultat gestoßen ist (vgl. ferner Ahrens, *Math. Ann.* **49** (1897)).

Es gibt eine Fülle von Untersuchungen über spezielle Probleme der Theorie der Streckenkomplexe. Wir erwähnen folgende: Wann kann man den ganzen Komplex in einem einzigen Zug durchlaufen, ohne eine Strecke mehr als einmal zu durchlaufen? (Eulers „Königsberger Brückenproblem".) Die Antwort ist leicht

zu finden: Dann und nur dann ist das Durchlaufen möglich, wenn an höchstens zwei Punkten eine ungerade Anzahl von Strecken des Komplexes anstoßen. Eine große Reihe von Problemen verschiedener Art, die häufig in Form von „Mathematischen Spielen" auftreten, führen auf die Frage: Wann liegen sämtliche Punkte eines C_1 auf einem einzigen doppelpunktslosen „Kreise" desselben? Z. B. kommt das Hamiltonsche Dodekaederspiel auf die Aufgabe hinaus, sämtliche Ecken eines Dodekaeders nacheinander in geschlossenem Zuge auf Kanten des Dodekaeders zu erreichen, ohne auch nur eine Ecke mehrfach zu passieren. Eine Lösung der Aufgabe ist in der nebenstehenden Fig. 2 durch den ausgezogenen Streckenzug angedeutet.

Für den allgemeinen Fall ist jene Frage nicht beantwortet (s. die Literatur: *Enzykl.* Anm. 32). Weitere Untersuchungen betreffen die speziellen Komplexe, für die $\mu = 0$ ist, die Bäume (s. *Enz.* S. 175 f.). Man kann an solchen Bäumen ausgezeichnete *zentrale* Elemente unterscheiden, Punkte oder Strecken. So z. B. findet Jordan (*J. f. Math.* **70** (1869)) die zentralen Elemente in folgender Weise: Man entfernt von dem Baume alle Randstrecken, durch diesen Prozeß entsteht wieder ein Baum, man entfernt von diesem wieder alle Randstrecken und fährt so fort, bis alle übrigbleibenden Strecken von einem einzigen Punkt ausgehen. Bleibt so bloß eine Strecke übrig, so sind diese selbst und das Paar ihrer Endpunkte ausgezeichnete zentrale Elemente; bleiben mehrere Strecken übrig, so ist der allen Strecken gemeinsame Ausgangspunkt das zentrale Element.

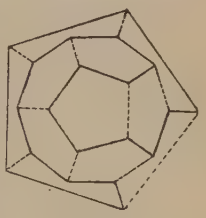


Fig. 2.

Sehr schöne Untersuchungen gibt es über solche spezielle C_1, bei denen von jedem Punkt gleich viele Strecken ausgehen; man nennt sie *Graphen* (z. B. ist das Kantensystem eines regulären Polyeders ein solcher Komplex). Wir wollen besonders die Untersuchungen von Petersen (*Acta math.* **15** (1891)) über die Zerlegbarkeit eines Graphes in Graphen erwähnen. Mit der Graphentheorie in Verbindung steht das bislang noch nicht einwandfrei gelöste Vierfarbenproblem: Genügen vier Farben, um die Gebiete einer Landkarte so zu färben, daß je zwei aneinander (längs Linien) grenzende Gebiete verschiedene Farben haben? (s. über die umfangreiche Literatur: *Enzykl.* Anm. 60).

7. Flächenkomplexe. Seien $\Pi_e^1, \Pi_e^2 \ldots \Pi_e^{\alpha_2}$, die Kreise, die die α_2 Flächenstücke des Flächenkomplexes beranden, und seien

ferner $\Pi_1^1, \Pi_1^2, \ldots, \Pi_1^\nu$ beliebige Kreise des Komplexes. Besteht dann die Kongruenz

$$\sum_1^\nu m_i \Pi_1^i \equiv \sum_1^{\alpha_2} n_k \Pi_e^k ,$$

wo m_i und n_k ganze positive oder negative Zahlen oder null sind und die m_i nicht alle gleich null sind, dann sagt man in zweckmäßiger Erweiterung der anschaulichen Bedeutung des Wortes „begrenzen“: *Die Kreise* $\Pi_1^1, \Pi_1^2 \ldots \Pi_1^\nu$ *zusammen begrenzen* $m_1, m_2, \ldots$ *resp.* m_ν *mal genommen auf dem Komplex.* Poincaré, *J. éc. pol.* (2) 1 (1895), schreibt

$$\sum m_i \Pi_1^i \sim 0$$

und sagt, die Kreise sind zusammen *homolog Null.*

Fig. 3.

Es sei nun α_0 die Anzahl der Punkte eines Komplexes C_2, α_1 die Anzahl der Strecken, $\bar{\alpha}_2$ die Anzahl seiner Flächenstücke deren Berandungskreise voneinander unabhängig sind (s. Nr. 1 dieses Abschnittes), endlich $P_1 - 1$ die Maximalzahl der Kreise, die zusammen nicht homolog Null sind. Da dann die Gesamtzahl der voneinander unabhängigen Kreise des dem C_2 zugrunde liegenden Streckenkomplexes gleich $\bar{\alpha}_2 + P_1 - 1$ ist, so erhalten wir nach der Formel für Streckenkomplexe sofort die Beziehung

$$\alpha_1 - \alpha_0 + 1 = \alpha_2 + P_1 - 1$$

oder

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \bar{\alpha}_2 = 1 - (P_1 - 1).$$

Es gibt zwei ganz verschiedene Arten von Flächen: *einseitige* und *zweiseitige*. Betrachten wir die Kugelfläche oder die Ringfläche (s. Fig. 3), so können wir *zwei Seiten* auf ihnen unterscheiden, eine Innen- und eine Außenseite. Wir können etwa davon reden, ein Lot auf der Fläche sei nach der Innen- oder nach der Außenseite zu gerichtet. Zwei Seiten können wir desgleichen unterscheiden bei allen berandeten Teilen der Kugel- oder Ringfläche. Das ist aber nicht bei allen Flächen der Fall. Das erste Beispiel einer *einseitigen* Fläche hat wohl Möbius (*Werke* II, 519 (1858)) angegeben: Man kann zwei Elementarflächenstücke, auf deren Rändern die Punkte $ABCD$, resp. $A'B'C'D'$ in der angegebenen Reihenfolge liegen, auf zwei ganz verschiedene Weisen zu einem

„Bande“ zusammensetzen: entweder so, daß A mit A', B mit B', C mit C' und D mit D' zusammenfällt (Fig. 4), oder so daß A mit A', B mit B', D mit C' und C mit D' zusammenfällt (Fig. 5). Das erstemal erhalten wir ein gewöhnliches Band, das in seinen Zusammenhangsverhältnissen übereinstimmt mit dem von zwei Kurven berandeten Teil einer Kugel. Das zweitemal erhalten wir ein Band mit nur *einer* Randkurve: $AD(=C')B'(=B)C(=D')A'$. Bei dem ersten Band können wir zwei Seiten unterscheiden, beim zweiten nicht. Das zweite Band heißt *Möbiussches Band.*

Geschlossene einseitige Flächen im dreidimensionalen Raume gibt es im *gewöhnlichen Verstande* nicht. Man muß, um hier die Darstellung zu ermöglichen, *Singularitäten* zulassen, d. i. Elemente (Punkte, Strecken), die in der *Darstellung* zusammenfallen, aber bei dem Studium des Zusammenhanges als verschieden betrachtet werden, wie man ja auch etwa eine ebene geschlossene Kurve mit einem Doppelpunkte (z. B. eine Lemniskate) gewohnt ist als *eine* geschlossene Kurve mit einem singulären Punkt und nicht als zwei geschlossene Kurven mit einem gemeinsamen Punkt anzusehen (über die genauere Definition der Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten s. *Enzykl.* S. 163 f.). Auf diese Weise erhält man in der Tat Abbildungen jeder beliebigen Fläche in unserem gewöhnlichen Raum und im besondern auch der geschlossenen einseitigen Fläche, wie sie Fig. 6 zeigt. Wir haben hier die singuläre Strecke PQ. Wir erhalten die Fläche einfach, indem wir das Möbiussche Band durch ein von der Randkurve begrenztes Flächenstück schließen.

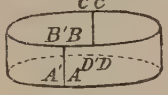


Fig. 4.

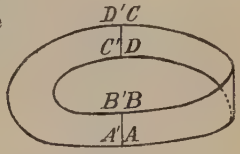


Fig. 5.

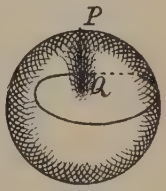


Fig. 6.

Es ist nun von großer Wichtigkeit, die Ein- resp. Zweiseitigkeit einer Fläche ganz unabhängig von der Vorstellung der Fläche in unserem Raum zu erklären. Das gelingt einfach in folgender im Grunde auch von Möbius herrührender Weise: *Bei einer zweiseitigen Fläche kann man jedem ihrer Flächenstücke einen solchen Umlaufssinn geben, daß jede Strecke, an der zwei Flächenstücke hängen, von jedem derselben verschiedenen Durchlaufungssinn bekommt. Bei einseitigen Flächen ist eine solche Umlaufsbestimmung unmöglich.* Klein, *Math. Ann.* 7 (1871), führt eine sich auf der

Fläche bewegende unendlich kleine Kurve mit Umlaufssinn (*Indikatrix*) ein. Wenn man die Indikatrix so auf der Fläche bewegen kann, daß sie an die Ausgangsstelle mit umgekehrtem Umlaufssinn gelangt, so ist die Fläche einseitig, sonst zweiseitig. Man nennt deswegen auch ein- resp. zweiseitige Flächen *Flächen mit umkehrbarer resp. mit nicht umkehrbarer Indikatrix.* Poincaré (l. c.) zeigt, daß bei analytischer Darstellung im gewöhnlichen Raum durch Betrachtung der Funktionaldeterminante die gewünschte Entscheidung getroffen werden kann.

Aus der Definition der Ein- resp. Zweiseitigkeit folgen nun leicht die Resultate: *Auf einer zweiseitigen geschlossenen Fläche besteht die Kongruenz*

$$\sum \Pi_e^i \equiv 0,$$

wo der Durchlaufungssinn der Π_e^i der obigen Umlaufsbestimmung entspricht. Auf einer zweiseitigen geschlossenen Fläche mit α_2 Flächenstücken ist also die Berandung irgendeiner von ihnen von der Berandung der $\alpha_2 - 1$ übrigen abhängig. Irgend $\alpha_2 - 1$ Berandungen aber sind voneinander unabhängig. Die Flächenstückberandungen einer einseitigen Fläche sind stets voneinander unabhängig. Also wird in der Formel des vorigen Abschnittes $\bar{\alpha}_2$ in dem ersten Falle gleich $\alpha_2 - 1$, in dem zweiten gleich α_2, und wir erhalten die Formeln:

$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - (P_1 - 1)$ für zweiseitige geschlossene Flächen,

$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - (P_1 - 1)$ für einseitige geschlossene Flächen.

Für alle die zweiseitigen geschlossenen Flächen, die durch jeden Kreis in zwei Teile zerlegt werden (wie das z. B. bei allen konvexen Polyedern der Fall ist), ist, wie leicht einzusehen, $P_1 - 1$ (die Maximalanzahl der auf der Fläche nicht begrenzenden Kreise) gleich null und also

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

dies ist die berühmte Eulersche Formel für *„einfach zusammenhängende"* geschlossene Flächen. Auf der Ringfläche kann man bei beliebiger Überdeckung leicht zwei Kurven (s. Fig. 3) finden, die zusammen nicht begrenzen, und einsehen, daß jede weitere Kurve mit ihnen zusammen begrenzt. Wir erhalten so für die Ringfläche die Formel

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

§ 3. Nexus.

8. Das Hauptproblem. Das *Hauptproblem* des Nexus ist die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Homöomorphismus (s. § 2 II) zweier gegebener Komplexe, und zwar, im wichtigsten und vollkommen erledigten speziellen Fall, für den Homöomorphismus zweier Flächen. Die Lösung dieses Problems hat die außerordentlich einfache Gestalt: *Zwei Flächen sind dann und nur dann homöomorph, wenn*

1. *beide gleich viel Randkurven haben,*
2. *beide einseitig oder beide zweiseitig sind,*
3. $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2'$ *ist, wo* α_0, α_1, α_2 *resp.* α_0', α_1', α_2' *die Anzahl der Ecken (Punkte), Kanten (Strecken) und Flächenstücke der ersten resp. zweiten Fläche bedeuten.*

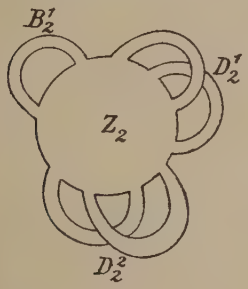


Fig. 7.

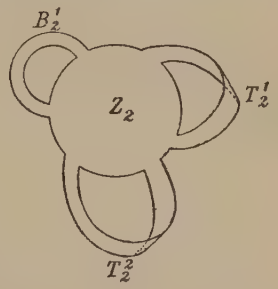


Fig. 8.

Daß diese Bedingungen notwendig sind, ist unschwer zu erkennen. Denn bei einer einzelnen Zerlegung (s. §§ 2 und 4) wird die Anzahl der Randkurven nicht geändert, ebensowenig werden zweiseitige Flächen in einseitige Flächen verwandelt oder umgekehrt, endlich wird die Anzahl der Strecken und Punkte je um 1, oder die Anzahl der Strecken und Flächenstücke je um 1 vermehrt, also bleibt die alternierende Summe $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ unverändert. Daß die Bedingungen auch hinreichend sind, wird durch Konstruktion von *„Normalformen"* für die Fläche gezeigt. Jede *zweiseitige* Fläche mit r Randkurven ($r > 0$) kann man durch Zerlegung als homöomorph nachweisen mit einer Fläche, die aus einem Elementarflächenstück Z_2 besteht, an das p Doppelbänder $D_2', \ldots D_2^p$ und $r - 1$ einfache Bänder $B_2', \ldots B_2^{r-1}$ (s. Fig. 7) angeheftet sind. Man kann sich leicht überzeugen, daß in der Tat die in der Figur dargestellte Fläche nur r (hier zwei) Randkurven hat. Eine *einseitige* Fläche mit r Randkurven ($r > 0$) ist homöomorph mit einem Elementar-

flächenstück Z_2, an das k „gedrehte" Bänder $T_2^1 \ldots T_2^k$ und $r-1$ ungedrehte Bänder angeheftet sind (s. Fig. 8).

Durch direkte Abzählung bei den Normalformen folgt:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = -2p - r + 2,$$

wenn die Fläche zweiseitig ist, und

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = -k - r + 2,$$

wenn die Fläche einseitig ist; $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ heißt auch Charakteristik der Fläche M_2 und wird $K(M_2)$ geschrieben (Dyck, *Math. Ann.* **32** (1888), 457). Haben also zwei zweiseitige oder zwei einseitige Flächen dasselbe r und dieselbe Charakteristik, so haben sie auch dasselbe p oder k und mithin identische Normalformen. Sie sind folglich, wie zu beweisen war, homöomorph. Die *Normalform für geschlossene Flächen* erhält man aus der für berandete,

Fig. 9.

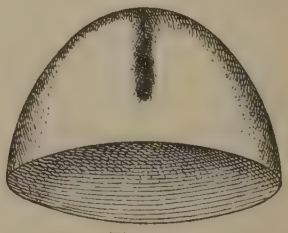


Fig. 10.

indem man zu der Normalform für Flächen mit *einer* Randkurve längs dieser ein Flächenstück hinzufügt. Es ergeben sich so die Formeln:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p$$

für zweiseitig geschlossene Flächen und

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - k$$

für einseitig geschlossene Flächen. Diese Formeln heißen *„erweiterte Eulersche Formel"*. Für die einfachsten zweiseitigen Flächen, die mit der Kugelfläche homöomorph sind, ist $p = 0$; k ist immer > 0. Zweiseitige Flächen haben immer eine gerade Charakteristik. p heißt auch das *Geschlecht* der Fläche. Eine übersichtliche Darstellung der geschlossenen Fläche im gewöhnlichen Raum liefert die Kugel mit p „Henkeln" (vgl. Fig. 9) für zweiseitige Flächen und die Kugel mit k „Kreuzhauben" (s. Fig. 10) für die einseitigen Flächen. Die Kreuzhaube entsteht aus der einseitigen geschlossenen Fläche (Fig. 6) durch „Lochung".

9. Geometrische Bedeutung von p und k.

a) Auf einer zweiseitigen Fläche vom Geschlecht p gibt es (bei geeigneter Zerlegung) p *und nicht mehr geschlossene Kurven ohne gemeinsame Punkte, die die Fläche zusammen nicht zerstückeln.* Zerschneidet man die *geschlossene* zweiseitige Fläche durch $2p$ sich paarweise in einem Punkte schneidende, zusammen nicht zerstückelnde Kurven, so geht sie in ein Elementarflächenstück über. Man nennt solche nicht zerstückelnde Kurven häufig schlechtweg *Rückkehrschnitte* der Fläche. Durch die unmittelbar anschauliche Bedeutung, die p, das Geschlecht, als Maximalanzahl der sich nicht schneidenden Rückkehrschnitte hat, bekommt die Eulersche Formel einen größeren Wert. *Bei einseitigen Flächen gibt es k und nicht mehr einander nicht schneidende (die Fläche zusammen nicht zerstückelnde) Rückkehrschnitte.* Hier muß man zwischen zweiseitig machenden und einseitig lassenden Rückkehrschnitten unterscheiden: jede einseitige Fläche kann durch „Aufschneiden" längs eines Rückkehrschnittes zu einer zweiseitigen gemacht werden (s. die Kurve in Fig. 6). Ferner ist zu unterscheiden zwischen einrandigen und zweirandigen Rückkehrschnitten. So ist z. B. die Kurve in Fig. 6 einrandig: durchläuft man sie einmal, so kommt man von der einen „Seite" der Linie zur andern. Über die Anzahl der Rückkehrschnitte und *Querschnitte* (Kurvenstücke, die von Rand zu Rand laufen) bei ein- und zweiseitigen Flächen s. *Enzykl.* S. 200ff. $2p$ resp. k ist übrigens die im vorigen Abschnitt eingeführte Maximalzahl der zusammen nicht begrenzenden geschlossenen Kurven $P_1 - 1$.

b) Für geschlossene Flächen, die im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum liegen, steht p resp. k in einer bemerkenswerten Beziehung zu der Gaußschen Totalkrümmung C der Fläche Es ist nämlich

$$C = -4\pi(p - n - 1),$$

resp.

$$C = -2\pi(k - 2n - 2),$$

wo n die Anzahl der ungeschlossenen Doppellinien bedeutet, in denen sich die Fläche selbst durchsetzt. Hierbei ist für die Anwendung auf Flächen mit Unstetigkeiten (Kanten, Ecken usw.) der Begriff der Totalkrümmung zweckmäßig erweitert zu denken, s. Boy, *Math. Ann.* **57**, 151 (1903). Einen analytischen Ausdruck für p im Falle singularitätenfreier Flächen (mit der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$) liefert der Satz von Dyck, *Math. Ann.* **32**, 457

(1888), daß $p - 2$ gleich ist der mit -2 multiplizierten Kroneckerschen Charakteristik des Funktionssystems:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

10. Weitere Normalformen.

a) Die *Möbiussche Normal- oder Grundform* einer Fläche erhält man, indem man sie längs p, resp. k sich nicht schneidender Rückkehrschnitten aufschneidet. Dadurch entsteht eine in die Ebene ausbreitbare Fläche mit $2p + r - 1$, resp. $k + r - 1$ „Löchern" und einem Außenrand. Die ursprüngliche Fläche erhält man zurück, indem man bei zweiseitigen Flächen $2p$

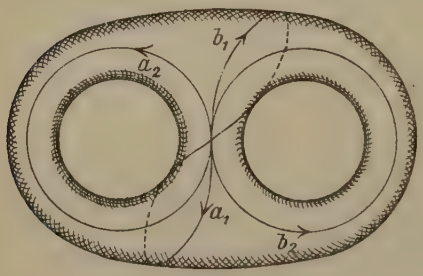


Fig. 11.

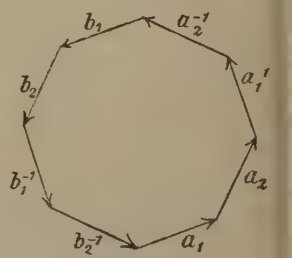


Fig. 12.

Randkurven paarweise und in bestimmtem Durchlaufungssinn als identisch erklärt. Bei einseitigen Flächen sind k Randkurven dadurch wegzuschaffen, daß man die Punkte *einer* Randkurve paarweise als identisch erklärt, die sich in der Weise entsprechen, wie beim Kreise die zwei Endpunkte jedes Durchmessers.

b) Durch Aufschneiden längs $2p$ Rückkehrschnitten, die alle durch einen Punkt gehen und in Paare von sich *schneidenden* Kurven $a_1, a_1'; a_2, a_2' \ldots a_p, a_p'$ zerfallen, wird die geschlossene zweiseitige Fläche übergeführt in ein Polygon, dessen Randstrecken einander paarweise zugeordnet sind. Poincaré nennt dies Polygon das zur Fläche gehörige Fuchssche Polygon. Es spielt bei funktionentheoretischen Überlegungen (z. B. bei der Theorie der automorphen Funktionen) eine wichtige Rolle. Bezeichnet man mit a_i und a_i^{-1} usw. die Kurve a_i in den beiden verschiedenen Richtungen durchlaufen, so erhält man das in der Fig. 12 angegebene Polygon für die „Doppelringfläche" (Fig. 11),

wobei die Bezeichnung den im Pfeilsinn durchlaufenen Seiten entspricht.

Ähnlich lassen sich auch einseitige Flächen behandeln.

§ 4. Connexus.

11. Einteilung. Man kann verschiedene Arten unterscheiden, wie man das im Gebilde G liegende Gebilde g innerhalb von G transformieren kann.

a) Man zerlege g in Stücke (Strecken, Elementarflächenstücke) und transformiere jedes einzelne durch stetige Transformationen von G, so daß die gemeinsamen Elemente zweier Stücke gleich transformiert werden. Entsteht so g' aus g, so wird g' aus g durch *allgemeine externe Transformation* auf G entstanden, sowie g und g' als *homotop* auf G bezeichnet. Die verschiedenen hierbei benutzten stetigen Transformationen von G brauchen durchaus nicht einer einzigen stetigen Transformation anzugehören. Z. B. sind je zwei geschlossene (auch etwa verknotete) Raumkurven im Raum miteinander homotop. Aber es gibt keine stetige Transformation des Gesamtraumes, die eine verknotete Kurve in eine unverknotete überführt.

Wir werden bei der Betrachtung der allgemeinen externen Transformationen auch Singularitäten der Gebilde zulassen: hat z. B. eine geschlossene Kurve im gewöhnlichen Sinne einen Doppelpunkt, so werden wir den beiden Zweigen gemeinsamen Punkt nicht als „gemeinsam" im Sinne der obigen Bedingung auffassen, vielmehr darf er bei der stetigen Transformation der beiden Zweige in zwei verschiedene Punkte übergehen. Im gewöhnlichen Raume können alle zweiseitigen Flächen in singularitätenfreie Gebilde transformiert werden. Als *Fundamentalsatz der Homotopie* kann man folgenden (auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinbaren) Satz bezeichnen: *Zwei beliebige homöomorphe (gleich zusammensetzbare) zweidimensionale Komplexe des Raumes können im Raum stetig ineinander transformiert werden* (s. S. 177)

b) Die zweite Art von Transformationen ist viel spezieller: g möge durch eine stetige Transformation des ganzen Gebildes G in g' übergehen. Dann sagt man, g sei in g' durch eine *spezielle externe Transformation* übergeführt, und g und g' heißen *isotop* auf G.

Durch spezielle Transformationen kann keine Singularität eines Gebildes fortgeschafft werden; verknotete und unverknotete Raumkurven sind niemals isotop usw.

Wie man durch nähere Überlegung erkennt, kann man die allgemeinen resp. speziellen externen Transformationen auch als *stetige Transformationen mit gestatteter Selbstdurchdringung resp. ohne solche* bezeichnen.

12. Kurven auf Flächen. Von speziellen Untersuchungen über „Homotopie" sind bei weitem am wichtigsten die über die stetigen Transformationen auf einer Fläche. Es sei die Fläche zweiseitig und geschlossen. Wir konstruieren, wie im vorigen Abschnitt, $2p$ durch einen Punkt O laufende, paarweise sich schneidende Kurven $a_1, a_1'; a_2, a_2' \ldots a_p, a_p'$, längs denen aufgeschnitten die Fläche in ein Elementarflächenstück übergeht. Hierbei ist wieder jede Kurve mit einem bestimmten Durchlaufungsinn behaftet zu denken. Es bezeichne a_i^{-1} die Kurve a_1 mit entgegengesetztem Durchlaufungssinn:

a) Jede Verbindung der Kurven $a_1, a_1^{-1}; a_1', a_1'^{-1}, a_2 \ldots$ stellt, in bestimmter Reihenfolge betrachtet, eine bestimmte geschlossene, durch O hindurchlaufende Kurve der Fläche dar, die im allgemeinen Doppelpunkte und Doppelstrecken besitzt.

b) Jede durch O hindurchlaufende Flächenkurve läßt sich stetig auf der Fläche mit Festhaltung des Punktes O in eine der in a) betrachteten Kurven überführen.

c) Jede Flächenkurve läßt sich stetig transformieren in eine der unter a) betrachteten Kurven.

d) Die Kurve $a_1 a_1' a_1^{-1} a_1^{-1} a_2 \ldots a_p'^{-1}$ ist auf einen Punkt zusammenziehbar: sie ist die Begrenzung des Polygons, in das die Fläche durch die $2p$ Schnitte übergeht.

e) Die Symbole $a_1, a_1', \ldots a_p'$ bestimmen als erzeugende Operationen eine diskontinuierliche Gruppe von unendlich vielen Substitutionen mit der einzigen Relation $a_1 a_1' a_1^{-1} a_1'^{-1} \ldots a_p'^{-1} = 1$. Jedes Element dieser Gruppe stellt eine durch O laufende Flächenkurve dar. Man nennt die Gruppe die *Fundamentalgruppe der Fläche* (Poincaré).

f) *Eine Flächenkurve ist auf einen Punkt zusammenziehbar, wenn das Element der Fundamentalgruppe, das eine in sie stetig transformierbare Kurve darstellt, die Identität ist. Zwei Kurven auf der Fläche sind ineinander stetig transformierbar, wenn die beiden Elemente der Fundamentalgruppe Γ und Δ, die stetig in die beiden Kurven transformierbare Kurven darstellen, in einander „transformierbar" sind,* d. i. wenn

$$\Xi \Gamma \Xi^{-1} = \Delta$$

ist, wo Ξ irgendein Element der Gruppe ist.

g) Auf der Kugel ($p = 0$) sind alle Kurven ineinander stetig transformierbar. Im Falle $p = 1$ ergibt sich, daß die Gruppe eine Abelsche ist, d. i. daß alle Elemente, die aus denselben Elementen in irgendwelcher Reihenfolge zusammengesetzt sind, identisch sind. Daraus folgt, daß alle Kurven stetig transformierbar sind in solche von der Form $a_1^n a_1'^m$, wo n und m positive oder negative ganze Zahlen oder null sind.

h) Im Falle $p > 1$ stellt man die Fundamentalgruppe dar durch ein reguläres Netz von $4p$-seitigen Polygonen in der hyperbolischen Ebene. Jeder Flächenkurve entspricht dann eine Bewegung der Ebene, bei der das Netz in sich übergeht, einer auf einen Punkt zusammenziehbaren Kurve als ausgeartete Bewegung die Identität; zwei ineinander transformierbaren (homotopen) Kurven entsprechen zwei kongruente Bewegungen, d. h. solche, die durch eine weitere Bewegung ineinander transformiert werden können. Diese Darstellung liefert so das Mittel, um mit Hilfe der nichteuklidischen Geometrie in einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob zwei Flächenkurven homotop sind.

i) Durch dieselbe Darstellung kann man auch die durch keine stetige Transformation zu vermindernde Anzahl der Doppelpunkte einer gegebenen Kurve ermitteln. Dies Problem ist für mancherlei weitergehende Fragen von Bedeutung. (Vgl. Poincaré, *Pal. Rend.* **18** (1904), p. 32.)

§ 5. Isotopie.

13. Knoten und Ketten.

a) *Die Theorie der Knoten* stellt ein wichtiges, bisher noch wenig durchgearbeitetes Gebiet dar. Unter einen „Knoten" versteht man jede beliebige geschlossene Raumkurve. Diese wird im allgemeinen nicht die Begrenzung eines singularitätenfreien Flächenstücks des Raumes bilden, sie wird „verknotet" sein. Die einfachste verknotete Raumkurve ist die „Kleeblattschlinge" (Fig. 13). Man stellt den Knoten dar durch seine „ebene" Projektion, bei der an den „Überkreuzungsstellen" angegeben werden muß, welcher Zweig über den andern weggeht (das ist in der Figur durch die Zeichnung der Kurve als Band angedeutet). Durchläuft man die Projektion eines Knotens und muß bei den Überkreuzungsstellen ab-

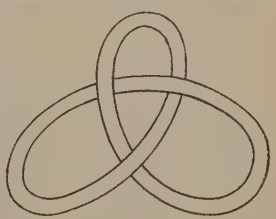


Fig. 13.

wechselnd unter und über den andern Zweig weggehen, so heißt der Knoten (d. h. eigentlich bloß die Projektion) *alternierend*. Zuerst Listing (s. § 1), sodann Tait und weiter eine große Anzahl von englischen Mathematikern („die englische Schule") haben sich mit Knoten, besonders mit alternierenden, beschäftigt und eine Reihe von Einzelresultaten sowie eine große Materialsammlung geschaffen. Die speziellen Gruppen von Knoten, die als Randkurven eines einseitigen, beliebig verschlungenen und tordierten singularitätenfreien Bandes entstehen, sind von Möbius (s. § 1) und Simony (u. a. *Wiener Ber.* 1880—1887) studiert. Zu einer systematischen Einteilung der Knoten bedarf man der Lösung der Frage: „wann sind zwei Knoten isotop, d. i. ohne Selbstdurchdringung ineinander überführbar, oder, im Sinne dieses Abschnittes, miteinander äquivalent?" Diese Frage ist bisher auch in den allereinfachsten Fällen nicht gelöst.

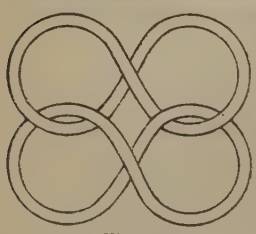


Fig. 14.

b) *Verkettung*. Als unverkettet bezeichnet man, dem anschaulichen Begriff eine präzise Form gebend, Raumkurven, die jede für sich in ein Elementarraumstück eingeschlossen werden können, das keinen Punkt mit einer der anderen Kurven gemeinsam hat. Diese Forderung ist gleichbedeutend mit der, daß jede der Kurven ein Elementarflächenstück (mit oder ohne Singularitäten) begrenzt, das keinen Punkt mit den andern Kurven gemeinsam hat. Gauß (*Werke* V, 605) hat eine Invariante von zwei Kurven gegenüber stetigen Raumtransformationen aufgestellt, nämlich:

$$V = \int\int \frac{(x'-x)(dy\,dz'-dz\,dy') + (y'-y)(dz\,dx'-dx\,dz') + (z'-z)(dx\,dy'-dy\,d}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Hierbei bedeuten x, y, z, resp. x', y', z' die Koordinaten der beiden Raumkurven, und das Integral ist zu erstrecken über die Mannigfaltigkeit $\{P, P'\}$, wo P resp. P' einen beliebigen Punkt der ersten resp. zweiten Kurve bedeutet. V ist gleich einem Vielfachen von 4π. Es gibt aber unendlich viele verschiedene Arten der Verkettung für jeden Wert von V, speziell auch wenn $V = 0$ ist (s. die diesen Fall illustrierende Fig. 14).

Spezielle Arten von verketteten Kurven bilden die Paare der beiden Randkurven eines beliebig verschlungenen und tordierten singularitätenfreien zweiseitigen Bandes. Sie sind ebenfalls von Möbius und Simony a. a. O. studiert worden.

14. Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten. Gauß hat ebene *Kurven mit Doppelpunkten* betrachtet, in denen sich die zwei Zweige wirklich schneiden (also ohne „Selbstberührungspunkte") und alle die möglichen Typen bis zu Kurven mit fünf Doppelpunkten aufgestellt. Sind $a, b, c, \ldots$ die Doppelpunkte, so wird die Kurve dargestellt durch eine Aufeinanderfolge dieser Buchstaben, wobei jeder Buchstabe zweimal vorkommt und die Buchstaben so aufeinander folgen wie die Doppelpunkte auf der Kurve. So ist z. B. (s. Fig. 15) *abccdabd* ein möglicher Typus, *ababcbc* ein unmöglicher.

Allgemeine Betrachtungen über Flächensingularitäten hat Boy, *Math. Ann.* **57** (1903), 151 angestellt: Alle zweiseitigen Flächen haben singularitätenfreie Repräsentanten im gewöhnlichen Raume, ebenso alle ungeschlossenen einseitigen. Dagegen haben die geschlossenen einseitigen Flächen stets Singularitäten, und Boy hat bewiesen, daß es zu jeder solchen Fläche homöomorphe Repräsentanten gibt, die als Singularitäten bloß eine *geschlossene* Doppellinie mit einem singulären Punkt besitzen.

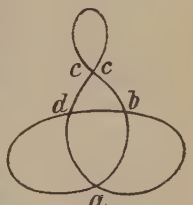


Fig. 15.

Von besonderer Bedeutung sind diejenigen singulären geschlossenen zweiseitigen Flächen, die man als *Riemannsche Flächen* bezeichnet. Sie entstammen funktionentheoretischen Vorstellungen, sind aber leicht topologisch zu definieren (Hurwitz, *Math. Ann.* **39**, 55).

Hurwitz hat die Anzahl aller möglichen Typen von Riemannschen Flächen, die bloß einfache „Verzweigungspunkte" haben, bestimmt. Lüroth, *Math. Ann.* **4**, 181 (1872) hat die „Transformationen" von Riemannschen Flächen untersucht. Diese sind stetige Transformation der Flächen, aber gehören natürlich nicht als Ganzes zu stetigen Transformationen des Raumes. Denn sonst würden ja alle Singularitäten erhalten bleiben. Sie werden in ihren besonderen Eigenschaften durch funktionentheoretische Begriffe geliefert (ihre topologische Definitionen s. *Enzykl.* S. 219). Durch diese Transformationen lassen sich die Riemannschen Flächen in „kanonische Formen" überführen.

Die Beziehung zwischen den verschiedenen charakteristischen Anzahlen der Gebilde der Riemannschen Fläche: der Anzahl und „Multiplizität" der Verzweigungspunkte, der Anzahl n der Blätter, und dem Geschlecht p der Fläche ist von Riemann aufgestellt und ergibt sich leicht aus dem verallgemeinerten Eulerschen

Polyedersatz. Es bedeutet Multiplizität eines Verzweigungspunktes die Anzahl der an ihm in einem Zyklus aneinander hängenden Blätter, vermindert um 1. Es ist:

$$\sum \nu_i - 2n = 2(p-1),$$

wo die Summe auf der linken Seite über die Multiplizitäten aller Verzweigungspunkte auszudehnen ist.

§ 6. Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

15. Die Erweiterung der Topologie auf mehr als zwei oder drei Dimensionen hat eine ganz besondere Bedeutung: einmal erhält man ganz neue Arten von Beziehungen, die oft schwierig zu entdecken sind und mit Untersuchungen auf dem Gebiet der höheren Arithmetik (z. B. der Theorie der unendlichen Gruppen) zusammenhängen. Andererseits führt die Theorie der Funktionen von zwei komplexen Variabeln dazu, Mannigfaltigkeiten von mindestens vier Dimensionen zu betrachten.

Die Definition (s. *Enzykl.* S. 161 ff.) der mehrdimensionalen Komplexe und Mannigfaltigkeiten bietet keine Schwierigkeit und ist analog der Definition der zweidimensionalen Komplexe und Mannigfaltigkeiten. Aus der Definition folgt einfach der Satz, daß für jede geschlossene Mannigfaltigkeit mit einer geraden Zahl $2n$ von Dimensionen

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \cdots - \alpha_{2n} = 0$$

ist, wo α_i die Anzahl der die Mannigfaltigkeit bildenden Elementarmannigfaltigkeiten von i Dimensionen bedeutet. Poincaré, *J. éc. polyt.* (2) **1** (1895), hat die Zahl $P_1 - 1$, die Maximalzahl der auf einem zweidimensionalen Komplex zusammen nicht-begrenzenden geschlossenen Kurven, verallgemeinert, und zwar durch Erweiterung des Begriffes Kongruenz. (Das hatte auch schon Betti, *Ann. di math.* (2) **4** (1871) 140, getan, aber ohne, was notwendig ist, zu berücksichtigen, daß Mannigfaltigkeiten vorkommen können, die erst mehrfach genommen begrenzen.) Es sei also $P_i - 1$ die Maximalzahl der *zweiseitigen* geschlossenen i-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die auf dem i-dimensionalen Komplex, der einem n-dimensionalen Komplex C zugrunde liegt, zusammen nicht begrenzen. Die Zahlen P_i nennt Poincaré Bettische Zahlen, sie heißen auch *Zusammenhangszahlen*. Dann ist für jeden n-dimensionalen Komplex C_n:

$$\sum_0^{n-1}(-1)^i\alpha_i + (-1)^n\bar{\alpha}_n = 1 + \sum_1^{n-1}(-1)^i(P_i - 1).$$

Dabei bedeutet $\bar{\alpha}_n$ die Anzahl derjenigen Elementarmannigfaltigkeiten n^{ter} Dimension des C_n, deren Berandungen voneinander linear unabhängig sind. Daraus folgt dann ohne weiteres:

$$\sum_0^{n}(-1)^i\alpha_i = 1 + (-1)^n + \sum_1^{n-1}(-1)^i(P_i - 1)$$

für zweiseitige geschlossene Mannigfaltigkeiten und

$$\sum_0^{n}(-1)^i\alpha_i = 1 + \sum_1^{n-1}(-1)^i(P_i - 1)$$

für einseitige geschlossene Mannigfaltigkeiten. Das sind die Eulerschen Formeln für n Dimensionen. Es besteht ferner der wichtige Satz, daß für eine geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit

$$P_i = P_{n-i}$$

ist. Dieser Satz wurde zuerst von Betti aufgestellt und von Poincaré, *Pal. Rend.* **13**, 285 (1899), bewiesen durch die Betrachtung der zu der gegebenen Mannigfaltigkeit M_n reziproken Mannigfaltigkeit M_n'. Diese entsteht aus M_n durch eine andere Überdeckung von der Art, daß $\alpha_i' = \alpha_{n-i}$ wird.

Es kann, wie schon oben bemerkt, eine Mannigfaltigkeit M_i auf M_n begrenzen, aber erst mehrfach, etwa mindestens ν-fach genommen. Dann sagt man nach Poincaré, M_n hat eine i-dimensionale *Torsionszahl* τ_i von der Größe ν. Z. B. ist in diesem Sinne jede einseitige geschlossene Fläche eine Mannigfaltigkeit mit dem Torsionskoeffizienten $\tau_1 = 2$. Denn auf jeder solchen Fläche gibt es Kurven, die erst zweimal genommen begrenzen, und zwar die ganze Fläche (nämlich die zweiseitig machenden Rückkehrschnitte, s. S. 185). Für zweiseitige M_n sind jedoch die $(n-1)$-dimensionalen Torsionskoeffizienten gleich 1, und es ist ferner $T_i = T_{n-1-i}$, d. i. jedem i-dimensionalen Torsionskoeffizienten entspricht ein gleich großer $(n-1-i)$-dimensionaler.

Die Bettischen Zahlen sowohl wie die Torsionszahlen sind für jede Mannigfaltigkeit zu bestimmen als charakteristische Zahlen gewisser Systeme linearer Formen, die der Zusammensetzung der Mannigfaltigkeit entsprechen.

Diese Resultate finden sich in den Poincaréschen Arbeiten.

Zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten haben identische Systeme von Bettischen Zahlen und Torsionszahlen. Aber aus dieser Übereinstimmung folgt noch nicht die Homöomorphie der Mannigfaltigkeiten. Z. B. sind nicht alle dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten, deren Bettische Zahlen und Torsionszahlen gleich 1 sind, miteinander homöomorph. (Vgl. Poincaré, *Pal. Rend.* **18**, 45 (1904), ferner *Math. Ver.* **17**, 573 (1907).) Das Problem der Homöomorphie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten ist bisher auch in den einfachsten Fällen nicht gelöst.

Weitere diesbezügliche Untersuchungen findet man vor allem bei Heegaard, *Diss.*, Kopenhagen 1898, sodann bei Wernicke, *Diss.*, Göttingen 1904, Tietze, *Mon. f. Math. u. Phys.* **19**, 1 (1908), Steinitz, *Berl. Math. Ges.* **7**, 3 (1907).

ZWEITER ABSCHNITT

EBENE GEOMETRIE

Kapitel X.

Elementare Erzeugungsweisen und Eigenschaften der Kegelschnitte.

Von *F. Dingeldey* in Darmstadt.

§ 1. Die Kegelschnitte im griechischen Altertum.

Die Lehre von den Kegelschnitten hat ihren Ursprung bei den Mathematikern des griechischen Altertums. Gewöhnlich wird Menächmus (um 350 v. Chr.), ein Schüler Platons, als Entdecker der Kegelschnitte bezeichnet, doch dürfte die Richtigkeit dieser Angabe kaum mehr zu entscheiden sein. Tatsache ist, daß er die Kurven, die man später als Parabel und Hyperbel bezeichnete, bei der Lösung der Aufgabe, einen Würfel zu konstruieren, der doppelt so groß wie ein gegebener Würfel ist, benutzte; auch findet sich bei Eratosthenes (276 oder 275 bis 194 v. Chr.) für die drei eigentlichen Kegelschnitte der Name „Triade des Menächmus".

Ob Menächmus wußte, daß diese Kurven als Schnitte eines Kegels mit einer Ebene erzeugt werden können, ist sehr fraglich. Sicher ist, daß Aristaeus (um 320 v. Chr.) und die Mathematiker des dritten Jahrhunderts v. Chr. solche Schnitte betrachteten, und zwar wurde ursprünglich die Schnittebene rechtwinklig zu einer Mantel- oder Seitenlinie eines geraden Kreiskegels gelegt. Je nachdem der Winkel zwischen Achse und Seitenlinie kleiner, gleich oder größer als ein halber Rechter war, unterschied man Schnitte des spitzwinkligen, rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Kegels oder, wie man später sagte, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. Euklid (etwa 315—255 v. Chr.) und Archimedes (287—212 v. Chr.) kannten auch die Erzeugung einer Ellipse durch Schnitte, die nicht rechtwinklig zu einer Seitenlinie erfolgen, aber erst Apollonius (um 225 v. Chr.) hat beliebige Schnitte *schiefer* Kegel von kreisförmiger Basis zum Ausgangs-

punkt geometrischer Untersuchungen genommen. Ihm waren auch die Eigenschaften der Kegelschnitte bekannt, die heute durch ihre „Scheitelgleichungen“ ausgedrückt werden und Anlaß zur Wahl der Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel gaben.

Literatur: Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides,* Leipzig 1870; Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum,* deutsche Ausgabe von Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886; Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik,* 2. Bd., Leipzig 1903; Cantor, *G. d. M.* I.[1])

§ 2. Schnitt von Kegel und Ebene, Scheitelgleichung.

Man kann durch die Spitze eines Kegels drei Arten von Ebenen legen: solche Ebenen, die den Kegel nur in der Spitze treffen, oder solche, die ihn längs einer Seitenlinie berühren, oder solche, die ihn in zwei verschiedenen Seitenlinien schneiden. Irgendeine Parallelebene zu einer dieser drei Arten von Ebenen schneidet den Kegel, dessen Seitenlinien über die Spitze hinaus verlängert gedacht werden (Doppelkegel), bzw. in einer Ellipse, Parabel, Hyperbel. Es möge dies beim geraden Kreiskegel für den Fall der Ellipse näher erläutert werden.

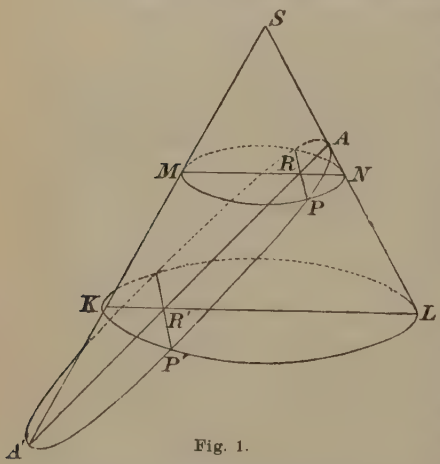


Fig. 1.

Eine durch die Kegelachse gelegte Ebene δ bestimmt durch ihren Schnitt mit dem Kegel und dessen Basis ein Dreieck SKL (Fig. 1). Die Art der Schnittkurve des Kegels mit einer rechtwinklig zu δ gelegten Ebene ε ist durch den Winkel zwischen ε und einem Schenkel des Dreiecks bedingt. Die Ebene ε möge zu der ersten der vorerwähnten drei Arten gehören, so daß sie SK und SL im Endlichen trifft und die Schnittkurve ganz auf dem einen Mantel des Doppelkegels liegt. Ist nun MPN der durch einen Punkt P dieser Kurve gelegte Kreis des Kegels und R der

1) Ein Verzeichnis abkürzender Bezeichnungen, von denen im folgenden bei mehrfach zitierten Werken Gebrauch gemacht wurde, befindet sich am Schlusse von Kap. XII.

Fußpunkt des von P auf den Kreisdurchmesser gefällten Lotes, so ist $RP^2 = MR \cdot RN$, analog $R'P'^2 = KR' \cdot R'L$ und $\frac{RP^2}{R'P'^2} = \frac{MR}{KR'} \cdot \frac{RN}{R'L} = \frac{RA' \cdot AR}{R'A' \cdot AR'}$, somit $\frac{RP^2}{AR \cdot RA'} = \frac{R'P'^2}{AR' \cdot R'A'}$, also konstant und zwar positiv, etwa gleich $\varkappa^2$. Denken wir uns in der Ebene ε ein Koordinatensystem mit AA' als positiver x-Achse, einer durch A rechtwinklig zu AA' gezogenen Geraden als y-Achse, so ist $AR = x$, $RP = y$ und $y^2 : x = \varkappa^2(2a - x)$, wobei $2a = AA'$, und wenn man $\varkappa^2 \cdot AA' = p$ setzt, wird

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a} \tag{1}$$

die Gleichung der Schnittkurve, einer *Ellipse*.

Schneidet die Ebene ε beide Mäntel des Kegels, so besteht die Schnittkurve aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden Zweigen, sie ist eine *Hyperbel* und hat die Gleichung

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a}. \tag{2}$$

Ist die Ebene ε zu einer der Seiten SK oder SL des Dreiecks SKL, d. h. einer Tangentialebene des Kegels parallel, so erhält man als Schnittkurve eine *Parabel*, ihre Gleichung wird von der Form

$$y^2 = px. \tag{3}$$

Je nachdem der Fall der Ellipse oder Hyperbel vorliegt, müßte, wie die Gleichungen (1) und (2) zeigen, ein mit dem Quadrat y^2 inhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite gleich x ist, zur anstoßenden Seite eine Strecke haben, die kleiner bzw. größer als p ist. Beim messenden Vergleichen mit p würde im Fall der Ellipse diese zweite Seite kleiner als p sein, es würde ihr im Vergleich zu p gewissermaßen ein Stück *fehlen*, während bei der Hyperbel die zweite Seite über p *hinausreichen* würde. Im Fall der Parabel würde die zweite Seite des entsprechenden Rechtecks gleich p sein, das Rechteck genau an p *anliegen*. Nach den griechischen Worten *ἐλλείπειν* fehlen, *ὑπερβάλλειν* darüber hinausreichen, *παραβάλλειν* anlegen haben die drei Kegelschnitte ihre Namen erhalten. Die Größe p wird als *Parameter* der Kegelschnitte bezeichnet.

Bei Apollonius (Buch 1, § 11—14) finden sich Sätze und Formeln, die dasselbe aussagen wie vorstehende drei „Scheitelgleichungen“ (zu diesem Namen vgl. S. 201), wenn auch der Koordinatenbegriff noch fehlt. Die Gleichungen (1) bis (3) zeigen

überdies, daß diese Kurven zur x-Achse symmetrisch sind und im Fall der Ellipse und Hyperbel von dieser Geraden in zwei im Endlichen gelegenen Punkten getroffen werden. Wird auf Grund der Substitutionen $y = Y$ und $x = X + a$ bzw. $x = X - a$ durch Parallelverschiebung der y-Achse der Koordinatenanfang in die Mitte zwischen beide Punkte verlegt, so gehen die Gleichungen der Ellipse bzw. Hyperbel über in:

$$Y^2 = -\frac{p}{2a}X^2 + \frac{ap}{2} \text{ bzw. } Y^2 = \frac{p}{2a}X^2 - \frac{ap}{2},$$

und diese Gleichungen nehmen bei Einführung von $\frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$ die einfache Form an:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \text{ bzw. } \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

§ 3. Konstante Summe oder Differenz der Abstände von zwei festen Punkten.

Zu Ellipse und Hyperbel gelangt man auch bei Beantwortung der Frage nach dem geometrischen Ort aller Punkte P, für die entweder die Summe oder die Differenz der Abstände $PF_1 = r_1$ und $PF_2 = r_2$ von zwei festen Punkten F_1, F_2, den sogenannten *Brennpunkten*, konstant, etwa gleich $2a$ ist (Apollonius, Buch 3, § 52 und 51). Im erstgenannten Falle wird $r_1 + r_2 = 2a$, im Falle der konstanten Differenz entweder $r_1 - r_2 = 2a$ oder $r_2 - r_1 = 2a$. Wählt man die Linie F_1F_2 als x-Achse, die Mitte O der Strecke F_1F_2 als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und ist $F_1F_2 = 2c$, so folgt gemeinsam für alle diese Fälle

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Ihre Trennung ergibt sich, wenn man beachtet, daß bei konstanter Summe $r_1 + r_2 = 2a$ notwendig $2a > 2c$ sein muß, da in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite ist; bei konstanter Differenz muß hingegen $2a < 2c$ sein Setzt man im ersten Falle $a^2 - c^2 = b^2$, im zweiten $c^2 - a^2 = b^2$, so erhält man wieder die zwei Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ und } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

§ 4. Gestalt der Ellipse.

Beide Kurven (5) sind zu den Koordinatenachsen symmetrisch. Die *Ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

verläuft überdies vollständig innerhalb des durch die Geraden $x = \pm a$ und $y = \pm b$ gebildeten Rechtecks, von dessen Seiten sie berührt wird. Jede durch den Koordinatenanfang O gelegte Sehne der Kurve wird als *Durchmesser* bezeichnet; insbesondere heißen die auf den Koordinatenachsen liegenden Durchmesser $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ von den Längen $2a$ und $2b$ *Achsen* der Ellipse, und zwar unterscheidet man die *große* Achse (*Hauptachse*), auf der die Brennpunkte F_1, F_2 liegen, und die dazu senkrechte *kleine* Achse (Nebenachse). (Fig. 2.) Der gemeinsame Punkt O sämtlicher Durchmesser ist der *Mittelpunkt* der Kurve. Die Endpunkte der Achsen nennt man *Scheitel*. Nun ist auch ersichtlich, warum die Gleichungen (1) bis (3) oben als *Scheitelgleichungen* bezeichnet wurden: in die x-Achse fällt die eine Achse der Kurve, die y-Achse ist bei (1) bis (3) Tangente in dem im Koordinatenanfang gelegenen Scheitel. Der Abstand c eines der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkt ist die *lineare*, das Verhältnis $c : a = \lambda$ die *numerische Exzentrizität*. Die Konstruktion der halben kleinen Achse b, wenn die große Achse und die Brennpunkte gegeben sind, ist aus der Gleichung $a^2 - c^2 = b^2$ sofort ersichtlich, ebenso die Konstruktion der Brennpunkte, wenn die beiden Achsen gegeben sind.

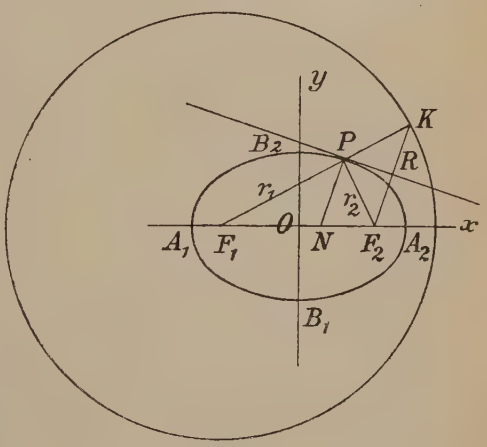


Fig. 2.

Für die Längen der Geraden $PF_1 = r_1$ und $PF_2 = r_2$, der sogenannten *Brennstrahlen*, findet man leicht $r_1 = a + \lambda x$, $r_2 = a - \lambda x$, wenn x die Abszisse von P bezeichnet. Die in P gezogene Normale teilt ferner die Strecke $F_1 F_2$ in zwei Abschnitte, für deren Länge $F_1 N = (a + \lambda x)\lambda$ und $N F_2 = (a - \lambda x)\lambda$ gefunden wird.

Daher besteht die Proportion $r_1 : r_2 = F_1N : NF_2$, woraus hervorgeht, daß *die Normale den Winkel F_1PF_2 der beiden Brennstrahlen halbiert, und die Tangente von P halbiert deren Nebenwinkel.* (Schon Apollonius bekannt, Buch 3, § 48.)

Befindet sich in dem einen der beiden Brennpunkte eine Lichtquelle, so laufen alle von ihr ausgehenden und durch die Ellipse reflektierten Strahlen im anderen Brennpunkt zusammen. In dieser optischen Eigenschaft der Ellipse haben die Bezeichnungen Brennpunkt und Brennstrahl ihren Ursprung.

Der Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$ der Ellipse ist, wie sich durch Einsetzen von $x = c$ in (6) ergibt, gleich der Länge der Sehne, die man durch einen der beiden Brennpunkte rechtwinklig zur Achse ziehen kann.

Wie die Form $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ der Ellipsengleichung zeigt, kann diese Kurve konstruiert werden, indem man über der Achse $2a$ als Durchmesser den Kreis $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ beschreibt und jede Ordinate desselben im Verhältnis $b : a$ verkleinert. Eine solche Zuordnung der Punkte des Kreises und der Ellipse ist eine *affine Verwandtschaft* (Kap. V, § 3) mit der Abszissenachse als Affinitätsachse. Die mit (6) gleichbedeutende Parameterdarstellung

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \tag{7}$$

wo t die sogenannte *exzentrische Anomalie* bedeutet, sagt dasselbe aus. Auf sie gründet sich die aus Fig. 3 ersichtliche Konstruktion von Punkten der Ellipse mit Hilfe zweier konzentrischer Kreise von den Radien a und b.

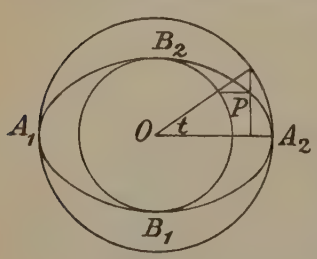


Fig. 3.

Aus der Eigenschaft der Ellipse, daß die Summe der Brennstrahlen konstant gleich $2a$ ist, folgt eine einfache *Fadenkonstruktion* (Gärtnerkonstruktion). Wird ein mit seinen Enden in F_1 und F_2 etwa durch Nadeln befestigter Faden von der Länge $2a$ durch einen Zeichenstift gespannt erhalten, so beschreibt dieser die Kurve. (Dies findet sich in der Literatur zuerst bei arabischen Mathematikern des neunten Jahrhunderts.) Man kann auch einen geschlossenen Faden von der Länge $2a + 2c$ um die Nadeln herumlegen und mit Hilfe des Zeichenstiftes gespannt erhalten.

Im Falle $a = b$ geht die Ellipse in den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ über, die Brennpunkte sind dann beide in den Mittelpunkt gerückt.

§ 5. Gestalt der Hyperbel.

Die *Hyperbel*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

verläuft vollständig außerhalb des durch die zwei Geraden $x = \pm a$ bestimmten Flächenstreifens, wird aber von diesen Geraden in den Scheiteln der Hauptachse $A_1 A_2 = 2a$ berührt. Die Punkte F_1 und F_2 heißen wieder Brennpunkte, und von ihnen ausgehende Lichtstrahlen werden so reflektiert, daß sie vom anderen Brennpunkte ausgegangen zu sein scheinen. Durchmesser, Mittelpunkt, lineare und numerische Exzentrizität, Parameter p sind bei Ellipse und Hyperbel in gleicher Weise definiert, doch ist jetzt $c^2 = a^2 + b^2$. Der zur Hauptachse rechtwinklige Durchmesser (Nebenachse) trifft die Kurve in keinen reellen Punkten (Fig. 4). Aus der Gleichung der Kurve (8) in Polarkoordinaten

$$\varrho = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta}} \tag{9}$$

erkennt man, daß reelle Radienvektoren nur vorhanden sind, solange $\operatorname{tg}^2 \vartheta \leqq \frac{b^2}{a^2}$. Für $\operatorname{tg} \vartheta = \pm \frac{b}{a}$ wird $\varrho = \infty$; die entsprechenden, zu den Achsen symmetrischen Geraden, denen sich die Kurve unbegrenzt nähert, haben mit dieser erst im Unendlichen je zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam und heißen *Asymptoten*. Die Kurve besteht somit aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden Zweigen, die unendlich ferne Gerade trifft die Kurve in zwei getrennten reellen Punkten. Für alle Punkte P desjenigen Zweiges, innerhalb dessen der Brennpunkt F_1 gelegen ist, besteht die Beziehung $r_2 - r_1 = 2a$, für die Punkte des anderen Zweiges die Beziehung $r_1 - r_2 = 2a$.

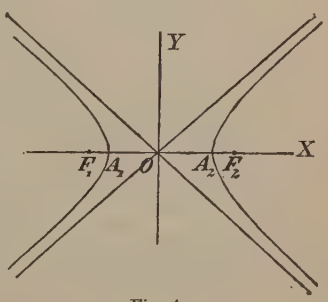


Fig. 4.

Während bei der Ellipse die Halbierungslinie des Winkels $F_1 P F_2$ der zwei Brennstrahlen von P durch die zu P gehörige Normale halbiert wird, *ist bei der Hyperbel die Tangente von P Halbierungslinie dieses Winkels, und die Normale halbiert den Nebenwinkel.*

Werden durch die lineare Substitution $x = (X + Y) \cos \vartheta$,

$y = (-X+Y)\sin\vartheta$ die *Asymptoten* als im allgemeinen *schiefwinklige Koordinatenachsen* eingeführt und beachtet man hierbei die Beziehungen $\cos\vartheta = a : \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\vartheta = b : \sqrt{a^2+b^2}$, so geht die Gleichung (8) der Hyperbel über in

$$XY = \frac{a^2+b^2}{4}. \tag{10}$$

Aus dieser Gleichung folgt überdies, daß, wenn man durch irgendeinen Punkt der Hyperbel Parallelen zu den Asymptoten zieht, das so entstehende Parallelogramm konstanten Inhalt hat.

Im Falle $a = b$ wird $\operatorname{tg}\vartheta = \pm 1$, der Winkel, den die Asymptoten einschließen, ist dann ein Rechter, die Kurve heißt *gleichseitige* oder *rechtwinklige Hyperbel.*

Beliebig viele Punkte eines Hyperbelastes lassen sich konstruieren, indem man um den einen der beiden Brennpunkte mit beliebigem Radius $r_1 > c - a$ einen Kreis zieht, um den anderen Brennpunkt einen Kreis vom Radius $r_2 = r_1 + 2a$; beide Kreise schneiden sich in Punkten P der Hyperbel, denn für diese Punkte ist die Differenz $r_2 - r_1$ der Brennstrahlen gleich $2a$.

Der Parameterdarstellung $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ der Ellipse entspricht bei der Hyperbel

$$x = \pm a\cosh t, \quad y = b\sinh t, \tag{11}$$

wo $\cosh t$ und $\sinh t$ den hyperbolischen Kosinus und Sinus bezeichnen ($\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$, e ist die Basis der natürlichen Logarithmen). Da $\cosh t$ stets $\geqq 1$ ist, muß in dem Ausdruck für x das doppelte Vorzeichen gesetzt werden.

Eine andere Parameterdarstellung ist

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b\operatorname{tg}\varphi. \tag{12}$$

Auf sie gründet sich eine einfache Konstruktion von Punkten der Kurve; vgl. für dieselbe z. B. Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.* I, 330.

§ 6. Definition der Kegelschnitte durch Brennpunkt und Leitlinie.

Die drei Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel erhält man auch bei Beantwortung der Frage nach dem geometrischen Ort aller Punkte P, für die das *Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt F und einer festen Geraden g konstant,* etwa gleich λ ist (zuerst erwähnt bei Pappus, um 300 n. Chr.).

Wählt man die Gerade g als y-Achse eines Koordinatensystems (Fig. 5) und legt die x-Achse durch den Punkt F rechtwinklig zu g (F habe alsdann die Abszisse $LF = m$), so liefert die Forderung, daß das Verhältnis $PF : PQ$ gleich λ sei, die Gleichung $(x-m)^2 + y^2 = \lambda^2 x^2$, wenn x, y die Koordinaten des Punktes P bezeichnen, oder auch:

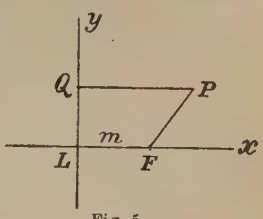


Fig. 5.

$$(13) \qquad y^2 + (1-\lambda^2)\left(x - \frac{m}{1+\lambda}\right)\left(x - \frac{m}{1-\lambda}\right) = 0.$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung werde die y-Achse um die Strecke $\frac{m}{1+\lambda}$ parallel zu sich selbst verschoben, also die Transformation

$$(14) \qquad x = X + \frac{m}{1+\lambda}, \quad y = Y$$

angewandt, wodurch man erhält:

$$Y^2 + (1-\lambda^2)X^2 - 2m\lambda X = 0$$

oder

$$(15) \qquad Y^2 = 2m\lambda X - (1-\lambda^2)X^2.$$

Hier ist λ seiner Natur nach eine positive Größe, während m der Festsetzung nach stets positiv angenommen werden kann. Setzt man $2m\lambda = p$, so erhält man für $\lambda \lessgtr 1$ aus (15) wieder die *Scheitelgleichungen* (1) bis (3) der Kegelschnitte. *Der gesuchte geometrische Ort ist daher eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem* $\lambda < 1$, > 1 *oder* $= 1$ *ist.* Insbesondere erscheint also die *Parabel als geometrischer Ort aller Punkte, die von einem festen Punkte und einer festen Geraden gleichen Abstand haben.*

Die Gleichung (15) geht in die Gleichung der *Ellipse* (1) über, wenn $2m\lambda = p$ und $1 - \lambda^2 = \frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$ gesetzt wird. Für die Halbachsen a und b folgt alsdann

$$(16) \qquad a = \frac{m\lambda}{1-\lambda^2}, \qquad b = \frac{m\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}};$$

ferner wird $\lambda^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$, daher ist λ die numerische Exzentrizität $\frac{c}{a}$. Die Entfernung des festen Punktes F vom Mittel-

punkt M der Kurve wird gleich dem um die Strecke m verminderten Abstand des Punktes M vom ursprünglichen Koordinatenanfang L, es ist daher MF absolut genommen gleich

$$a + \frac{m}{1+\lambda} - m = a - \frac{m\lambda}{1+\lambda} = a\lambda.$$

Da aber λ gleich der numerischen Exzentrizität $c : a$ gefunden wurde, ist somit $MF = c$, d. h. der feste Punkt F ist der eine der beiden Brennpunkte. Die feste Gerade g wird als die zu diesem Brennpunkt gehörige *Direktrix* oder *Leitlinie* bezeichnet. Zu dem zweiten Brennpunkt der Kurve steht natürlich eine zweite Direktrix in derselben Beziehung. Auch folgt leicht, daß die halbe große Achse der Ellipse das geometrische Mittel ist zwischen der linearen Exzentrizität c und dem Abstand der Direktrix vom Mittelpunkt der Kurve, woraus sich sofort eine einfache Konstruktion der Direktrizen ergibt, wenn die große Achse und die Brennpunkte gegeben sind. Man sieht außerdem, daß die Kurve von den Direktrizen nicht in reellen Punkten getroffen wird.

Ähnlich wie bei der Ellipse liegen diese Verhältnisse bei der *Hyperbel.*

Mit Hilfe der oben gegebenen Definition läßt sich sofort die *Gleichung eines Kegelschnitts k in Polarkoordinaten* r, ϑ ableiten, wenn z. B. die Hauptachse von k mit der Polarachse und der eine Brennpunkt F mit dem Pol des Koordinatensystems zusammenfällt. Man findet

$$r = \frac{p}{2(1 \mp \lambda \cos\vartheta)}, \tag{17}$$

wo das doppelte Vorzeichen davon abhängt, ob die von F aus nach dem anderen Brennpunkt sich erstreckende Richtung zu $\vartheta = 0$ oder zu $\vartheta = \pi$ gehört.

§ 7. Gestalt der Parabel.

Die Gleichung der Parabel

$$Y^2 = 2mX \tag{18}$$

zeigt, daß diese Kurve zur X-Achse symmetrisch und ganz auf der einen Seite der y-Achse gelegen ist, von der sie im Koordinatenanfang, dem *Scheitel S,* berührt wird. Von ihm aus erstreckt sie sich ins Unendliche (Fig. 6). Der Abstand des Scheitels S von der Direktrix ist nach (14) gleich $\frac{m}{2}$, da hier $\lambda = 1$; der Scheitel

liegt daher auf der Achse der Kurve in der Mitte zwischen dem festen Punkt F (dem *Brennpunkt*) und dem Schnitt L der Achse mit der Direktrix. Der Parameter p ist gleich $2m$ und hat die gleiche geometrische Bedeutung wie bei Ellipse und Hyperbel (vgl. S. 202 u. 203).

Die Parabel kann man sich aus einer Ellipse, von der ein Scheitel und ein Brennpunkt fest gegeben sind, dadurch entstanden denken, daß man die große Achse der Ellipse unbegrenzt wachsen läßt; diese Kurve nähert sich alsdann mehr und mehr einer Parabel (Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.* I, 390). Dementsprechend sind der Mittelpunkt der Parabel, der zweite Brennpunkt und dessen Direktrix im Unendlichen liegend anzunehmen.

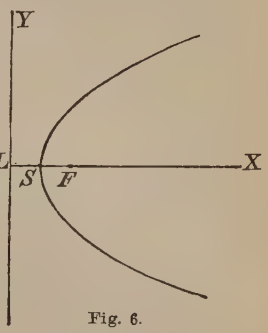


Fig. 6.

Bei der Parabel halbiert die Normale eines Kurvenpunktes P den Winkel, der den Brennstrahl PF und die durch P nach dem unendlich fernen zweiten Brennpunkt, also parallel zur Achse gezogene Gerade zu Schenkeln hat; die Tangente halbiert den Nebenwinkel. Von F ausgehende Lichtstrahlen werden daher durch die Parabel parallel zur Achse reflektiert. Dies findet Anwendung bei Scheinwerfern.

Punkte der Kurve lassen sich konstruieren, indem man um F mit beliebigem Radius r einen Kreis beschreibt und diesen mit einer im Abstand r parallel zur Direktrix (auf der Seite, auf der F liegt) gezogenen Geraden schneidet.

§ 8. Elementare Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte.

Daß jede Tangente eines Kegelschnitts mit den Brennstrahlen ihres Berührungspunktes gleich große Winkel bildet, ist schon oben in § 4, 5 und 7 erwähnt worden.

Wird der eine Brennstrahl, z. B. $F_1P = r_1$ eines Ellipsenpunktes P über P hinaus um den anderen Brennstrahl r_2 verlängert, so erhält man eine Strecke $F_1K = r_1 + r_2 = 2a$. Durchläuft nun P die Ellipse, so beschreibt K um F_1 als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius $2a$ (Fig. 2). Hieraus folgt:

Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkte F_2 und von einem festen Kreise mit dem Mittelpunkt F_1 und dem Radius $2a$ gleichen Abstand haben, ist eine Ellipse, die

F_1 und F_2 zu Brennpunkten und eine Strecke von der Länge $2a$ zur Hauptachse hat. Vorausgesetzt ist hierbei, daß *F_2 innerhalb des Kreises* liegt. Die gleiche Definition gilt für die *Hyperbel*, falls *F_2 außerhalb* des Kreises vom Radius $F_1K = r_1 - r_2 = 2a$ liegt. *Zur entsprechenden Erzeugung der Parabel muß der Kreis in eine Gerade, die Leitlinie, übergehen.*

Ist R der Fußpunkt des von F_2 auf die Tangente des Ellipsenpunktes P gefällten Lotes (Fig. 2), so folgt leicht $OR = \frac{1}{2}F_1K = a$, d. h.:

Der Ort für die Fußpunkte der von einem Brennpunkt auf sämtliche Tangenten einer Ellipse gefällten Lote ist der über der Hauptachse der Kurve als Durchmesser beschriebene Kreis. Der gleiche Satz gilt auch für die Hyperbel, bei der Parabel tritt an die Stelle des Kreises die Scheiteltangente.

Wir führen noch einige weitere wichtige Sätze an, die sich auf die Brennpunkte der Kegelschnitte beziehen.

Zieht man in zwei Punkten P_1, P_2 eines Kegelschnitts die Tangenten, so halbiert die Verbindungslinie eines Brennpunktes F mit dem Schnittpunkt S dieser Tangenten den Winkel P_1FP_2 der Brennstrahlen oder dessen Nebenwinkel, je nachdem P_1 und P_2 demselben oder zwei verschiedenen Kurvenzweigen angehören. Dies letzte kann natürlich nur bei einer Hyperbel eintreten.

Verbindet man den Schnittpunkt S zweier Tangenten eines Kegelschnitts mit den beiden Brennpunkten, so ist die eine Verbindungslinie gegen die eine Tangente unter demselben Winkel geneigt wie die andere Verbindungslinie gegen die andere Tangente.

Der Winkel, unter dem von einem Brennpunkt aus das zwischen zwei festen Tangenten gelegene Stück einer beweglichen Tangente gesehen wird, ist konstant, und zwar gleich der Hälfte eines der beiden Winkel, die von den nach den Berührungspunkten der festen Tangenten gezogenen Brennstrahlen gebildet werden. Insbesondere ist im Falle der Parabel jener Winkel gleich dem Supplement des von den festen Tangenten selbst gebildeten und der Kurve zugekehrten Winkels.

Hieraus folgt sofort der von Lambert zuerst ausgesprochene Satz, daß *der einem Tangentendreiseit einer Parabel umschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Kurve geht.*

Das durch den Berührungspunkt und den Schnittpunkt mit der Direktrix begrenzte Stück einer Tangente wird vom zugehörigen Brennpunkt unter rechtem Winkel gesehen.

Die Tangenten in den Endpunkten einer durch einen Brennpunkt F gehenden Sehne (Fokalschne) schneiden sich in einem Punkte

S der zu F gehörigen Direktrix und die Gerade FS ist rechtwinklig zur Fokalsehne.

Bei der Ellipse und Hyperbel ist das Produkt der Abstände der beiden Brennpunkte von irgendeiner Tangente konstant, und zwar gleich dem Quadrat b^2 der halben Nebenachse.

Näheres über vorstehende Sätze z. B. bei Steiner-Geiser, Kap. III bis V, Steiner-Schröter § 36, Reye, *G. d. L.* I, 155.

§ 9. Quadratur.

Schon Archimedes zeigte, daß *der Inhalt eines durch eine Gerade von der Parabel abgeschnittenen Flächenstückes gleich vier Dritteln eines Dreiecks ist, das mit dem Segment gleiche Grundlinie und Höhe hat* (Schrift über die Quadratur der Parabel, § 17 und 24). Den Inhalt einer Ellipse bestimmte er gleich $ab\pi$ (Schrift über Konoide und Sphäroide), wobei er wußte, daß $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Das Auftreten natürlicher Logarithmen bei Flächen, die durch einen Hyperbelbogen, eine Asymptote und zwei Parallelen zur anderen Asymptote begrenzt werden, wurde im 17. Jahrhundert bemerkt. Insbesondere wird bei der auf ihre Asymptoten als rechtwinklige Koordinatenachsen bezogenen gleichseitigen Hyperbel $xy = m^2$ diese Fläche F gleich $m^2 \cdot \ln \frac{x_2}{x_1}$, wo x_1 und x_2 die Abszissen der Endpunkte des Hyperbelbogens bezeichnen. Für $m = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = x$ folgt einfach $F = \ln x$, eine Formel, die zur Bezeichnung der natürlichen Logarithmen als hyperbolischer Logarithmen Veranlassung gab.

Bei der Darstellung (11) einer beliebigen Hyperbel durch $x = \pm a \cosh t$, $y = b \sinh t$ ist t gleich dem doppelten Inhalt des Sektors, der durch den Radiusvektor OP eines Kurvenpunktes P, die x-Achse und den von P bis zum Schnitt mit der x-Achse gehenden Hyperbelbogen begrenzt wird.

§ 10. Rektifikation.

Der von 0 bis t gehende *Bogen der Ellipse* $x = a \sin t$, $y = b \cos t$ ist durch ein *elliptisches Integral zweiter Gattung*

$$(19)\quad s = a \int_0^t \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 t}\, dt = a \cdot E(\lambda, t), \text{ wo } \lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

gegeben (Legendre, *Paris Hist.* Année 1786, gedruckt 1788,

p. 616). Die Bogenlänge q eines Ellipsenquadranten läßt sich durch die von Euler gegebene Reihe

$$(20) \qquad q = \frac{a\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\lambda^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\lambda^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\lambda^6 \ldots\right\}$$

darstellen; in großer Annäherung kann man diesen Ausdruck ersetzen durch $\frac{\pi}{4}\left\{a + b + \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2\right\}$, vgl. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Torino 1887, p. 233.

Zu einem gegebenen Ellipsenbogen läßt sich ein zweiter von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz der beiden Bögen rektifizierbar ist, d. h. durch eine mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruierbare Gerade dargestellt werden kann (Theorem von Fagnano, veröffentlicht 1716, vgl. *Produzioni matem.* di Fagnano II, 336, Pesaro 1750, Enneper, *Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte*, hrsg. von F. Müller, 2. Aufl., Halle 1890, S. 514, Cantor, *G. d. M.* III, 488). Sind nämlich B und A Scheitel der kleinen und großen Achse und ist P ein Punkt des zugehörigen Ellipsenquadranten, so läßt sich auf diesem ein Punkt Q finden, so daß die Differenz der Bögen BP und AQ rektifizierbar ist, indem man nach Euler (*Petrop. Novi Comm.* **6**, 58 (1761)) folgendermaßen verfährt: Man ziehe in P die Tangente und trage auf sie von ihrem Schnitt R mit der kleinen Achse die Strecke $RPS = a$ ab; das von S auf die große Achse gefällte Lot trifft den Ellipsenquadranten in Q. Die Bogendifferenz $BP - AQ$ ist so groß wie das vom Kurvenmittelpunkt auf die Normale von P oder Q gefällte Lot. Vgl. auch Legendre, *Théorie des fonctions elliptiques*, Paris 1825, p. 46.

Der *Bogen der Hyperbel* führt auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung; doch kann nach einem Satze von Landen (*Phil. Trans.*, Jahrg. 1771, 298, und Jahrg. 1775, 285) ein beliebiger Hyperbelbogen durch zwei Ellipsenbögen ausgedrückt werden. Vgl. auch Küpper, *J. f. Math.* **55**, 89 (1858).

Bei der *Parabel* führt die Bestimmung der Bogenlänge auf Logarithmen. Über Parabelbögen, deren Differenz durch eine leicht zu konstruierende Gerade darstellbar ist, vgl. Azzarelli, *Rom. Acc. L. Atti* **24**, 347 (1871); **25**, 430 (1872).

Chasles nannte die Bögen, deren Differenz durch eine gerade Strecke darstellbar ist, *ähnlich* (semblables), bei de Jonquières (*Mélanges de géométrie pure*, Paris 1856, p. 55) heißen sie arcs associés, bei Reye (*G. d. L.* I, 241) *vergleichbar*. Den Schnittpunkt S der in den Endpunkten M, N eines Bogens gezogenen Tangenten

bezeichnet Reye als Pol, die Strecken SM, SN als Schenkel des Bogens. Nach Chasles (*C. R.* **17**, 838 (1843)) liegen die Pole vergleichbarer Bögen eines Kegelschnitts k auf einem Kegelschnitt, der k einschließt und mit k die Brennpunkte gemeinsam hat; die Differenz der Bogenlängen ist gleich der Differenz der Schenkelsummen (Beweis bei Reye, *Zürich Viert.* **41**^{2}, 70 (1896); *G. d. L.* I, 242 f.).

§ 11. Kegelschnittzirkel.

Die meisten Apparate zum Zeichnen einer *Ellipse* gründen sich auf einen der zwei folgenden kinematisch zusammengehörigen Sätze:

1. Wenn ein Kreis k' in einem anderen k von doppelt so großem Radius rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt jeder mit k' fest verbundene Punkt eine Ellipse, die für Punkte der Peripherie von k' in einen doppelt zu zählenden Durchmesser von k übergeht (diese Erzeugungsweise zuerst bei de la Hire, *Paris Hist.* Année 1706, gedruckt 1707, p. 350).

2. Bewegen sich die Endpunkte P_1, P_2 einer Strecke von gegebener Länge auf zwei sich schneidenden festen Geraden (Kreuzglied), so beschreibt ein mit der Strecke fest verbundener oder auf der Strecke gelegener Punkt P eine *Ellipse e.* Dies findet sich für Punkte *auf* der Strecke schon bei Proklus (410—485 n. Chr.), allgemein bei F. van Schooten, 1646.

Wird bei der eben erwähnten Erzeugungsweise die Strecke P_1P_2 nebst P festgehalten und werden die das Kreuzglied bildenden, vorher festen Geraden bewegt, so hat man das sogen. *Kreuzschleifengetriebe.* Der jetzt ruhende Punkt P beschreibt *in bezug auf das bewegte Kreuzglied* die Ellipse *e.* Die in P befestigte Spitze eines Stichels zeichnet daher diese Ellipse in ein am Kreuzglied befestigtes Werkstück. Auf diesem Mechanismus beruht das, so viel man weiß, von Leonardo da Vinci (1452—1519) erfundene Ovalwerk (Ellipsendrehbank).

Die Fadenkonstruktion der Ellipse wurde schon in § 4 erwähnt.

Ein Instrument zum Zeichnen der *Parabel* hat Isidorus von Milet im sechsten Jahrhundert n. Chr. gegeben; Eutokius berichtet, dasselbe habe die Gestalt eines Λ gehabt. Vermutlich hatte das Instrument folgende Einrichtung: Der Schenkel QR eines rechten Winkels QRS gleitet an der Direktrix der Parabel

(Fig. 7); an einem Punkte S des anderen Schenkels ist das eine Ende eines Fadens von der Länge RS befestigt, dessen zweites Ende sich im Brennpunkt F der Parabel befindet. Ein Zeichenstift P, der den Faden durch Andrücken an RS gespannt erhält, beschreibt alsdann, während RQ an der Direktrix gleitet, eine Parabel.

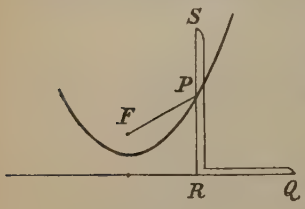


Fig. 7.

Ein Apparat, der je nach seiner Einstellung *irgendeine der drei Kegelschnittarten* zu zeichnen gestattet, ist der Kegelschnittzirkel von Hildebrandt. Er beruht auf einem Satze von Dandelin (*Bruxelles Nouv. Mém.* **2**, 172 (1822)), wonach die Brennpunkte des Schnittes einer Ebene ε mit einem Rotationskegel die Berührungspunkte von ε mit denjenigen zwei Kugeln sind, die dem Kegel eingeschrieben sind und die Ebene berühren (vgl. E. Fischer, *Dinglers Polyt. J.* **282**, 241 (1891) und **287**, 246 (1893)). W. Jürges (*Zschr. f. M.* **38**, 350 (1893)) hat einen Mechanismus zum Zeichnen eines durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitts angegeben.

Näheres über Kegelschnittzirkel bei Rittershaus, *Verh. d. Vereins z. Beförd. d. Gewerbfleißes in Preußen* **54**, 269 (1874), E. Fischer, *Dinglers Polyt. J.* **255**, 267 (1885), von Braunmühl im *Katalog math. Modelle,* hrsg. von W. von Dyck, München 1892, S. 55; in diesem Katalog sind überhaupt zahlreiche Kegelschnittzeichner aufgeführt (S. 227—230 und 340—343), ebenso in dem 1893 erschienenen Nachtrag (S. 42—48).

Kapitel XI.

Allgemeine Theorie der Kegelschnitte.

Von *F. Dingeldey* in Darmstadt.

§ 1. Einleitende Bemerkungen.

Im vorangehenden Kapitel wurden hauptsächlich metrische oder elementar-geometrische Eigenschaften der Kegelschnitte behandelt, Eigenschaften, die bei einer „*äquiformen Transformation*“ der betr. Gebilde erhalten bleiben. Zur näheren Erläuterung dieses von Hefftер eingeführten Ausdrucks sei bemerkt, daß man drei elementare Beziehungen zwischen den Elementen der Ebene (Punkt und Gerade) nebst zugehörigen Transformationsgruppen unterscheiden kann: Die *Inzidenz* oder das Ineinanderliegen eines Punktes und einer Geraden, die *Parallelität* und die *Orthogonalität* zweier Geraden. Die zugehörigen Transformationen (vgl. Kap. III) sind die kollineare oder projektive Transformation, die alle Inzidenzen erhält, die affine Transformation, die alle Inzidenzen und Parallelitäten erhält, die ähnliche oder äquiforme Transformation, die alle Inzidenzen, Parallelitäten und Orthogonalitäten erhält. Dem Sinne nach findet sich diese Unterscheidung schon bei Möbius (*B. K.* § 248 = *Ges. Werke* I, 316); besonders zur Geltung gebracht hat sie F. Klein („*Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*“, autogr. Vorl. S. 51 ff., Göttingen 1896) in Übereinstimmung mit seinem Erlanger Programm *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen 1872 = *Math. Ann.* **43**, 63 (1893). Vgl. auch Study, *Leipz. Ber.* **48**, 649 (1896); Heffter, *Math.-Ver.* **12**, 490 (1903).

Bei Heffter und Köhler (*A. G.*) werden erst die durch die Gruppe der projektiven Transformationen bestimmten Eigenschaften der Kegelschnitte behandelt, es folgen die Untergruppen der affinen und schließlich die der äquiformen Transformationen. Die umgekehrte, von Möbius (*B. K.* Abschn. II) gewählte Reihenfolge

stimmt mit der *historischen Entwicklung* der Theorie der Kegelschnitte überein. Dem widerspricht auch nicht, daß Desargues (1593—1662) die verschiedenen Schnitte des Kegels als Unterarten einer einzigen Kurve betrachtete oder Parallelen als besonderen Fall von Geraden ansah, die sich in einem Punkte schneiden, denn gerade Desargues war bemüht, Eigenschaften des *Kreises* auf die Kegelschnitte zu übertragen (*B. p.*). Die reine Geometrie, die auf die Hilfsmittel der Analysis verzichtet, wird den mit der historischen Entwicklung übereinstimmenden Gang bevorzugen (vgl. hierzu auch H. Wiener, *Abh. zur Sammlung math. Modelle* I, 55 (1907)).

Im folgenden aber, wo wir von der allgemeinen *Gleichung* einer Kurve 2. Ordnung ausgehen und insbesondere auch Kriterien für die in ihr enthaltenen speziellen Kurven ableiten, sollen zuerst einige durch projektive Koordinatentransformation (Zentralprojektion) unzerstörbare Eigenschaften dieser Kurven betrachtet werden.

§ 2. Gleichung der Kurve 2. Ordnung.

Die Gleichungen der Kegelschnitte, zu denen wir im vorhergehenden Kapitel gelangt waren, sind sämtlich in den Veränderlichen x, y von höchstens zweitem Grade. Es liegt daher die Frage nahe, ob die allgemeine Gleichung zweiten Grades in x und y:

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

in der die Koeffizienten a_{ik} stets *reell* vorausgesetzt werden sollen, noch andere Gebilde als Ellipse, Hyperbel, Parabel oder ein Geradenpaar darstellen kann. Überhaupt liegt das Bedürfnis vor, die auf ein System homogener projektiver Koordinaten x_1, x_2, x_3 (vgl. S. 134) bezogene *Kurve zweiter Ordnung*:

$$(2) \quad f(x,x) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_ix_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

näher zu untersuchen.

Eine solche Kurve k ist im allgemeinen durch fünf beliebige Punkte der Ebene bestimmt, denn nach Division von (2) durch irgendeinen von Null verschiedenen Koeffizienten a_{ik} enthält die Gleichung noch fünf voneinander unabhängige Koeffizienten. Eine durch fünf gegebene Punkte bestimmte Kurve 2. Ordnung läßt

sich analytisch durch eine gleich Null gesetzte Determinante 6. Grades darstellen, von der eine Zeile lautet:

$$x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2^2 \quad x_1x_3 \quad x_2x_3 \quad x_3^2,$$

während die übrigen Zeilen die gleichen Verbindungen der Koordinaten für fünf gegebene Punkte enthalten.

Bezeichnet man die fünf Punkte mit a, b, c, d, e und z. B. mit a_1, a_2, a_3 die Koordinaten von a, so läßt sich die Gleichung von k auch in die Form

$$(3) \quad (ade)(bce)(abx)(cdx) - (abe)(cde)(adx)(bcx) = 0$$

bringen, wobei z. B. (ade) die Determinante $\sum \pm (a_1 d_2 e_3)$ darstellt. Durch Vertauschungen der a, b, c, d, e lassen sich im ganzen 15 ähnlich wie (3) gebaute Gleichungen aufstellen. Ihr Zusammenhang unter sich und mit der vorerwähnten Determinante 6. Grades ist mehrfach untersucht worden, u. a. von Reiß, *Math. Ann.* **2**, 396 ff. (1870); Hunyady, *J. f. Math.* **83**, 79 (1877) und **92**, 307 (1882); Mertens, *J. f. Math.* **84**, 355 (1878); Scholtz, *Arch. Math. Phys.* **62**, 317 (1878); Pasch, *J. f. Math.* **89**, 247 (1880); Caspary, *J. f. Math.* **92**, 130 (1882); Gordan, *Math.-Ver.* **4**, 155 (1897); Study, *Leipz. Ber.* **47**, 542 (1895).

§ 3. Schnittpunkte mit einer Geraden. Pol und Polare.

Eine beliebige Gerade, z. B. die Verbindungslinie g zweier Punkte x und y, von denen mindestens x der Kurve k nicht angehören möge $(f(x, x) \neq 0)$, *hat mit k zwei Punkte gemeinsam*, die allerdings auch imaginär sein können. Sollen nämlich $y_i + \lambda x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Koordinaten eines Schnittpunktes von k mit g sein, so liefert ihre Substitution in (2) die in λ quadratische Gleichung

$$(4) \quad f(y,y) + 2\lambda f(y,x) + \lambda^2 f(x,x) = 0,$$

wo

$$(5) \quad \begin{aligned} f(y,x) &\equiv \tfrac{1}{2} f'(y_1)x_1 + \tfrac{1}{2} f'(y_2)x_2 + \tfrac{1}{2} f'(y_3)x_3 \\ &\equiv (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)x_1 \\ &\quad + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)x_2 \\ &\quad + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)x_3. \end{aligned}$$

Man beachte überdies, daß der Ausdruck $f(y, x)$ bei Vertauschung der x_i mit den y_i unverändert bleibt. Den Wurzeln λ_1, λ_2 von (4) entsprechen *zwei* Schnittpunkte von k mit g.

Soll das Schnittpunktepaar zu dem gegebenen Punktepaar harmonisch liegen, so muß $\lambda_1 = -\lambda_2$, also $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ sein, d. h. in (4) muß der Faktor $f(y, x)$ von 2λ verschwinden. *Wird der eine der beiden Punkte y und x, z. B. y, willkürlich aber fest gewählt, zieht man alsdann durch ihn beliebige Strahlen und konstruiert man auf jedem derselben den vierten harmonischen Punkt zu y und dem Schnittpunktepaar des Strahles mit der Kurve k, so liegen alle diese vierten harmonischen Punkte auf der Geraden $f(y, x) = 0$, der Polare des Punktes y in bezug auf k* (*Desargues B. p.* = *Œuvres* I, 164 und 186). Der Name Polare rührt von Gergonne her, *Ann. de Math.* **3**, 297 (1813); y heißt nach Servois (*Ann. de Math.* **1**, 337 (1811)) der *Pol* dieser Geraden.

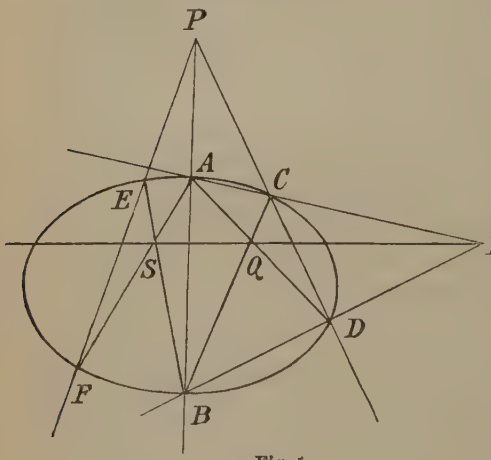


Fig. 1.

Überhaupt heißen zwei Punkte y und x, deren Verbindungslinie g von k in einem zu y und x harmonischen Punktepaare getroffen wird, *harmonische Pole* (Steiner, *S. E.* Nr. 44 = *Werke* I, 350) oder *konjugierte Pole* (Hesse, *J. f. Math.* **20**, 291 (1840) = *Ges. Werke*, S. 30 f.) von k.

Alle auf g gelegenen, zu den Schnittpunkten mit k harmonischen Polepaare bilden eine Involution (vgl. S. 118), *deren Doppelpunkte aus den zwei Schnittpunkten bestehen.*

Die schon oben erwähnte Vertauschbarkeit von y mit x in dem Ausdruck $f(y, x)$ hat zur Folge: *Liegt y auf der Polare von x, so liegt auch x auf der Polare von y.* Hieraus geht weiter hervor, *daß sich die Polare von y um x dreht, wenn y die Polare von x durchläuft,* und umgekehrt: *Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, so beschreibt ihr Pol die Polare dieses Punktes* (De la Hire, *S. c.*, S. 12 und 33 ff.). Zwei Geraden, deren jede durch den Pol der anderen geht, heißen *harmonische* oder *konjugierte Polaren.*

Es liegt die Frage nahe, ob die Polare eines Punktes y durch y selbst hindurchgehen kann. Man sieht, daß alsdann $f(y, y) = 0$ sein muß, d. h. der Pol y muß auf der Kurve liegen;

wie (5) zeigt, wird in diesem Falle die Polare zur Tangente des Punktes y.

Eine *Konstruktion* der Polare eines beliebigen Punktes P gründet sich auf den Satz, daß bei jedem vollständigen Viereck der vierte harmonische Punkt zu zwei Ecken A, B und zu der auf ihrer Verbindungslinie liegenden Nebenecke P auf der Verbindungslinie der beiden anderen Nebenecken Q, R liegt. Man lege daher durch P zwei Strahlen, die die Kurve k in A, B bzw. C, D schneiden (Fig. 1); die Polare von P ist alsdann die Verbindungslinie der Doppelpunkte Q, R der beiden Geradenpaare, die sich noch durch die Ecken des Vierecks $ABCD$ legen lassen. Mit Rücksicht darauf, daß R leicht außerhalb des Zeichenblattes fällt, legt man besser durch P noch eine dritte Gerade, die k in E und F trifft, und verbindet nun E, F kreuzweise mit A und B oder mit C und D. Der Schnittpunkt dieser sich kreuzenden Geraden (z. B. S) ist wieder ein Punkt der Polare.

§ 4. Gleichung in Linienkoordinaten.

Die Koordinaten u_1, u_2, u_3 der Polare von y in bezug auf (2) sind nach (5) von der Form

$$\varrho u_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 = \tfrac{1}{2} f'(y_i), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Umgekehrt entspricht jeder Polare mit den Koordinaten u_i ein Pol y, wenn sich die Gleichungen (6) eindeutig nach den y_i auflösen lassen, also wenn

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

ist. Einstweilen sollen die Kurven, bei denen $A \neq 0$ ist, als *eigentliche* Kurven 2. Ordnung bezeichnet werden. Für die Koordinaten y_i des Pols erhält man im Falle $A \neq 0$ aus (6):

$$\sigma y_i = A_{1i}u_1 + A_{2i}u_2 + A_{3i}u_3, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{8}$$

wo A_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik} in A bedeutet und $\sigma = A : \varrho$ ist.

Die Gerade u ist eine Tangente der Kurve (2), wenn sie durch ihren Pol y hindurchgeht, d. h. wenn $u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = 0$ ist. Durch Elimination der y_i aus dieser Gleichung und aus den drei Gleichungen (8) erhält man die Bedingung dafür, daß eine Gerade u im Falle $A \neq 0$ Tangente der Kurve (2) sei, in der Gestalt

$$(9) \qquad F(u,u) \equiv A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3 + A_{33}u_3^2 = 0,$$

womit man die *Gleichung der Kurve k in Linienkoordinaten* gefunden hat. Man sieht, daß eine Kurve 2. Ordnung im Falle $A \neq 0$ auch von der 2. Klasse ist; *von einem beliebigen Punkt der Ebene lassen sich daher zwei Tangenten an die Kurve legen,* die freilich auch imaginär sein können, und für einen Kurvenpunkt zusammenfallen. Der Ausdruck $F(u,u)$ heißt die zu $f(x,x)$ *adjungierte* quadratische Form.

Die quadratische Gleichung (4) hat zwei gleiche Wurzeln, wenn die Koordinaten von y und x die Bedingung erfüllen:

$$(10) \qquad f(y,y) \cdot f(x,x) - \{f(y,x)\}^2 = 0.$$

In diesem Falle sind die Schnittpunkte der Kurve k und der Verbindungslinie g der Punkte y und x in einen einzigen zusammengerückt, die Gerade g ist eine Tangente von k. Wird wieder y beliebig aber fest gewählt, so muß die Gleichung (10) durch jeden Punkt einer der beiden von y an k zu legenden Tangenten erfüllt werden, *sie stellt daher in laufenden Koordinaten x_i dieses Tangentenpaar dar.*

Überdies ist leicht einzusehen, daß die Ausdrücke (9) und (10) ineinander übergehen, wenn man setzt:

$$(11) \qquad u_1 = x_2y_3 - x_3y_2, \quad u_2 = x_3y_1 - x_1y_3, \quad u_3 = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Hieraus folgt, *daß eine Gerade u die Kurve* (2) *in reellen oder imaginären Punkten trifft, je nachdem $F(u,u) \leqq 0$ oder > 0 ist.* Eine imaginäre, nicht zerfallende Kurve würde vorliegen, wenn bei $A \neq 0$ der Ausdruck $F(u,u)$ für beliebige reelle Werte der u_1, u_2, u_3 stets positives Vorzeichen annähme (eine positive definite Form wäre). Man findet als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür $A_{ii} > 0$ und $Aa_{kk} > 0$, wo i eine beliebig wählbare der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet, während k eine der beiden übrigen, von i verschiedenen Zahlen ist (vgl. z. B. Gundelfingers 1. und 2. Supplement zu seiner Ausgabe von Hesses *A. G. d. R.*, Leipzig 1876, S. 449; Köhler, *Arch. Math. Phys.* (3) **3**, 29 (1902); Heffter und Köhler, *A. G.* S. 284ff.).

Die Schnittpunkte der Polare eines Punktes y mit der Kurve (2) sind, wie (10) zeigt, auch Punkte des Tangentenpaares; *die Polare von y trifft daher die Kurve k in den Berührungspunkten der Tangenten, die man von y an k ziehen kann.* Je nachdem diese

Tangenten reell oder imaginär sind, schneidet die Polare die Kurve in reellen oder imaginären Punkten.

Die Gesamtheit der durch k im Verhältnis von Pol und Polare durch (6) einander zugeordneten Punkte und Geraden bezeichnet man als *Polarsystem*, die Zuordnung selbst als eine *Polarreziprozität*. Die Gleichungen (6) stellen nach S. 141, wenn die Beziehungen $a_{ik} = a_{ki}$ nicht erfüllt sind, eine allgemeine Korrelation oder Reziprozität dar (vgl. S. 119). In dieser erfüllen die Punkte, die auf den ihnen reziproken Geraden liegen, einen Kegelschnitt; die Strahlen, die durch die ihnen reziproken Punkte gehen, umhüllen einen anderen Kegelschnitt. Diese zwei Kurven (Polkegelschnitt und Polarkegelschnitt) vereinigen sich nur in dem involutorischen Falle der Polarreziprozität zu der *Ordnungskurve* oder *Direktrix* $f(x,x) = 0$ des Polarsystems. Näheres bei v. Staudt, *G. d. L.* § 18f.; Steiner-Schröter, S. 391ff.; Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.* II, 748ff.

§ 5. Zerfallende Kurven.

Zu jeder Geraden u gehört nach (6) nur dann ein bestimmter Pol y, wenn $A \neq 0$ ist. Im Falle $A = 0$ läßt sich aber, *solange nicht auch alle* A_{ik} *verschwinden*, ein Wertsystem $z_1 : z_2 : z_3$ angeben, das die drei Gleichungen erfüllt:

$$(12) \qquad \tfrac{1}{2} f'(z_i) \equiv a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + a_{i3} z_3 = 0, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

und zwar ist alsdann $z_1 : z_2 : z_3 = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3}$, wo i irgendeine der Zahlen 1, 2, 3 sein kann. Dieser Punkt z, der offenbar auf der Kurve k liegt, kann als konjugierter Pol zu jedem Punkt der Ebene betrachtet werden. Zur Untersuchung des jetzt vorliegenden Gebildes (2) nimmt man auf k einen beliebigen Punkt x an und verbindet ihn mit z; irgendein Punkt dieser Geraden hat dann Koordinaten von der Form $x_i + \lambda z_i$, $(i = 1, 2, 3)$, die auf Grund von (12) die Gleichung (2) identisch erfüllen. Jeder Punkt dieser Geraden gehört somit der Kurve k an, die Kurve zerfällt daher in eine Gerade und einen weiteren Bestandteil, der wieder eine Gerade sein muß, und zwar eine, die durch z geht, denn für ihre Punkte gilt dasselbe wie für die Punkte der Verbindungslinie von x mit z. *Im Falle* $A = 0$ *besteht also die Kurve aus zwei Geraden;* sie lassen sich auch einzeln darstellen (Cayley, *London Trans.* **152**, 2. Teil, S. 643, Jahrg. 1862, gedr. 1863 = *Coll. pap.* IV, 400; Gundelfinger, *Vorl.*, S. 262 und 38).

Auch die Umkehrung, *daß für jede Gleichung eines Geradenpaares A verschwindet,* ist leicht zu beweisen (Clebsch-Lindemann, *Vorl.* S. 183; Gundelfinger, *Vorl.* S. 29f.).

Der Ausdruck A ist eine *Invariante*, die *Diskriminante* von $f(x,x)$: Wird die Form $f(x,x)$ einer linearen Transformation unterworfen, so ist die für die transformierte Form gebildete Diskriminante A' gleich dem Produkt aus A und einer (nämlich der zweiten) Potenz der Transformationsdeterminante.

Indem wir das gleichzeitige Verschwinden der drei Größen A_{ii}, das bei $A = 0$ das Verschwinden sämtlicher A_{ik} zur Folge hätte, vorläufig ausschließen, läßt sich leicht das Realitätskriterium des Geradenpaares ableiten. Ist z. B. $A_{ii} \neq 0$, so wird $f(x,x) = 0$ transformiert mit Hilfe der Formeln

$$(13) \qquad x_i = x_i, \quad x_k = x_k' + \frac{A_{ik}}{A_{ii}} x_i, \quad x_l = x_l' + \frac{A_{il}}{A_{ii}} x_i,$$

wo i, k, l irgendeine Permutation von 1, 2, 3 bedeutet und $A_{ii} \neq 0$ ist. Die Ecke $x_k' = 0$, $x_l' = 0$ des neuen Koordinatendreiecks liegt dann im Schnittpunkt z des Geradenpaares. Die Transformation ergibt $a_{kk} x_k'^2 + 2 a_{kl} x_k' x_l' + a_{ll} x_l'^2 = 0$, somit zwei reelle oder imaginäre Geraden, je nachdem $a_{kk} a_{ll} - a_{kl}^2 \equiv A_{ii}$ $<$ oder $>$ 0 ist.

Verschwinden *alle* Größen A_{ii} und A_{ik}, wozu, wie erwähnt, schon das Verschwinden von A und A_{11}, A_{22}, A_{33} ausreicht, so ist $f(x,x)$ das Quadrat eines linearen Ausdrucks, $f(x,x) = 0$ *stellt eine Doppelgerade dar*. Es muß nämlich alsdann mindestens eine der drei Größen a_{11}, a_{22}, a_{33} von Null verschieden sein, da sonst sämtliche a_{ik} verschwinden würden. Ist etwa $a_{11} \neq 0$, so läßt sich $f(x,x) = 0$ nach Multiplikation mit a_{11} unter Benutzung von $A_{33} = A_{22} = A_{23} = 0$ in die Form bringen:

$$(14) \qquad (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3)^2 = 0.$$

Daß auch umgekehrt für jede eine Doppelgerade darstellende Gleichung sämtliche A_{ik} verschwinden, ist sofort ersichtlich.

Die zu einem gewöhnlichen Geradenpaar gehörige Gleichung in Linienkoordinaten reduziert sich, wie aus (9) und den oben angegebenen Koordinaten des Schnittpunktes z des Geradenpaares folgt, auf $(z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3)^2 = 0$, *sie stellt daher den Punkt z doppelt zählend dar. Ist $f(x,x) = 0$ eine Doppelgerade, so verschwindet $F(u,u)$ identisch.*

§ 6. Kurve zweiter Klasse.

Zu jedem der in § 2 bis 5 abgeleiteten Sätze läßt sich ein dual entsprechender (vgl. S. 109) angeben, wenn man von der Gleichung einer Kurve (Enveloppe) 2. Klasse (vgl. S. 138):

$$(15)\quad \varphi(u,u) \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0$$

ausgeht. Nur einige Sätze seien hervorgehoben.

Von einem beliebigen Punkt der Ebene lassen sich zwei Tangenten an die Kurve (15) *legen.*

Nimmt man auf einer Geraden v beliebig viele Punkte an und konstruiert man den durch irgendeinen dieser Punkte gehenden vierten harmonischen Strahl zu v und zu den beiden Tangenten, die von dem Punkte an (15) *gezogen werden können, so gehen alle diese vierten harmonischen Strahlen durch einen und denselben Punkt, den Pol der Geraden v.* Seine Gleichung ist

$$(16)\quad \varphi(u,v) \equiv \tfrac{1}{2}\varphi'(v_1)u_1 + \tfrac{1}{2}\varphi'(v_2)u_2 + \tfrac{1}{2}\varphi'(v_3)u_3 = 0.$$

Ist v eine Tangente der Kurve, so stellt (16) ihren Berührungspunkt dar.

Die Kurve (15) zerfällt in ein *Punktepaar*, wenn die Determinante $\mathsf{A} \equiv \sum \pm (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33})$, wobei $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, verschwindet; es liegt ein *Doppelpunkt* vor, wenn auch noch alle Unterdeterminanten A_{ik} verschwinden, wozu das Verschwinden von A und A_{11}, A_{22}, A_{33} ausreicht.

In Punktkoordinaten hat die Kurve (15) die Gleichung:

$$(17)\quad \Phi(x,x) \equiv \mathsf{A}_{11}x_1^2 + 2\mathsf{A}_{12}x_1x_2 + \mathsf{A}_{22}x_2^2 + 2\mathsf{A}_{13}x_1x_3 + 2\mathsf{A}_{23}x_2x_3 + \mathsf{A}_{33}x_3^2 = 0,$$

die im Falle $\mathsf{A} = 0$ den Träger des alsdann vorliegenden Punktepaares doppelt zählend darstellt. Die Kurve 2. Klasse ist daher im allgemeinen auch von der 2. Ordnung. Im Falle eines Doppelpunktes verschwindet (17) identisch.

§ 7. Polardreieck. Polarviereck.

Drei Punkte, von denen je zwei konjugierte Pole einer Kurve 2. Ordnung k sind, bestimmen ein Polardreieck; seine Seiten sind paarweise konjugierte Polaren. Für eine gegebene Kurve gibt es ∞^3 solche Dreiecke (vgl. S. 120).

Bezogen auf ein Polardreieck als Koordinatendreieck kann die Gleichung der Kurve nur die Quadrate der Veränderlichen enthalten. Denn die Polare der Ecke $y_1 = 0, y_2 = 0$ in bezug auf $f(x,x) = 0$ hat die Gleichung $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$; soll diese mit $x_3 = 0$ zusammenfallen, so müssen a_{31} und a_{32} verschwinden. Bei Berück-

sichtigung der anderen Ecken tritt hierzu noch $a_{12} = 0$. Die Gleichung der Kurve ist alsdann

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{18}$$

Offenbar gilt auch die Umkehrung: Enthält die Gleichung $f(x,x) = 0$ nur die Quadrate der Veränderlichen, so ist sie auf ein Polardreieck bezogen. (Vgl. auch S. 227.)

Drei Geraden, von denen je zwei konjugierte Polaren einer Kurve 2. Klasse sind, bilden ein Polardreiseit; seine Ecken sind paarweise konjugierte Pole.

Polarviereck einer Kurve k heißt nach Reye (*G. d. L.* I, 250) *ein solches vollständiges Viereck, dessen drei Seitenpaare Paare konjugierter Polaren von k sind. Polarvierseit heißt ein vollständiges Vierseit, bei dem die drei Eckenpaare konjugierte Polepaare von k sind.* Es gilt der Satz von Hesse: *Sind zwei Paare von Ecken eines vollständigen Vierseits konjugierte Polepaare von k, so sind auch die Punkte des dritten Paares konjugierte Pole* (*J. f. Math.* **20**, 301 (1840) = *Ges. Werke,* S. 41; *J. f. Math.* **36**, 146 (1848) = *Ges. Werke,* S. 159; Cremona, *G. Th.*, S. 161; Rosanes, *Zschr. f. M.* **17**, 174 (1872)).

§ 8. Verhalten zur unendlich fernen Geraden.

In der *affinen Geometrie* werden zu den projektiven Eigenschaften die parallelmetrischen hinzugefügt, die unendlich ferne Gerade g_∞ ist zu adjungieren, und es kommen nur solche Umformungen in Betracht, die g_∞ in sich überführen. Dementsprechend werden wir homogene schiefwinklige Parallelkoordinaten x, y, z zugrundelegen, wo alsdann $z = 0$ die Gerade g_∞ darstellt, bzw. homogene Plückersche Linienkoordinaten u, v, w. Die Gleichung der Kurve 2. Ordnung k sei also

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0. \tag{19}$$

Das naturgemäße Einteilungsprinzip ist die projektive Beschaffenheit der beiden Schnittpunkte von g_∞ mit k. Da diese Punkte durch

$$z = 0, \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \tag{20}$$

dargestellt sind, trifft die Kurve die Gerade g_∞ in zwei verschiedenen reellen oder imaginären oder in zwei zusammenfallenden Punkten, je nachdem $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ oder > 0 oder $= 0$ ist. Diesen drei Fällen entsprechend ist k im Falle $A \neq 0$ eine *Hyperbel, Ellipse* oder *Parabel,* wie die Transformation der Gleichung (19) in ihre

einfachste Gestalt in § 10 zeigen wird. Im Falle $A = 0$, $A_{33} = 0$ ist k ein Geradenpaar mit unendlich fernem Schnittpunkt, also ein *Parallelenpaar*, und zwar reell oder imaginär, je nachdem eine der Größen A_{11} oder $A_{22} < 0$ oder > 0 ist; mit Rücksicht auf $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = A a_{33} = 0$ haben ja diese beiden Größen bei $A = 0$ gleiches Vorzeichen, wenn nicht noch eine von ihnen verschwindet. In Wirklichkeit ist A_{33} eine simultane Invariante der ternären quadratischen und der linearen Form, die die Kurve und g_∞ darstellen (vgl. Boole, *Cambr. math. J.* **3**, 11 f. (1843)). Dies tritt deutlich hervor, wenn man bei diesen Betrachtungen die allgemeinen projektiven Koordinaten beibehält, wie dies z. B. Gundelfinger (*Vorles.* § 4—6) tut.

§ 9. Konjugierte Durchmesser. Mittelpunkt.

Rückt der zu einer Polare der Kurve k gehörige Pol P ins Unendliche, so werden die durch ihn gelegten Strahlen einander parallel, und die Polare muß nun alle durch diese Strahlen gebildeten Sehnen halbieren, sie wird ein *Durchmesser* von k, und zwar der zur Richtung des Sehnensystems *konjugierte* Durchmesser. Durchläuft P die Gerade g_∞, so drehen sich die zugehörigen Durchmesser um den Pol von g_∞ (§ 3), den *Mittelpunkt* der Kurve, so genannt, weil er die Mitte aller durch ihn gelegten Sehnen ist. Er liegt immer im Endlichen, von dem Falle abgesehen, daß g_∞ mit k zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam hat. Der in einem System paralleler Sehnen befindliche Durchmesser bildet mit dem zu der Richtung des Systems konjugierten Durchmesser ein *Paar konjugierter Durchmesser.*

Ist $ux + vy + 1 = 0$ die nicht-homogene Gleichung der Polare des Punktes $x = a_0$, $y = b_0$, so bestehen für ihre Linienkoordinaten nach (5) die Gleichungen

$$(21) \qquad u = \frac{a_{11}a_0 + a_{12}b_0 + a_{13}}{a_{31}a_0 + a_{32}b_0 + a_{33}}, \qquad v = \frac{a_{21}a_0 + a_{22}b_0 + a_{23}}{a_{31}a_0 + a_{32}b_0 + a_{33}}.$$

Diese Ausdrücke müssen verschwinden, falls die Polare die Gerade g_∞, ihr Pol a_0, b_0 der Mittelpunkt der Kurve sein soll; für ihn bestehen somit die Gleichungen

$$(22) \qquad a_{11}a_0 + a_{12}b_0 + a_{13} = 0, \quad a_{21}a_0 + a_{22}b_0 + a_{23} = 0,$$

aus denen

$$(23) \qquad a_0 = A_{31} : A_{33}, \quad b_0 = A_{32} : A_{33}$$

folgt.

Betrachtet man (22) als Gleichungen zweier Geraden, in die an Stelle der laufenden Koordinaten die Werte a_0, b_0 eingesetzt wurden, so können hinsichtlich der Lage dieser Geraden drei Fälle eintreten: 1. sie schneiden sich im Endlichen ($A_{33} \neq 0$), 2. sie sind parallel ($A_{33} = 0$, aber mindestens eine der Größen A_{13}, $A_{23} \neq 0$), 3. sie fallen zusammen (A_{31}, A_{32}, $A_{33} = 0$, womit gleichbedeutend A_{33}, $A = 0$). Im ersten Falle gibt es nur einen im Endlichen, im zweiten Falle einen im Unendlichen liegenden Mittelpunkt, im dritten Falle unendlich viele Mittelpunkte, die eine Gerade (die Mittelpunktslinie) erfüllen, und die Kurve wird ein Parallelenpaar (§ 8).

Es liegt nahe, im *ersten* Fall den Koordinatenanfang durch Parallelverschiebung $x = \xi + a_0$, $y = \eta + b_0$ in den Mittelpunkt der Kurve zu verlegen; ihre nicht-homogene Gleichung wird alsdann

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + \varkappa = 0, \tag{24}$$

wo

$$\varkappa = a_{31}a_0 + a_{32}b_0 + a_{33} = A : A_{33} \tag{25}$$

ist. Im Falle $A = 0$ ist diese Transformation bereits in § 5 benutzt worden. Sie würde auch im *dritten* Falle durchführbar sein; gleichgültig, in welchen der unendlich vielen Mittelpunkte man den Koordinatenanfang verlegt, erhält hier $\varkappa$, obgleich $A = 0$ und $A_{33} = 0$ wird, einen ganz bestimmten Wert (vgl. bei projektiven Koordinaten Gundelfinger, *Vorl.* S. 25f. und 31f.). Man beachte noch, daß in (24) die Koeffizienten der Glieder 2. Grades in x und y im Vergleich zu (19) unverändert geblieben sind, während die linearen Glieder fehlen und das absolute Glied einen anderen Wert erhalten hat. Umgekehrt liegt auch immer, wenn die linearen Glieder fehlen, der Kurvenmittelpunkt im Koordinatenanfang.

§ 10. Transformation der Mittelpunktskegelschnitte auf die Achsen, der Parabel auf Achse und Scheiteltangente.

Es liegt nun nahe, zu fragen, ob eine Kurve mit im Endlichen gelegenem Mittelpunkt Paare zueinander *rechtwinkliger* konjugierter Durchmesser hat. Indem wir diese Frage aufwerfen, betreten wir das Gebiet der *äquiformen* oder *metrischen Geometrie*, bei der das imaginäre Kreispunktepaar adjungiert wird. Der Einfachheit halber seien den folgenden Betrachtungen gewöhnliche *rechtwinklige Parallelkoordinaten* zugrunde gelegt.

Die Gleichung des zu einer Richtung α konjugierten Durchmessers der Kurve

$$(26)\quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

ergibt sich aus der Gleichung der Polare eines Punktes mit den Koordinaten

$$x_1 = r\cos\alpha, \quad y_1 = r\sin\alpha,$$

wenn man in dieser Gleichung, nach Division durch die Länge r des Radiusvektors, $r = \infty$ setzt. Man erhält so:

$$(27)\quad \begin{aligned}&(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)x + (a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)y\\ &+ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\sin\alpha = 0.\end{aligned}$$

Damit dieser Durchmesser zur Richtung α rechtwinklig sei, müssen die Koeffizienten von x und y zu $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ proportional sein, d. h. man hat unter Benutzung des Proportionalitätsfaktors λ:

$$(28)\quad a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda\cos\alpha, \quad a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha,$$

woraus nach Elimination von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ die Gleichung 2. Grades

$$(29)\quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

hervorgeht, deren Wurzeln λ_1, λ_2 stets reell sind, da ihre Diskriminante

$$(30)\quad \Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

positiv ist. Den zwei Wurzeln λ_1, λ_2 entsprechend gibt es zwei Richtungen α_1, α_2, zu denen die zugehörigen konjugierten Durchmesser rechtwinklig sind. Aber es läßt sich leicht zeigen, daß die beiden Richtungen α_1, α_2 selbst zueinander rechtwinklig sind, also in Wahrheit nur ein Paar solcher konjugierter Durchmesser vorhanden ist, die als *Achsen der Kurve* bezeichnet werden. Man braucht zu dem Zweck nur die Gleichungen (28) einmal für λ_1 und α_1, dann für λ_2 und α_2 hinzuschreiben; durch zweckmäßige Verbindung dieser vier Gleichungen folgt

$$(31)\quad (\lambda_1 - \lambda_2)(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) = 0.$$

Solange $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ist daher in der Tat $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, somit $\alpha_1 = \alpha_2 \pm 90^0$.

Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ verschwindet die Diskriminante (30), d. h. es ist, da sämtliche a_{ik} reell angenommen wurden, $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$, die Kurve ist ein *Kreis*. Bei ihm wird α willkürlich, er

hat unendlich viele Paare zueinander rechtwinkliger konjugierter Durchmesser.

Der Koeffizient $a_{11} + a_{22}$ von λ in (29) ist eine simultane Invariante der zur Darstellung der Kurve benutzten ternären Form (19) und des Ausdrucks für das *imaginäre Kreispunktepaar*. Dieses hat bei rechtwinkligen Linienkoordinaten die Gleichung $u^2 + v^2 = 0$, denn die allen Kreisen $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ der Ebene gemeinsamen Punkte sind in Punktkoordinaten gegeben durch den Schnitt von g_∞ mit dem imaginären Geradenpaar $x^2 + y^2 = 0$ (vgl. Boole, *Cambr. math. J.* **3**, 11 (1843)). Deutlich tritt diese Invarianteneigenschaft von $a_{11} + a_{22}$ hervor, wenn man allgemeine projektive Koordinaten beibehält (vgl. Gundelfinger, *Vorl.* S. 87).

Vermittelst der Formeln

$$\xi = X\cos\alpha_1 + Y\cos\alpha_2, \quad \eta = X\sin\alpha_1 + Y\sin\alpha_2, \tag{32}$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm 90^0$$

wird im Falle $\lambda_1 \neq \lambda_2$ das rechtwinklige Koordinatensystem ξ, η, dessen Anfangspunkt bereits im Mittelpunkt der Kurve liegen möge (s. Gl. (24)), um den Winkel α gedreht, so daß die neuen Koordinatenachsen X, Y mit den Achsen der Kurve zusammenfallen. Hierdurch verwandelt sich die nun auf rechtwinklige Koordinaten ξ, η bezogene Gleichung (24) unter Rücksicht auf (28) in

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0, \tag{33}$$

oder in

$$\frac{X^2}{m} + \frac{Y^2}{n} - 1 = 0, \tag{34}$$

wobei

$$m = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}}, \quad n = -\frac{A}{\lambda_2 A_{33}}.$$

Natürlich setzen diese Umformungen voraus, daß die Kurve (26) einen im Endlichen liegenden Mittelpunkt oder eine Mittelpunktslinie (vgl. S. 224) hat; die Achsentransformation solcher Kurven ist damit durchgeführt. Je nachdem im Falle $A \neq 0$ die Größen m und n beide positiv sind oder entgegengesetzte Vorzeichen haben oder beide negativ sind, wird man also auf eine *Ellipse* oder *Hyperbel* oder *imaginäre Kurve* geführt. Der Fall $A = 0$, $A_{33} \neq 0$ liefert ein *reelles* oder *imaginäres Geradenpaar*, je nachdem die Vorzeichen von λ_1 und λ_2 verschieden oder gleich sind.

Die Gleichung (33) enthält, wenn sie durch Z homogen ge-

macht wird, nur die Quadrate X^2, Y^2, Z^2. Schon Lagrange behandelte die auf unendlich viele Arten mögliche Transformation einer homogenen Funktion 2. Grades in eine Summe von Quadraten (*Misc. soc. Taurinensis* 1759 = *Œuvres*, publ. par J. A. Serret I, 7, Paris 1867; Gauß, *Disquisitiones arithmeticae*, Nr. 271, Leipzig 1801 = *Werke* I, 305 f.). Jede solche Transformation bezieht die Kurve (26) zugleich auf ein Polardreieck (§ 7), bei ihr bleibt nach Sylvester (*Phil. Mag.* (4) **4**, 138 (1852) = *Coll. pap.* I, 378) und Jacobi (*J. f. Math.* **53**, 275 (1857) = *Ges. Werke* III, 593) die Anzahl der Quadrate mit einem und demselben Vorzeichen erhalten (Trägheitsgesetz der quadratischen Formen). Weitere Literatur *Enzykl.* III C 1 (Dingeldey), S. 25.

Liegt der Kurvenmittelpunkt im Unendlichen, so ist natürlich die „Transformation auf den Mittelpunkt" (vgl. (24)) undurchführbar, dieser Fall also noch besonders zu behandeln. Charakteristisch für ihn war $A_{33} = 0$, $A \neq 0$, denn $A_{33} = 0$ *und* $A = 0$ führt auf den Fall der Mittelpunktslinie. Man nimmt jetzt zuerst die Transformation von der Form (32) vor, setzt also in (26):

$$x = X\cos\alpha_1 + Y\cos\alpha_2, \quad y = X\sin\alpha_1 + Y\sin\alpha_2, \tag{35}$$

wo bei der Berechnung von α_1 und α_2 mit Hilfe von (28) zu beachten ist, daß nun eine der beiden Wurzeln von (29), etwa λ_1, verschwindet, da $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ist, während die andere $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ wird. Man erhält alsdann

$$\begin{aligned}\lambda_2 Y^2 &+ 2X(a_{13}\cos\alpha_1 + a_{23}\sin\alpha_1)\\ &+ 2Y(a_{13}\cos\alpha_2 + a_{23}\sin\alpha_2) + a_{33} = 0,\end{aligned} \tag{36}$$

wobei

$$a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1 = 0, \quad a_{21}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1 = 0. \tag{37}$$

Bei Ausschließung des Falles $a_{13}\cos\alpha_1 + a_{23}\sin\alpha_1 = 0$, der wegen (37) auf $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$ führen würde, läßt sich durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems die Gleichung (36) in die Form

$$\mathfrak{Y}^2 - p\mathfrak{X} = 0 \tag{38}$$

bringen, sie stellt daher eine *Parabel* dar, die die Gerade $\mathfrak{X} = 0$ zur Scheiteltangente, $\mathfrak{Y} = 0$ zur Achse hat (Kap. X, § 7). Ist jedoch $a_{13}\cos\alpha_1 + a_{23}\sin\alpha_1 = 0$, so geht (36) über in die Gleichung eines Parallelenpaares

$$\lambda_2 Y^2 + 2Y(a_{13}\cos\alpha_2 + a_{23}\sin\alpha_2) + a_{33} = 0, \tag{39}$$

deren Diskriminante gleich $-(A_{11} + A_{22})$ gefunden wird.

Von der Gleichung (26) der allgemeinen Kurve 2. Ordnung ausgehend wird man also durch die vorstehend angegebenen Transformationen auf die Gleichungen (33) oder (38) oder (39) geführt, also, von den imaginären Gebilden abgesehen, auf die in Kap. X als *Kegelschnitte* bezeichneten Gebilde. Beim Parallelenpaar wäre der Kegel allerdings zu ersetzen durch einen Zylinder (Kegel mit unendlich ferner Spitze).

§ 11. Kriterien der Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse.

Für die auf schief- oder rechtwinklige Koordinaten bezogene Kurve 2. Ordnung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

erhält man Kriterien, die in folgender Tabelle übersichtlich zusammengestellt sind:

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$A_{33} \neq 0$</td><td colspan="3">$A_{33} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A \neq 0$</td><td>$A_{33} < 0$</td><td colspan="2">$A_{33} > 0$</td><td colspan="3" rowspan="2">Parabel</td></tr>
<tr><td>Hyperbel</td><td>$a_{11}A$ oder $a_{22}A$
< 0 | > 0
Ellipse | Imag. Kurve</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A = 0$</td><td>$A_{33} < 0$</td><td colspan="2">$A_{33} > 0$</td><td>A_{11} oder A_{22}
< 0 | > 0</td><td>$A_{11} = A_{22} = 0$</td></tr>
<tr><td>Reelles Geradenpaar</td><td colspan="2">Imaginäres Geradenpaar
(Schnittpkt. im Endlichen)</td><td>Reelles | Imaginäres
Parallelenpaar</td><td>Doppelgerade</td></tr>
</table>

Zum großen Teil sind diese Kriterien Resultate der Betrachtungen in § 4, 5, 8, 10; zum Teil folgen sie unter Beachtung der bei (34) und (39) gemachten Bemerkungen und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß im Falle $A_{33} > 0$ die Größen a_{11} und a_{22} gleiches Vorzeichen haben, und zwar dasselbe wie λ_1 und

λ_2, denn es ist $A_{33} = \lambda_1 \lambda_2$, $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$. Ebenso haben A_{11} und A_{22} im Falle $A = 0$ gleiches Vorzeichen, da

$$A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \equiv A a_{33} = 0.$$

Bei Anwendung obiger Kriterien auf die zu einer eigentlichen Kurve 2. Klasse

$$(40) \quad \alpha_{11} u^2 + 2\alpha_{12} uv + \alpha_{22} v^2 + 2\alpha_{13} u + 2\alpha_{23} v + \alpha_{33} = 0$$

gehörige Gleichung in Punktkoordinaten (vgl. (15) und (17))

$$(41) \quad \mathsf{A}_{11} x^2 + 2\mathsf{A}_{12} xy + \mathsf{A}_{22} y^2 + 2\mathsf{A}_{13} x + 2\mathsf{A}_{23} y + \mathsf{A}_{33} = 0$$

erhält man $(\mathsf{A} \neq 0)$ die Kriterien der eigentlichen Kurven 2. Klasse bei schief- oder rechtwinkligen Linienkoordinaten: *Hyperbel* für $\mathsf{A}\alpha_{33} < 0$; Ellipse oder imaginäre Kurve für $\mathsf{A}\alpha_{33} > 0$, und zwar das eine oder andere Gebilde, je nachdem eine der Größen A_{11} oder A_{22} negativ oder positiv ist; *Parabel* für $\alpha_{33} = 0$. Im Falle $\mathsf{A} = 0$ artet die Kurve in ein Paar von Punkten aus, die beide im Endlichen liegen, falls $\alpha_{33} \neq 0$; im Falle $\alpha_{33} = 0$ liegt jedoch mindestens einer der Punkte im Unendlichen. Vgl. auch § 6.

§ 12. Asymptoten. Gleichseitige Hyperbel.

Dem in § 3 erwähnten Satz über die auf einer Geraden durch die konjugierten Polepaare der Kurve k gebildete Involution entspricht dual, daß *sämtliche Paare konjugierter Polaren, die einem und demselben Strahlenbüschel angehören, eine Involution bilden, deren Doppelstrahlen aus den im Büschel befindlichen Tangenten von k bestehen.* Hieraus folgt, daß sämtliche Paare konjugierter Durchmesser zu den Asymptoten von k harmonisch liegen. *Insbesondere werden bei jeder gleichseitigen Hyperbel die Winkel zweier konjugierten Durchmesser durch die Asymptoten halbiert* (vgl. S. 204). Man kann die gleichseitige Hyperbel auch als einen Kegelschnitt definieren, für den das imaginäre Kreispunktepaar ein konjugiertes Polepaar ist. Nun war $f(y, z) = 0$ die Bedingung dafür, daß zwei Punkte mit den Dreieckskoordinaten y_i und z_i $(i = 1, 2, 3)$ konjugierte Pole von $f(x, x) = 0$ sind; wäre dieses Punktepaar durch eine Gleichung in Linienkoordinaten

$$(42) \quad \begin{aligned} &\omega_{11} u_1^2 + 2\omega_{12} u_1 u_2 + \omega_{22} u_2^2 + 2\omega_{13} u_1 u_3 \\ &+ 2\omega_{23} u_2 u_3 + \omega_{33} u_3^2 = 0 \end{aligned}$$

gegeben, so würde, wie man leicht sieht, die Bedingung $f(y, z) = 0$ in

$$(43) \quad \begin{aligned} &a_{11}\omega_{11} + 2a_{12}\omega_{12} + a_{22}\omega_{22} + 2a_{13}\omega_{13} \\ &+ 2a_{23}\omega_{23} + a_{33}\omega_{33} = 0 \end{aligned}$$

übergehen. Falls (42) das imaginäre Kreispunktepaar darstellt, wäre (43) die Bedingung dafür, daß $f(x, x) = 0$ eine *gleichseitige Hyperbel* ist. Insbesondere bei rechtwinkligen Parallelkoordinaten ist also (vgl. S. 226) $a_{11} + a_{22} = 0$, $A \neq 0$ die *Bedingung der gleichseitigen Hyperbel.*

Die Gleichung des Asymptotenpaares erhält man aus der Gleichung des Tangentenpaares, das in den Schnittpunkten der Kurve $f(x, x) = 0$ mit einer Geraden $v_x \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$ gezogen werden kann, wenn die Größen v_1, v_2, v_3 die Koordinaten von g_∞ sind. Die Koordinaten des Pols der Geraden v sind nun (vgl. (8)) proportional zu $y_i = \frac{1}{2} F'(v_i)$; werden diese in (10) eingeführt, so erhält man, da $f(y, y)$ in $A F(v, v)$ und $f(y, x)$ in $A v_x$ übergeht, das gewünschte Tangentenpaar in der Gestalt:

$$F(v, v) \cdot f(x, x) - A v_x^2 = 0, \tag{44}$$

womit nun auch das Asymptotenpaar bestimmt ist. Bei homogenen Parallelkoordinaten $x : y : z$ ist $z = 0$ der Ausdruck für g_∞; um nun das Asymptotenpaar zu erhalten, wäre in (44) $x_1 : x_2 : x_3$ durch $x : y : z$ zu ersetzen, $F(v, v)$ durch A_{33}, v_x durch z.

§ 13. Direktorkreis. Ähnliche Kegelschnitte.

Wenn man bei rechtwinkligen Koordinaten den Winkel γ bestimmt, den die von einem Punkte x_1, y_1 an die Kurve (26) gelegten Tangenten miteinander bilden, so findet man

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \frac{\sqrt{-A(a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 y_1 + \cdots + a_{33})}}{H}, \tag{45}$$

wo

$$2H \equiv A_{33}(x_1^2 + y_1^2) - 2A_{13} x_1 - 2A_{23} y_1 + A_{11} + A_{22}, \tag{46}$$

oder im Hinblick auf (23) und (34)

$$2H \equiv A_{33}\{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 - m - n\}. \tag{47}$$

Hieraus folgt, daß der Ort aller Punkte, von denen sich an die Kurve k zueinander rechtwinklige Tangenten legen lassen, ein mit k konzentrischer Kreis $H = 0$, der sog. *Direktorkreis* oder *Hauptkreis* der Kurve ist. Im Falle einer Parabel ($A_{33} = 0$) zerfällt der Kreis in g_∞ und die *Direktrix* der Kurve, denn die für $A_{33} = 0$ durch (46) dargestellte *Gerade* muß aus Gründen der Symmetrie rechtwinklig zur Achse der Parabel sein; überdies gehört der Schnittpunkt L von Direktrix und Achse der Geraden an. Da nämlich L und der Brennpunkt F (Fig. 6, S. 207) ein harmonisches Polepaar der Kurve bilden, erkennt man leicht, daß die

Berührungssehne des von L an die Kurve gelegten Tangentenpaares mit der durch F rechtwinklig zur Achse gezogenen Geraden zusammenfällt, und mit Hilfe der gewöhnlichen Definition der Parabel folgt als Winkel des Tangentenpaares der rechte Winkel. Im Falle einer gleichseitigen Hyperbel wird der Radius des Kreises gleich Null, der Kreis wird ein durch die imaginären Kreispunkte gehendes „zirkulares Geradenpaar" (Gundelfinger). Auch findet man leicht, daß der Kreis imaginär wird, wenn eine Hyperbel vorliegt, deren Nebenachse $2b$ größer als die Hauptachse $2a$ ist.

Bei Einführung der Mittelpunktskoordinaten (23) des Kegelschnitts an Stelle von x_1, y_1 in (45) erhält man den durch die Asymptoten gebildeten Winkel α, und zwar folgt

$$\text{(48)} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{2\sqrt{-A_{33}}}{a_{11}+a_{22}} = \pm\frac{2\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1+\lambda_2},$$

wo λ_1, λ_2 die Wurzeln der Gleichung (29) sind. Mit Rücksicht auf (33) ist also ersichtlich, daß α nur von dem Verhältnis $a:b$ der Achsenlängen der Kurve abhängt. Kegelschnitte, für die dieses Verhältnis dasselbe ist, heißen ähnlich; sie haben offenbar auch gleiche numerische Exzentrizität, und umgekehrt. Kommt noch gleiche Achsenrichtung hinzu, so sind die Kurven *ähnlich und ähnlich liegend*, sie sind *homothetisch*. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

§ 14. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser.

Schon bei *Apollonius* (Buch 7, § 12—13 und § 31) finden sich über konjugierte Durchmesser die beiden Sätze:

Bei der Ellipse ist die Summe der Quadrate zweier konjugierten Halbmesser, bei der Hyperbel deren Differenz konstant und gleich der Summe bzw. Differenz der Quadrate der Halbachsen.

Alle Parallelogramme, deren Paare von Gegenseiten durch die in den Endpunkten zweier konjugierten Durchmesser gezogenen Tangenten gebildet werden, sind inhaltsgleich mit dem Rechteck, das die Scheiteltangenten bilden.

Auf Grund der schon S. 202 erwähnten affinen Verwandtschaft zwischen der Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ und dem Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ entsprechen nämlich zwei zueinander rechtwinkligen Durchmessern des Kreises, deren einer nach dem Punkt $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ des Kreises geht, zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse, von denen der eine nach dem Punkte $x = a\cos t$, $y = b\sin t$,

der andere nach dem Punkt mit dem Parameter $t + \frac{1}{2}\pi$ geht. Die Quadrate der zugehörigen Halbmesser sind

$$a_1^2 = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t \text{ und } b_1^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t;$$

hieraus folgt $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$. Ebensoleicht ist der zweite Satz zu beweisen. Zum Beweis vgl. Plücker, *A. E.* I, 144; Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.* I, 337f.; Gundelfinger, *Vorl.* S. 281f.

Natürlich folgt aus dem zweiten der vorstehenden zwei Sätze, *daß der Inhalt aller Parallelogramme, die konjugierte Durchmesser zu Diagonalen haben, halb so groß ist wie das Rechteck, das die Scheiteltangenten bilden.*

Unter allen einer Ellipse umschriebenen Vierecken hat das durch die Tangenten der Endpunkte konjugierter Durchmesser gebildete Parallelogramm den *kleinsten Inhalt*, unter allen eingeschriebenen Vierecken hat das durch die Endpunkte konjugierter Durchmesser bestimmte Parallelogramm den *größten Inhalt* (Durrande, *Ann. de Math.* **12**, 142 und 223 (1822)). Einer Ellipse eingeschriebene Vierecke von *größtem Umfang*, umschriebene von *kleinstem Umfang* behandelt Steiner, *J. f. Math.* **37**, 182 (1848) = *Werke* II, 411.

Die Diagonalen des einer Ellipse umschriebenen Rechtecks der Scheiteltangenten bilden ein Paar gleich großer konjugierter Durchmesser; auf dieses als Koordinatenachsen bezogen nimmt die Kurvengleichung die Gestalt $x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$ an. Der durch die Diagonalen gebildete spitze Winkel ist der kleinste Winkel, der bei zwei konjugierten Durchmessern vorkommt. (Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.* I, 343).

Die Konstruktion der *Achsen* eines Kegelschnitts, wenn ein Paar konjugierter Durchmesser gegeben ist, läßt sich auf sehr viele Arten erledigen. Wir verweisen für sie z. B. auf Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.* I, 340, ferner auf Somoff, *Nouv. Ann.* **19**, 122 (1860); Chasles, *S. c.* S. 132; Mannheim, *Nouv. Ann.* **16**, 188 (1857); (2) **17**, 529 (1878); (4) **4**, 5 (1904); Rodenberg, *Zschr. d. Ver. deutsch. Ing.* **27**, 803 (1883); Graefe, *Zschr. f. M.* **46**, 352 (1901).

Zahlreiche Konstruktionen der *Achsen* aus gegebenen Stücken findet man bei Pelz, *Wien. Ber.* **73**, 379 (1895).

§ 15. Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel oder Punktreihen.

In der neueren synthetischen Geometrie wird seit Steiner und Chasles der Kegelschnitt als Ort der Schnittpunkte ent-

sprechender Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel oder als Hüllkurve der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektiven Punktreihen, die nicht perspektiv liegen, betrachtet. Der so erzeugte Kegelschnitt geht auch durch die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel oder hat die Träger der beiden Punktreihen zu Tangenten.

Je nachdem die Büschel zwei Paare, ein Paar oder kein Paar paralleler entsprechender Strahlen enthalten, entsteht eine *Hyperbel, Parabel* oder *Ellipse,* denn diese Kegelschnitte unterscheiden sich dadurch, daß sie mit g_∞ zwei verschiedene reelle Punkte, einen Berührungspunkt oder keine reellen Punkte gemein haben. Im ersten Fall können die Büschel sowohl gleichlaufend als ungleichlaufend sein, in den beiden anderen Fällen müssen sie gleichlaufend sein. Je nachdem zwei *gleiche* (kongruente) projektive Strahlenbüschel ungleichlaufend oder gleichlaufend sind, erzeugen sie eine *gleichseitige Hyperbel* oder einen *Kreis.* Doch kann die gleichseitige Hyperbel auch durch zwei ungleiche projektive Büschel erzeugt werden, es muß nur das eine Paar einander entsprechender paralleler Strahlen zu dem anderen rechtwinklig sein.

Das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen ist eine *Parabel,* wenn die unendlich fernen Punkte der Punktreihen einander entsprechen, d. h. wenn die Punktreihen einander ähnlich sind. Verwickelter sind die Kriterien für die Erzeugung von Ellipse, Hyperbel, Kreis, gleichseitiger Hyperbel durch projektive Punktreihen. Vgl. hierfür sowie für die nähere Ausführung der vorstehenden Betrachtungen Steiner, *S. E.*, § 37—40 = *Werke* I, 329—338; Chasles, *Aperçu historique,* Note 15; Steiner-Schröter, § 20 bis 26; Reye, *G. d. L.* I, 67ff. und 85ff.

Auf anderem Wege kommt H. Wiener (*Abhandlungen zur Sammlung mathem. Modelle I*, 1. Heft, Nr. 7, Leipzig 1907) zur Beziehung von Durchmessern und konjugierten Richtungen und von da zur Konstruktion der Kegelschnitte innerhalb der affinen Geometrie. Die nachstehenden diesbezüglichen Ausführungen rühren von Herrn Wiener her, dem ich für deren Überlassung hiermit den wärmsten Dank ausspreche. Zweierlei Strahleninvolutionen sind in der äquiformen Geometrie unmittelbar gegeben, nämlich die *Rechtwinkelinvolution,* deren Strahlenpaare durch die imaginären Kreispunkte harmonisch getrennt werden, und die *Gleichwinkelinvolution,* die irgend zwei senkrechte Strahlen zu Doppelstrahlen hat. Aus ihnen wird durch Parallelprojektion in der affinen Geometrie die allgemeine elliptische und hyperbolische Strahleninvolution gewonnen, also auch die Beziehung, die man

eine „gemischte Involution" nennen könnte und die den Durchmessern eines Mittelpunktskegelschnitts ihre konjugierten Richtungen zuordnet; ihr läßt sich eine ebensolche Beziehung an die Seite stellen, die für die Parabel dasselbe leistet.

Diese Beziehungen liefern für Ellipse, Hyperbel und Parabel eine einheitliche Erzeugung, sowohl für Punkt- wie für Tangentenkurven. Ist nämlich für die Kurve außer dem System der Durchmesser und ihrer konjugierten Richtungen ein Punkt oder eine Tangente gegeben, so erhält man alle übrigen solchen Stücke, indem man das gegebene Stück an jedem Durchmesser in der konjugierten Richtung spiegelt. Aus diesem „Spiegelverfahren" leitet man ein „Schnittverfahren" ab, das für die Mittelpunktskegelschnitte die Verallgemeinerung des dem Thales zugeschriebenen Kreissatzes vom rechten Winkel im Halbkreis liefert: Zieht man aus zwei Gegenpunkten des Kegelschnitts (d. h. solchen, die zum Mittelpunkt symmetrisch liegen,) zwei Geraden in konjugierter Richtung, so schneiden sich diese auf dem Kegelschnitt, und dual hierzu: Schneidet man zwei Gegentangenten des Kegelschnitts mit zwei konjugierten Durchmessern, so berührt die Verbindungsgerade der Schnittpunkte die Kurve.

Der Wert dieser Sätze beruht darauf, daß nicht nur die in ihnen enthaltenen Konstruktionen ausschließlich der äquiformen und affinen Geometrie angehören, sondern auch ihre *Beweise* (H. Wiener a. a. O. Anm. III, S. 69 ff.), da diese auf Anwendung des Grundsatzes der projektiven Geometrie sowie auf Verhältnisse oder Doppelverhältnisse und ebenso auf Stetigkeitsbetrachtungen verzichten und sich nur auf die Kongruenz der Figuren und die Parallelprojektion stützen.

§ 16. Satz von Pascal.

Da ein Kegelschnitt k im allgemeinen durch fünf seiner Punkte oder fünf Tangenten bestimmt ist, kann man zu seiner projektiven Erzeugung zwei der gegebenen Punkte (Tangenten) zu Mittelpunkten der ihn erzeugenden Strahlenbüschel (zu Trägern der ihn erzeugenden Punktreihen) wählen und die anderen drei gegebenen Elemente zur Festlegung der projektiven Beziehung benutzen. Es folgt dann aus den früheren Betrachtungen:

Werden vier beliebig aber fest gewählte Punkte von k mit irgend einem fünften Punkte der Kurve verbunden, so ist das

Werden vier beliebig aber fest gewählte Tangenten von k mit irgendeiner fünften Tangente geschnitten, so ist das Doppel-

Doppelverhältnis der vier Strahlen immer dasselbe. *verhältnis der vier Schnittpunkte immer dasselbe.*

(Steiner, *S. E.* § 43.)

Die Tatsache, daß ein Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt ist, hat zur Folge, daß zwischen sechs Punkten der Kurve eine gewisse Beziehung stattfinden muß. Eine solche ist z. B. durch (3) gegeben, wenn x_1, x_2, x_3 die Koordinaten eines sechsten Punktes f der Kurve bedeuten, oder sie kommt dadurch zum Ausdruck, daß man etwa die zwei Doppelverhältnisse $d(abce)$ und $f(abce)$ einander gleich setzt. Bei weiterer Verfolgung dieses letztgenannten Verfahrens zeigt sich, daß die Geraden ab und bc in projektiven Punktreihen geschnitten werden, indem die zwei Punkt-Quadrupel $a, b, (dc)(ab) = t$, $(de)(ab) = q$ und $(fa)(bc) = s, b, c, (fe)(bc) = r$ dasselbe Doppelverhältnis haben (Fig. 2).

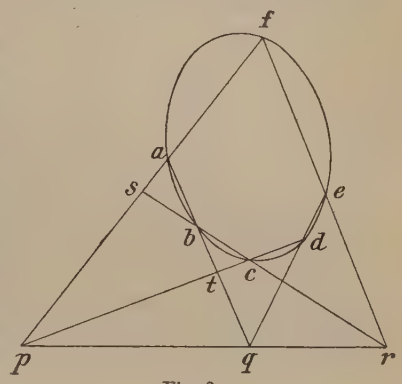


Fig. 2.

Da in diesen zwei Punktreihen der Punkt b sich selbst entspricht, sind sie auch perspektiv, die Verbindungslinien von a mit s, von t mit c und von q mit r gehen durch einen und denselben Punkt p, oder *die Schnittpunkte* $q = (ab)(ed)$, $p = (fa)(dc)$ und $r = (fe)(bc)$ *der drei Paare gegenüberliegender Seiten des einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks* $abcdefa$ *schneiden sich in drei Punkten einer Geraden.* Diese Gerade heißt die Pascalsche Gerade des Sechsecks nach B. Pascal, der den Satz 1639 im Alter von 16 Jahren fand (*Essais pour les coniques* = *Œuvres compl.*, hrsgg. von Lahure, II, 354, Paris 1858). Aufs neue wurde der Satz selbständig von Maclaurin gefunden, bei dem er sofort aus folgender Erzeugungsweise der Kegelschnitte hervorgeht: Drehen sich die Seiten xy, yz, zx eines veränderlichen Dreiecks xyz um drei feste Punkte a, c, e, während zwei seiner Ecken (y, z) auf festen Geraden B, D fortrücken, so beschreibt die dritte Ecke x einen Kegelschnitt, der durch a und e geht, sowie durch die Punkte $g = (ac)D$, $h = DB$, $k = (ce)B$. Man sieht hier, daß sich die Gegenseiten des Sechsecks $aghkex$ in den Punkten c, z, y einer und derselben Geraden schneiden (*London Trans.* **39**, Nr. 439 (1735), gefunden 1722). Zu der Frage, wie in einfachster Weise

auf Grund des Maclaurinschen Satzes Kreise, gleichseitige Hyperbeln oder Parabeln erzeugt werden können, vgl. Dingeldey, *Atti del IV. congresso internaz. dei matematici* (Roma 1908), **2**, 278; *Math. Ver.* **18**, 99 (1909). Auch Schlamp hat näher untersucht, was für Kegelschnitte bei besonderen Lagen der drei festen Punkte und der zwei festen Geraden erzeugt werden, und hat einen Apparat zur Verwirklichung der Maclaurinschen Erzeugungsweise der Kegelschnitte konstruiert (*Progr. Neues Gymnasium zu Darmstadt*, 1908). Zum Prioritätsstreit zwischen Braikenridge und Maclaurin vgl. Cantor, *G. d. M.* III, 787ff. und E. Kötter, *Math. Ver.* **5**, 15 (1901). Übrigens gilt auch, wie Braikenridge und Maclaurin fanden, der allgemeinere Satz, *daß eine Ecke eines veränderlichen n-Ecks einen Kegelschnitt beschreibt, wenn sich die übrigen $n-1$ Ecken auf festen Geraden bewegen, während sich sämtliche Seiten um feste Punkte drehen.*

Dem Pascalschen Satz entspricht dual der Satz von Brianchon: *Die Verbindungslinien der Gegenecken eines einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsseits schneiden sich in einem und demselben Punkte,* dem Brianchonschen Punkte des Sechsseits (*J. éc. pol.* **6**, cah. 13, 301 (1806)).

Bezüglich der zahlreichen anderen Beweise, die für die Sätze von Pascal und Brianchon gegeben wurden, sei noch auf den soeben erwähnten Bericht von E. Kötter (S. 14ff.) verwiesen, ferner auf den Artikel von Dingeldey, *Enzykl.* III C 1, Nr. 18f. und auf M. Simon, *E. d. G.*, S. 185.

Beide Sätze lassen sich zu zahlreichen Konstruktionen verwenden, z. B. zur Konstruktion weiterer Punkte (Tangenten) eines durch fünf Punkte (Tangenten) gegebenen Kegelschnitts, oder zur Konstruktion der Tangente in einem dieser fünf Punkte (des Berührungspunktes einer der fünf Tangenten) usw. Vgl. z. B. Enriques, *P. G.*, S. 220ff.

Läßt man die erste, dritte und fünfte Seite eines eingeschriebenen Sechsecks unendlich klein werden, so folgt: *Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck treffen die in den Ecken gezogenen Tangenten die Gegenseiten in Punkten einer Geraden* (Carnot, *G. d. p.* Nr. 399), und dual ergibt sich: *Bei einem umschriebenen Dreiseit gehen die von den Ecken nach den Berührungspunkten der Gegenseiten gezogenen Geraden durch einen und denselben Punkt* (Satz von Ceva, 1678).

Durch beliebige sechs Punkte eines Kegelschnitts sind offenbar $6! : 12 = 60$ verschiedene Sechsecke bestimmt, denen 60 Pascalsche Geraden $\mathfrak{h}$ entsprechen. Steiner fand nun, daß diese zu je

dreien durch einen Punkt gehen, wodurch 20 solche Steinersche Punkte $\mathfrak{G}$ entstehen (*Ann. de Math.* **18**, 339 (1828) = *Werke* I, 224). Die Punkte $\mathfrak{G}$ liegen, wie Plücker bemerkte, auf 15 Steiner-Plückerschen Geraden $\mathfrak{j}$, deren jede vier Steinersche Punkte enthält, so daß durch jeden Punkt $\mathfrak{G}$ drei Geraden $\mathfrak{j}$ gehen. Kirkman fand 60 Punkte $\mathfrak{H}$ (Kirkmansche Punkte), durch deren jeden drei Pascalsche Geraden $\mathfrak{h}$ gehen, so daß auf jeder $\mathfrak{h}$ ein $\mathfrak{G}$ und drei $\mathfrak{H}$ liegen. Cayley und Salmon fanden unabhängig voneinander 20 Cayley-Salmonsche Geraden $\mathfrak{g}$, deren jede drei Punkte $\mathfrak{H}$ enthält, und Salmon erkannte, daß auf jeder $\mathfrak{g}$ ein Steinerscher Punkt $\mathfrak{G}$ liegt, sowie daß immer vier Geraden $\mathfrak{g}$ durch einen von 15 „Salmonschen Punkten“ gehen. Sämtliche Sätze dieser Art beruhen im wesentlichen auf dem fundamentalen Satze von Desargues über perspektiv liegende Dreiecke, wonach bei diesen die Schnittpunkte entsprechender Seiten sich in einer Geraden befinden.

Es ist nicht möglich, hier die Pascalsche Konfiguration und gewisse bei ihr vorkommende Dualitäten weiter zu verfolgen; wir verweisen vielmehr auf Salmon-Fiedler, *A.G.d.K.* II, S. 470 ff. und X—XII; Clebsch-Lindemann, *Vorl.* I, 275—304; Hesse, *Vorl. aus der anal. Geom. der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene*, 4. Aufl. hrsgg. von Gundelfinger, S. 155 ff., Leipzig 1906; Dingeldey, *Enzykl.* III C 1, Nr. 20—22.

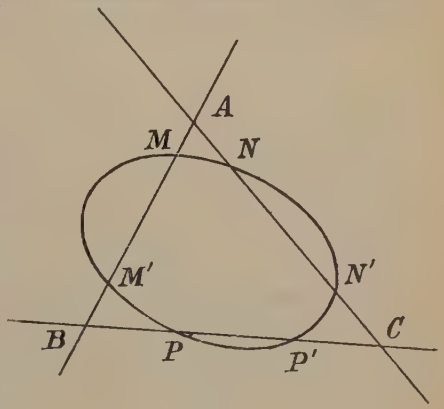


Fig. 3.

Auf den Schnitt eines Kegelschnitts mit den Seiten eines Dreiecks ABC bezieht sich ein Satz von Carnot (*G. d. p.* Nr. 236—240), demzufolge zwischen den auf den Seiten gebildeten Abschnitten (Fig. 3) die Beziehung stattfindet:

$$(49)\qquad \begin{aligned} &AM \cdot AM' \cdot BP \cdot BP' \cdot CN \cdot CN' \\ &\quad = AN \cdot AN' \cdot BM \cdot BM' \cdot CP \cdot CP'. \end{aligned}$$

Chasles zeigte mit Hilfe dieses und eines dual entsprechenden Satzes, *daß die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den auf den Gegenseiten durch einen Kegelschnitt k ausgeschnit-*

tenen Punkten Tangenten eines zweiten Kegelschnitts sind (*S. c.*, S. 62; vgl. auch Hesse, *J. f. Math.* **65**, 384 (1866) = *Ges. Werke*, S. 529; W. Fr. Meyer, *Math.-Ver.* **9**, 94 (1901)). *Dual entsprechend schneiden die von den Ecken eines Dreiecks an k gezogenen Tangenten die Gegenseiten in Punkten eines zweiten Kegelschnitts,* und wenn k in ein Punktepaar ausartet, folgt der Satz von Steiner, *daß die Verbindungslinien zweier Punkte mit den Ecken eines Dreiecks die Gegenseiten in Punkten eines Kegelschnitts treffen* (*Ann. de Math.* **19**, 3 (1828) = *Werke* I, 184).

§ 17. Eingeschriebene Polygone. Schließungssatz von Poncelet.

Dem S. 236 erwähnten allgemeinen Satze von Braikenridge und Maclaurin entspricht dual folgender von Poncelet bewiesener Satz: *Bewegen sich die n Ecken eines veränderlichen n-Ecks auf n festen Geraden, während sich seine Seiten mit Ausnahme einer einzigen um feste Punkte drehen, so werden von dieser freien Seite und von allen Diagonalen Kegelschnitte umhüllt.* Poncelet ersetzte ferner die n Geraden durch einen einzigen festen Kegelschnitt k und fand, daß alsdann die freie Seite und jede Diagonale je einen Kegelschnitt umhüllt, der k doppelt berührt (*P. p.* Nr. 493—536). Mit Hilfe dieses Satzes löste Poncelet die Aufgabe, einem Kegelschnitt k ein n-Eck einzuschreiben, dessen Seiten in vorgeschriebener Reihenfolge durch n feste Punkte gehen sollen; jeder der vorerwähnten zwei Berührungspunkte von k mit dem von der freien Seite umhüllten Kegelschnitt kann als Anfangsecke des gesuchten Polygons gewählt werden. Zur Konstruktion dieser Punkte gibt Poncelet zwei Wege an (*Ann. de Math.* **8**, 148ff. (1817); *P. p.* Nr. 558—560). Für den Fall, daß k ein Kreis, $n = 3$ ist und die Punkte einer Geraden angehören, hat schon Pappus die Aufgabe gelöst, bei beliebiger Lage der drei Punkte de Castillon, Lagrange, Euler u. a. Für einen Kreis und beliebiges n gaben L'Huilier und Carnot analytische Lösungen, die erste geometrische gab A. Giordano, dann Malfatti. Nähere Literaturangaben, auch zur dual entsprechenden Aufgabe, bei Dingeldey, *Enzykl.* III C 1, S. 45f. und bei M. Simon, *E. d. G.*, S. 105ff.

Die Aufgabe, einem gegebenen Kegelschnitt k_1 ein n-Eck einzuschreiben, dessen n Seiten einem anderen Kegelschnitt k_2 umschrieben sind, hat gleichfalls Poncelet gelöst. *Er fand, daß, wenn sich ein der Kurve eingeschriebener Polygonzug, dessen Seiten* k_2

berühren, nicht schließt, die Aufgabe überhaupt keine Lösung hat. Schließt er sich aber, so gibt es unendlich viele Lösungen, indem man nun mit jedem Punkt von k_1 als Anfangspunkt ein geschlossenes Polygon der gewünschten Art konstruieren kann (*P. p.* Nr. 565 ff.; *A. a. g.* I, 308—367; E. Kötter, *Math.-Ver.* **5**, 149 (1901)). Den Fall zweier *Kreise* behandelt Weill, *J. de Math.* (3) **4**, 265 (1878). Auf die Lösung der Aufgabe in diesem Fall hat übrigens schon Jacobi eine schöne Anwendung der elliptischen Integrale 1. Gattung gemacht (*J. f. Math.* **3**, 381 ff. (1828) = *Werke*, hrsgg. von Borchardt, I, 284; vgl. hierzu auch Richelot, *J. f. Math.* **5**, 250 (1830) und **38**, 353 (1849), sowie die Darstellung bei Durège, *Theorie der elliptischen Funktionen*, 3. Aufl., 1878, 10. Abschn., und bei Fricke, *Kurzgefaßte Vorl. über versch. Gebiete d. höh. Math.*, S. 285, Leipzig 1900.

Zur Lösung des Problems im Fall zweier *beliebigen Kegelschnitte* benutzte auch Cayley die Eigenschaften der elliptischen Integrale 1. Gattung und drückte die Bedingung des Schließens durch die Invarianten von k_1 und k_2 aus (*Phil. Mag.* (4) **6**, 99 und 376 (1853) = *Coll. pap.* II, 87 und 91; *Phil. Mag.* (4) **7**, 339 (1854) = *Coll. pap.* II, 138; *London Trans.* **151**, 225 (1861) = *Coll. pap.* IV, 292). Vgl. ferner Chasles, *G. s.*, Kap. 35; Rosanes und Pasch, *J. f. Math.* **64**, 126 (1865); **70**, 173 (1869); M. Simon, ebenda **81**, 301 (1876); Clifford, *London M. S. Proc.* **7**, 29 und 225 (1876) = *Math. pap.*, S. 205 und 218; Gundelfinger, *J. f. Math.* **83**, 171 (1877); Halphen, *Traité des fonctions elliptiques* II, Kap. 10, Paris 1888.

Poncelet betrachtete auch *veränderliche n-Ecke, die einem Kegelschnitt k eingeschrieben sind, während je eine von $n-1$ Seiten je einen von $n-1$ Kegelschnitten berührt, die mit k demselben Büschel* (vgl. Kap. XII, § 1) *angehören; er zeigte, daß alsdann auch die letzte Seite eine Kurve des Büschels berührt* (*P. p.* Nr. 530 ff.; *A. a. g.* I, 348 ff.). Neuerdings hat Rohn (*Leipz. Ber.* **60**, 94 (1908)) in sehr eleganter Weise das Schließungsproblem behandelt und neue Ergebnisse gewonnen, indem er von einer gewissen, symmetrischen zweizweideutigen Verwandtschaft ausging. Er zeigte u. a., daß bei beliebiger Änderung der Reihenfolge der Kegelschnitte, die von den aufeinanderfolgenden Seiten des n-Ecks berührt werden, immer noch geschlossene n-Ecke existieren, wenn es in der ursprünglichen Reihenfolge solche gab. Auch die algebraische Bedingung des Schließens für die dem Kegelschnitt k_1 eingeschriebenen und k_2 umschriebenen n-Ecke hat Rohn behandelt und für zahlreiche Werte n abgeleitet.

Bezüglich rein geometrischer Behandlung des Schließungsproblems sei noch verwiesen auf Thomae, *Leipz. Ber.* **47**, 352 (1895) und Männchen, *Arch. Math. Phys.* (3) **7**, 226 (1904).

§ 18. Neuere Definitionen der Brennpunkte.

Die Brennpunkte der Kegelschnitte wurden schon in Kap. X, § 3 bis 8 behandelt. Die *synthetische Geometrie* gelangt zu ihnen in anderer Weise, als dort gezeigt wurde. Poncelet definiert die *Brennpunkte als Mittelpunkte solcher Strahlenbüschel, bei denen je zwei nach* § 3 und § 12 *in bezug auf k konjugierte Strahlen zueinander rechtwinklig sind.* Die von einem Brennpunkt F an k gelegten Tangenten sind demnach als Geraden anzusehen, die F mit den imaginären Kreispunkten verbinden. Die von den Strahlenpaaren gebildete Involution ist somit elliptisch, die Brennpunkte müssen daher im Inneren von k liegen, und zwar auf den Achsen, denn der durch F gelegte Durchmesser ist eine Achse, weil er rechtwinklig ist zu allen ihm konjugierten Sehnen. Man findet bei den Mittelpunktskegelschnitten auf jeder Achse ein zum Mittelpunkt symmetrisch gelegenes Brennpunktepaar, das auf der Nebenachse liegende ist allerdings imaginär; bei der Parabel gibt es nur zwei reelle auf der Achse liegende Brennpunkte, einen im Endlichen und einen im Unendlichen (Poncelet, *Ann. de Math.* **8**, 222 (1818); *P. p.* Nr. 470). Aus der Ponceletschen Definition der Brennpunkte folgt, daß sie als Schnittpunkte der von den imaginären Kreispunkten an die Kurve gelegten Tangenten anzusehen sind. Dies wurde von Plücker auf beliebige algebraische Kurven ausgedehnt, *A. E.* II, 64; *J. f. Math.* **10**, 84 (1833) = *Ges. Werke* I, 290f.; vgl. Chasles, *S. c.*, S. 191; Siebeck, *J. f. Math.* **64**, 175 (1865).

Steiner gelangte zu den Brennpunkten, indem er auf einer Achse von k einem beliebigen Punkt P_1 einen Punkt P_2 derart zuordnete, daß sich je zwei durch P_1 und P_2 gehende konjugierte Geraden rechtwinklig schneiden. Die Doppelelemente F_1, F_2 der durch die Punktepaare P_1, P_2 auf der Achse gebildeten „Fokalinvolution" sind die Brennpunkte (Steiner-Schröter § 35). Das durch einen beliebigen Punkt P der Ebene gehende Paar zueinander rechtwinkliger konjugierter Polaren liegt harmonisch zu dem durch P gehenden Tangentenpaar, halbiert also den Winkel der beiden Tangenten, ebenso den Winkel der Strahlen PF_1 und PF_2. Liegt insbesondere P auf der Kurve, so folgt, daß der eine Winkel der beiden Strahlen PF_1 und PF_2 durch die

Tangente, sein Nebenwinkel durch die Normale von P halbiert wird. Damit ist die Identität der Punkte F_1, F_2 mit den Brennpunkten (§ 4, 5 und 7 in Kap. X) bewiesen. Bei der Parabel halbiert der Brennpunkt alle auf der Achse durch zwei rechtwinklige konjugierte Polaren ausgeschnittenen Strecken.

Ein Brennpunkt F und der Schnittpunkt seiner Polare f mit der durch F gehenden Achse bilden ein zu den Scheiteln dieser Achse harmonisch gelegenes Punktepaar; ist daher d der Abstand des Kurvenmittelpunktes von der Geraden f, c sein Abstand von F, a die Länge der Halbachse, so folgt

$$(d + a) : (d - a) = (a + c) : (a - c) \quad \text{oder} \quad a^2 = cd,$$

die Polare f des Brennpunktes ist daher nach dem auf S. 206 gesagten *die zu F gehörige Direktrix.*

§ 19. Normalen der Kegelschnitte.

Eine Konstruktion der Normale eines Kegelschnittpunktes P mit Hilfe der Brennpunkte wurde schon in Kap. X, § 4, 5 und 7 erwähnt. Auf Grund eines Satzes von Frégier läßt sich die Normale von P, wenn der Kegelschnitt gezeichnet vorliegt, mit Hilfe eines rechten Winkels konstruieren. *Dreht sich nämlich ein rechter Winkel um seinen in P befindlichen Scheitel, so geht die Verbindungslinie der zwei anderen Punkte, in denen die Schenkel des Winkels die Kurve außerdem schneiden, durch einen Punkt Q der Normale von P* (*Corresp. éc. pol.* **3**, 394 (1816); *Ann. de Math.* **6**, 229 (1816). Dieser Satz von Frégier ist ein besonderer Fall eines allgemeineren Satzes, den Hesse für Flächen 2. Ordnung bewies (*J. f. Math.* **18**, 110 (1838) = *Ges. Werke*, S. 11). Für Kegelschnitte lautet er: *Legt man durch einen Punkt P eines Kegelschnitts k Parallelen p_1, p_2 zu irgendeinem Paar konjugierter Durchmesser eines anderen Kegelschnitts k', so trifft jedes Paar p_1, p_2 die Kurve k in zwei weiteren Punkten, deren Verbindungslinien durch einen bestimmten Punkt Q gehen.* Ist k' ein Kreis, so hat man den Satz von Frégier.

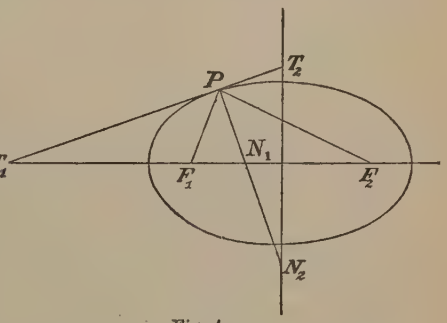


Fig. 4.

Sind T_1, T_2 und N_1, N_2 die Schnitte der Tangente und Normale eines Kegelschnittpunktes P mit den Achsen (Fig. 4), so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke T_1PN_1 und N_2PT_2 die Gleichung $T_1P \cdot PT_2 = N_1P \cdot N_2P$; auch ist dieses Produkt gleich dem Produkt $PF_1 \cdot PF_2$ der beiden Brennstrahlen. Die Projektion der Normale PN_1 auf einen Brennstrahl ist gleich dem halben Parameter, wie schon Keill (*London Trans.* **26**, 177 (1708)) bekannt war. Zahlreiche Sätze über Normalen bei Desboves, *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques*, Paris 1861.

Die von einem Punkt P der Ebene nach einem Kegelschnitt k zu ziehenden Normalen betrachtete schon Apollonius (Buch 5). Er benutzte zur Konstruktion der Normalenfußpunkte eine durch P und den Mittelpunkt von k gehende *gleichseitige Hyperbel*, deren Asymptoten zu den Achsen von k parallel sind (*Apolloniussche Hyperbel*); sie schneidet aus k die vier Fußpunkte aus, von denen mindestens zwei reell sind. Poncelet (*P. p.* Nr. 492) konstruierte diese Hyperbel, indem er von P auf die Tangenten von k Lote fällte; ihre Schnittpunkte mit den zu den Tangentenrichtungen konjugierten Durchmessern sind Punkte der Hyperbel.

Joachimsthal zeigte, daß drei Normalenfußpunkte und der dem vierten diametral gegenüberliegende Kurvenpunkt auf einem Kreis liegen (*J. f. Math.* **26**, 172 (1843)); zu seiner Lösung des Normalenproblems vgl. auch *J. f. Math.* **48**, 377 (1854).

Auch mit Hilfe einer *Parabel* lassen sich die vier von P aus möglichen Normalen konstruieren. Chasles betrachtete nämlich die Enveloppe der in bezug auf den Kegelschnitt k genommenen Polaren aller Punkte der Apolloniusschen Hyperbel und gelangte so zu einer Parabel p; beide Kurven sind also vermöge einer „Transformation durch reziproke Polaren" miteinander verbunden. Die auf k gelegenen Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von k und p sind die vier Normalenfußpunkte. Chasles erzeugt die Parabel p auch dadurch, daß er eine Gerade g um P dreht; die zu g rechtwinklige Gerade, die mit g ein Paar konjugierter Polaren von k bildet, umhüllt die Parabel p (Chasles, *S. c.*, S. 145; *J. de Math.* **3**, 421 (1838)). Auch Steiner fand diese Parabel, bemerkte, daß sie die Achsen von k berührt und daß umgekehrt jede die Achsen von k berührende Parabel mit k vier Tangenten gemeinsam hat, deren Berührungspunkte auf k Fußpunkte von vier durch *einen* Punkt P gehenden Normalen sind (*J. f. Math.* **49**, 339 (1855) = *Werke* II, 629).

Laguerre brachte das Normalenproblem mit der Invariantentheorie binärer Formen in Verbindung (*C. R.* **84**, 181 (1877);

Bull. Soc. M. **5**, 30 (1877)), und auch H. Wiener hat eine rein binäre Lösung des Problems gegeben (*Verh. der Ges. deutscher Naturf., 75. Vers. zu Cassel*, 2. Teil, S. 27, Leipzig (1904)).

Bezüglich spezieller Fälle, die beim Normalenproblem auftreten, sowie näherer Literaturangaben vgl. *Enzykl.* III C 1, (Dingeldey), S. 60ff.

§ 20. Krümmungskreis.

Der einen Kegelschnitt k an einer Stelle P dreipunktig berührende (oskulierende) Kreis k_1, der zu P gehörige *Krümmungskreis*, trifft k noch in *einem* weiteren Punkte S derart, daß die „Krümmungssehne" PS und die Tangente von P gegen die Hauptachse der Kurve unter gleichen Winkeln geneigt sind. Schon Simson benutzte (1735) diese Tatsache zur Konstruktion des Krümmungskreises. Paulus (*Grundlinien der neueren ebenen Geometrie*, S. 242f., Stuttgart 1853) gelangte zur Krümmungssehne, indem er k zum Kreise k_1 in perspektive kollineare Beziehung setzte, bei der P das Kollineationszentrum ist. Dem in § 19 erwähnten Frégierschen Punkte Q entspricht bei dieser Kollineation der Mittelpunkt M_1 von k_1. Die Polare von Q in bezug auf k ist als homologe Gerade zur Polare g_∞ von M_1 in bezug auf k_1 die Fluchtlinie in dem ebenen Felde des Kegelschnitts, die Kollineationsachse verläuft parallel zu ihr durch P. Hiermit ist die Kollineation festgelegt, und es kann nun M_1 als der zu Q homologe Punkt konstruiert werden. Die meisten Konstruktionen von k gründen sich auf die perspektive Beziehung zwischen k und k_1, auch wenn k nicht gezeichnet vorliegt, sondern nur durch gewisse Stücke gegeben ist (näheres hierzu bei C. Cranz, *Th. d. K.*, S. 8ff.). So hat z. B. Fiedler für einen durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt k eine Konstruktion des zu einem dieser Punkte P gehörigen Krümmungskreises k_1 abgeleitet. Für den gleichen Fall hat Rohn unter Zuziehung eines der übrigen in P berührenden Kreise eine sehr einfache Konstruktion von k_1 gegeben (*Leipz. Ber.* **52**, 17 (1900), s. auch Rohn und Papperitz, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 3. Aufl. III, 71 (1906)). Vgl. ferner Weiler, *Zschr. f. Math.* **34**, 1 (1889); Sobotka, *Prag. Ber.*, Jahrg. 1902.

Steiner benutzt den folgenden von ihm gefundenen Satz zu einer Konstruktion des Krümmungskreises: *Ein Kreis, der den Kegelschnitt k in P berührt und den Direktorkreis von k* (§ 13) *rechtwinklig schneidet, hat einen Durchmesser, der so groß wie der Krümmungsradius ϱ von P ist, aber nach der entgegengesetzten Seite*

liegt. Auch gibt Steiner an, wie man bei solchen Hyperbeln zu verfahren hat, deren Direktorkreis imaginär ist (*J. f. Math.* **30**, 271 (1846) = *Werke* II, 341). Bei einer Parabel ist ϱ doppelt so groß wie das Stück der Normale von P bis zum Schnitt mit der Direktrix.

Eine andere Konstruktion lieferte Steiner mit Hilfe einer Parabel. Zunächst zeigte er, daß die Normalen zweier beliebiger Punkte P, P_1 eines Kegelschnitts k, die Sekante PP_1 und die beiden Achsen von k Tangenten einer und derselben Parabel sind. Läßt man nun P_1 nach P rücken, so *geht die Parabel in eine solche über, die die Kegelschnittachsen, sowie Tangente und Normale von P berührt, und zwar die Normale in dem zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt.* Die Direktrix dieser Parabel verbindet alsdann den Mittelpunkt von k mit P, ihr Brennpunkt F ergibt sich als zugehöriger Pol, indem man die Kegelschnittachsen mit der Tangente und Normale schneidet und diese Schnittpunkte unter sich kreuzweise verbindet. Diese Verbindungslinien treffen sich in F. Der Krümmungsmittelpunkt von P wird nun nach Steiner gefunden als der Schnitt der Normale von P mit der in bezug auf diese Steinersche Parabel genommenen Polare von P, die durch das im Brennpunkt F auf PF errichtete Lot gebildet wird (Steiner-Schröter, S. 205; C. Cranz, *Th. d. K.*, S. 21). Pelz erkannte, daß auch die in den Brennpunkten von k auf den Brennstrahlen von P errichteten Lote Tangenten der Steinerschen Parabel sind und gelangte zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes mit Hilfe des für ein Tangentenfünfseit der Parabel spezialisierten Satzes von Brianchon (S. 236); unter den fünf Parabeltangenten muß sich dabei auch die Normale von P befinden (Pelz, *Prag. Ber.*, Jahrg. 1879, S. 205; Cranz, *Th. d. K.*, S. 26 ff.). Fast alle Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes lassen sich, wie Pelz zeigte, auf solche Weise ableiten, z. B. auch folgende schon seit 200 Jahren bekannte Konstruktion: *im Schnittpunkt der Normale n von P mit der Hauptachse errichte man auf n ein Lot, das einen der beiden Brennstrahlen in L treffen möge; das in L auf PL errichtete Lot trifft n im gesuchten Krümmungsmittelpunkte* (vgl. Keill, *London Trans.* **26**, 178 (Jahrg. 1708)). Übrigens ist hiernach, wie man leicht sieht, $\varrho = n : \cos^2\omega$, wo n die Länge der Normale von P bis zum Schnitt mit der Hauptachse, ω den Winkel zwischen Normale und Brennstrahl bedeutet. Ist k eine Parabel, so genügt es, den Brennstrahl von P über den Brennpunkt hinaus um sich selbst zu verlängern bis L; das in L auf dieser Verlängerung errichtete Lot trifft die Normale im Krümmungsmittelpunkt.

Für die Scheitel der Nebenachse einer Ellipse findet man

den Krümmungsradius $\varrho = a^2 : b$, für die Scheitel der Hauptachse ist bei allen Kegelschnitten $\varrho = \frac{1}{2} p = b^2 : a$. Hier sind a und b die Halbachsen, p der Parameter. *Zur Konstruktion dieser Krümmungsradien wird in dem durch die Scheiteltangenten der Kurve gebildeten Rechteck eine Diagonale d gezogen; jedes von den Endpunkten der anderen Diagonale auf d gefällte Lot schneidet die Achsen der Kurve in den Krümmungsmittelpunkten der Scheitel.*

Noch eine einfache Beziehung zwischen ϱ und den Brennstrahlen r_1 und r_2 von P sei erwähnt, nämlich

$$\frac{2}{\varrho \cos \omega} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2},$$

wo das Zeichen + der Ellipse, — der Hyperbel entspricht; ω hat die vorerwähnte Bedeutung. Diese Beziehung ist mit Hilfe der ähnlichen Dreiecke KF_1F_2 und PF_1N in Fig. 2, S. 201 unter Benutzung von $n = \varrho \cos^2 \omega$ leicht abzuleiten.

Ausführliche Literaturangaben über Konstruktionen von ϱ in *Enzykl.* III C 1, Nr. 36ff. (Dingeldey).

§ 21. Krümmungskreise zu verschiedenen Stellen einer Ellipse. Evolute der Kegelschnitte.

Nach Steiner gehen durch jeden Punkt D einer Ellipse drei Krümmungskreise, die die Kurve in drei anderen Punkten A, B, C oskulieren; die vier Punkte A, B, C, D liegen immer auf einem Kreis. Auch haben die Dreiecke ABC gleichen (maximalen) Inhalt, und umgekehrt schneiden sich die Krümmungskreise, die den Ecken eines solchen eingeschriebenen Maximaldreiecks ABC zugehören, in einem Punkt D der Ellipse, der mit A, B, C einem Kreise angehört (Steiner, *J. f. Math.* **32**, 300 (1846) und **66**, 239 (1866) = *Werke* II, 377 und 691). Auch gehören zu vier aus einer Ellipse durch einen Kreis ausgeschnittenen Punkten Krümmungskreise, die die Kurve noch in vier Punkten eines Kreises treffen (Cazamian, *Nouv. Ann.* (3) **13**, 386 (1894)).

Der Ort der Krümmungsmittelpunkte, die *Evolute*, ist für den Mittelpunktskegelschnitt $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Kurve 6. Ordnung:

$$(50) \qquad (ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}, \quad \text{wo} \quad c^2 = a^2 \mp b^2.$$

Sie hat auf jeder Achse des Kegelschnitts zwei Spitzen, außerdem noch je eine in dessen unendlich fernen Punkten.

Die Parabel $y^2 = px$ hat zur Evolute die *Neilsche Parabel*

$$(51) \qquad 27py^2 - 2(2x - p)^3 = 0.$$

Kapitel XII.

Kegelschnittsysteme.

Von *F. Dingeldey* in Darmstadt.

A. Kegelschnittbüschel.

§ 1. Geradenpaare des Büschels. Polardreieck.

Sind

$$f(x,x) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \qquad (a_{ik}=a_{ki}) \tag{1}$$

und

$$g(x,x) \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0 \qquad (b_{ik}=b_{ki}) \tag{2}$$

die Gleichungen zweier Kurven 2. Ordnung, so stellt die Gleichung

$$\lambda g(x,x) - f(x,x) = 0 \tag{3}$$

entsprechend den unendlich vielen Werten des willkürlichen Parameters λ ein ganzes System solcher Kurven (lineares Kegelschnittsystem erster Stufe), ein *Kegelschnittbüschel*, dar, dessen sämtliche Kurven durch die Schnittpunkte von $f(x,x)=0$ und $g(x,x)=0$, die *Grundpunkte* des Büschels, gehen. Die aus den Koeffizienten von (3) gebildete Determinante ergibt, nach Potenzen von λ geordnet, den Ausdruck:

$$C(\lambda) \equiv \lambda^3 B - 3\lambda^2\Theta + 3\lambda\mathsf{H} - A, \tag{4}$$

wo B und A die Diskriminanten von $g(x,x)$ und $f(x,x)$ bedeuten, während

$$3\Theta = a_{11}B_{11} + a_{22}B_{22} + a_{33}B_{33} + 2a_{23}B_{23} + 2a_{31}B_{31} + 2a_{12}B_{12} \tag{5}$$

und

$$3\mathsf{H} = b_{11}A_{11} + b_{22}A_{22} + b_{33}A_{33} + 2b_{23}A_{23} + 2b_{31}A_{31} + 2b_{12}A_{12} \tag{6}$$

zwei „simultane Invarianten“ von $f(x, x)$ und $g(x, x)$ sind. Solange die Diskriminanten B und A von Null verschieden sind, hat die Gleichung $C(\lambda) = 0$ drei von Null verschiedene Wurzeln, *es sind somit drei Geradenpaare im Büschel enthalten.* Im Falle $B = 0$ oder $A = 0$ würde schon $g(x, x) = 0$ bzw. $f(x, x) = 0$ ein solches Geradenpaar darstellen. Da die drei Geradenpaare *vier* Punkte gemeinsam haben, schneiden sich $f(x, x) = 0$ und $g(x, x) = 0$ in *vier* Grundpunkten. In Übereinstimmung hiermit läßt sich λ in (3) linear so bestimmen, daß die Kurve durch einen willkürlich, aber fest gewählten Punkt der Ebene hindurchgeht.

Übrigens bilden auch die Kegelschnitte, die durch k gegebene Punkte gehen ($k = 0, 1, 2, 3$) und $4 - k$ gegebene Punktepaare zu Paaren konjugierter Pole haben, ein Büschel, denn die zur Erfüllung dieser Forderung nötigen vier Bedingungen sind in den Koeffizienten der Gleichung einer Kurve 2. Ordnung linear.

Aus den Betrachtungen am Schlusse von Kap. XI, § 3 folgt, *daß die Doppelpunkte der drei in dem Büschel enthaltenen Geradenpaare ein allen Kurven des Büschels gemeinsames Polardreieck bilden.* Seine Ecken sind reell, wenn das Büschel vier reelle oder vier paarweise konjugiert imaginäre Grundpunkte hat; im Falle von zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten sind zwei Ecken des Polardreiecks imaginär, ihre Verbindungslinie reell. (Näheres z. B. bei Heffter u. Köhler, *A. G.*, S. 330.)

§ 2. Satz von Desargues und Sturm.

Die zu $\lambda g(x, x) - f(x, x) = 0$ gehörige adjungierte Form stellt gleich Null gesetzt die Bedingung dar, unter der eine Kurve des Büschels eine gegebene Gerade $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ berührt. Wie (9) in Kap. XI, § 4 zeigt, ist diese Bedingung in λ vom zweiten Grad, woraus hervorgeht, daß es zwei Büschelkurven k_1, k_2 gibt, die die gestellte Forderung erfüllen. Die Bedingung hat die Gestalt:

$$\lambda^2 G(u, u) - 2\lambda H(u, u) + F(u, u) = 0, \tag{7}$$

wo F und G die adjungierten Formen von f und g bedeuten, während H definiert ist durch

$$\begin{aligned} 2H \equiv\ & (a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22} - 2 a_{23} b_{23})\, u_1^2 + \cdots \\ & + 2\,(a_{31} b_{32} + a_{32} b_{31} - a_{12} b_{33} - a_{33} b_{12})\, u_1 u_2 + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

Die Berührungspunkte P_1 und P_2 von $u_x = 0$ mit den Büschelkurven k_1 und k_2 bilden nun ein harmonisches Polepaar für

k_1 *und* k_2, denn P_2 ist als Punkt einer in P_1 an k_1 gezogenen Tangente harmonischer Pol von P_1 in bezug auf k_1, analog ist P_1 harmonischer Pol von P_2 in bezug auf k_2. Da P_1 und P_2 somit für zwei Büschelkurven ein Polepaar bilden, so gilt dasselbe auch für alle Kurven des Büschels. *Es bilden folglich alle Punktepaare, in denen die beliebige Gerade u von Kegelschnitten des Büschels getroffen wird, eine Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte derjenigen zwei Büschelkurven sind, die die Gerade zur Tangente haben.* Dieser Satz wurde 1639 von Desargues für einen beliebigen Kegelschnitt und die zwei Paare von Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks ausgesprochen (*B. p.* = *Œuvres* I, 188), von Ch. Sturm zur jetzigen Fassung erweitert (*Ann. de Math.* **17**, 180 (1826)).

Der Kegelschnitt $H(u, u) = 0$ *wird von allen Geraden umhüllt, die die Kurven f und g in zwei harmonischen Punktepaaren treffen; er hat auch die acht Geraden zu Tangenten, die die Kegelschnitte f und g in ihren gegenseitigen Schnittpunkten berühren* (v. Staudtsche Kurve oder harmonische Kurve 2. Klasse, vgl. v. Staudt, *Über die Kurve 2. Ordnung*, S. 25, *Progr. Nürnberg*, 1831; *G. d. L.*, S. 169; Gundelfinger, *Vorl.*, S. 144; Heffter und Köhler, *A. G.*, S. 335).

§ 3. Polkegelschnitt einer Geraden.

Die in bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels genommenen Polaren eines beliebigen Punktes P mit den Koordinaten y_1, y_2, y_3 *gehen durch einen und denselben Punkt Q*, denn die Gleichung der Polare von P in bezug auf $\lambda g(x, x) - f(x, x) = 0$ ist in λ linear; *umgekehrt gehen die Polaren von P durch Q* (Poncelet, *P. p.* Nr. 388). Beide Punkte heißen konjugiert in bezug auf die Kurven des Büschels. Durchläuft P eine Gerade $u_y = 0$, so bestehen für Q noch die Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $g(x, y) = 0$ (vgl. S. 215); die Elimination von y_1, y_2, y_3 ergibt:

$$(9) \qquad N \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{wo } f_i = \tfrac{1}{2} f'(x_i),\ g_i = \tfrac{1}{2} g'(x_i),$$

d. h.: *Durchläuft P eine Gerade u, so erfüllen die zu P gehörigen konjugierten Punkte Q einen Kegelschnitt N; dieser ist auch der Ort aller in bezug auf die einzelnen Büschelkurven genommenen Pole der Geraden u (Polkegelschnitt von u),* denn für die Koordinaten x_i

des Pols von u in bezug auf $\lambda g - f = 0$ bestehen die Gleichungen

$$(10) \qquad (\lambda g_1 - f_1) : (\lambda g_2 - f_2) : (\lambda g_3 - f_3) = u_1 : u_2 : u_3,$$

aus denen durch Elimination von λ wieder $N = 0$ hervorgeht (Poncelet, *P. p.* Nr. 396 und 370).

Vermöge der Gleichung (9) wird jeder Geraden u der Ebene ein Kegelschnitt N zugeordnet, und alle diese Kurven N gehen (unabhängig von der Geraden u) durch die Doppelpunkte der drei im Büschel enthaltenen Geradenpaare, die nach § 1 die Ecken eines allen Büschelkurven gemeinsamen Polardreiecks bilden. Die eben erwähnte Zuordnung ist ein Beispiel für eine sog. „quadratische Transformation"; ihre „Fundamentalpunkte" sind die Doppelpunkte. Vgl. Clebsch-Lindemann, *Vorl.*, 1. Aufl. 1876, S. 476.

Der zu einer Geraden u gehörige Kegelschnitt N geht auch noch durch die sechs vierten harmonischen Punkte zu je zwei Grundpunkten des Büschels und zu dem Schnitt ihrer Verbindungslinie mit der Geraden u. So sind neun Punkte von N bekannt, daher wird N vielfach Neun-Punkte-Kegelschnitt genannt, zuweilen auch Elf-Punkte-Kegelschnitt, da N noch durch die zwei Doppelpunkte der von den Büschelkurven auf u ausgeschnittenen Involution geht. Über Ausartungen von N vgl. Heffter u. Köhler, *A. G.*, S. 342.

Ist insbesondere u die Gerade g_∞, so stellt N den Ort für die Mittelpunkte aller Büschelkurven, den *Mittelpunktskegelschnitt* des Büschels dar. Auf ihm liegen die sechs Seitenmitten und die drei Nebenecken des Vierecks der Grundpunkte; seine Asymptoten sind zu den Achsen der zwei im Büschel vorhandenen Parabeln parallel. Durch die Realität dieser Parabeln ist die Art des Mittelpunktskegelschnitts bestimmt (Pfaff, *Monatl. Korresp.* **22**, 226 (1810); Brianchon und Poncelet, *Ann. de Math.* **11**, 219 (1821); Gergonne, ebenda **11**, 396 (1821)).

§ 4. Im Büschel enthaltene Kurvenarten.

Was die Art der im Büschel enthaltenen Kegelschnitte betrifft, so beschränken wir uns auf die Erwähnung der wichtigsten Fälle. Liegen alle Grundpunkte im Endlichen und sind sie voneinander verschieden, so ist das Büschel in einer der näheren Erläuterung nicht bedürfenden Bezeichnungsweise von Heffter und Köhler ein Ellipsen-Hyperbel-Büschel oder ein Hyperbel-Büschel, je nachdem jeder der vier Grundpunkte außerhalb des durch die drei anderen gebildeten Dreiecks liegt oder ein Grundpunkt im Inneren eines solchen Dreiecks liegt. Sind zwei der im Endlichen

gelegenen Grundpunkte reell, die beiden anderen konjugiert imaginär, so hat man ein Hyperbel-Büschel oder ein Ellipsen-Hyperbel-Büschel, je nachdem die reellen Grundpunkte auf verschiedenen Seiten des Trägers der imaginären Grundpunkte liegen oder nicht. Sind alle vier im Endlichen befindlichen Grundpunkte paarweise konjugiert imaginär, so hat man ein Ellipsen-Hyperbel-Büschel.

Bei den Kegelschnittbüscheln, die Ellipsen und Hyperbeln enthalten, wird die Gesamtheit der einen Kurvengattung von der Gesamtheit der anderen durch die zwei schon erwähnten Parabeln getrennt.

Bezüglich spezieller Fälle, die z. B. vorliegen, wenn einige oder sämtliche Grundpunkte zusammenfallen oder im Unendlichen liegen, verweisen wir auf die ausführliche Darstellung bei Heffter und Köhler, *A. G.* I, 317ff. und 387ff. Vgl. ferner Möbius, *B. K.*, § 253f. = *Werke* I, 325ff.; Cayley, *Quart. Journ.* **2**, 206 (1858) = *Coll. pap.* III, 136; Gundelfinger, *Vorl.*, S. 356.

Die Realitätsverhältnisse der Schnittpunkte von $f(x, x) = 0$ und $g(x, x) = 0$ und die Einteilung der Kegelschnittbüschel stehen in enger Beziehung zu der in § 1 erwähnten Gleichung $C(\lambda) = 0$. Näheres bei Sylvester, *Cambr. Dubl. Math. J.* **5**, 262 (1850); **6**, 18 (1851) = *Coll. pap.* I, 119 und 162; Steiner, *J. f. Math.* **55**, 372 (1858) = *Werke* II, 678; Kemmer, *Inaug.-Diss.*, Gießen 1878; Story, *Am. Journ.* **6**, 222 (1884); Gundelfinger, *Vorl.*, S. 133; Johnston, *London M. S. Proc.* (2) **3**, 390 (1905); Heffter und Köhler, a. a. O. Gundelfinger (*Vorl.*, S. 371) gab die Kriterien für die Realität der Grundpunkte und die verschiedenen Fälle der Berührung der Büschelkurven mit Hilfe eines gewissen Kegelschnitts $\psi(x, x) = 0$, der eine Kombinante des Büschels ist, und seiner adjungierten Form $\Psi(u, u)$. Vgl. auch § 6.

Der *Mittelpunktskegelschnitt* ist bei einem gewöhnlichen Hyperbel-Büschel eine Ellipse, bei einem Ellipsen-Hyperbel-Büschel eine Hyperbel, bei der ein Zweig durch die Mittelpunkte der einen Kurvenart, der andere Zweig durch die Mittelpunkte der anderen Kurvenart gebildet wird. Liegt einer der Grundpunkte im Unendlichen, so wird der Mittelpunktskegelschnitt eine Parabel. Vgl. Steiner, *J. f. Math.* **55**, 373 (1858) = *Werke* II, 678; Steiner-Schröter, § 48; Gundelfinger, *Vorl.*, S. 356; Heffter und Köhler, *A. G.* I, 400, daselbst auch näheres über spezielle Fälle und Ausartungen.

Die Art eines durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts bestimmte Möbius (*B. K.* § 255—257 = *Werke* I, 328);

vgl. auch Chasles, *S. c.*, S. 10; Stiner, *Zürich Viertelj. Naturf. Ges.* **40**, 401 (1895).

Ein Kegelschnittbüschel enthält im allgemeinen nur *eine* gleichseitige Hyperbel. Sind aber seine Grundpunkte die Ecken und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks, so bestehen die Geradenpaare des Büschels aus je einer Seite und der zugehörigen Höhe des Dreiecks, die auf g_∞ ausgeschnittene Involution ist dann eine rechtwinklige, alle Büschelkurven sind gleichseitige Hyperbeln, der Mittelpunktskegelschnitt ist der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks. Ebenso bilden die gleichseitigen Hyperbeln, die ein gegebenes Dreieck zum Polardreieck haben, ein Büschel. Seine Grundpunkte sind die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise, der Mittelpunktskegelschnitt ist der Umkreis des Dreiecks (Brianchon und Poncelet, *Ann. de Math.* **11**, 205, 210, 212 (1821)).

Im allgemeinen enthält ein Kegelschnittbüschel keinen Kreis. Sind aber die Achsen der zwei im Büschel befindlichen Parabeln zueinander rechtwinklig, so enthält es einen Kreis und umgekehrt, wie leicht aus dem Desargues-Sturmschen Satze (§ 2) folgt. Der Mittelpunktskegelschnitt ist alsdann eine gleichseitige Hyperbel, und zwar die Apolloniussche Hyperbel des Kreismittelpunktes für alle Büschelkurven (Chasles, *J. de Math.* **3**, 410 (1838)). Diese haben gleichgerichtete Achsen. Da für ein Geradenpaar die Achsen aus den Halbierungslinien seiner Winkel bestehen, folgt, daß von den sechs Halbierungslinien der Winkel der drei Geradenpaare eines Kreisvierecks drei und drei parallel sind zu den Achsen aller dem Viereck umschriebenen Kegelschnitte (Poncelet, *P. p.* Nr. 394; Steiner, *J. f. Math.* **2**, 97 (1827) = *Werke* I, 128; *J. f. Math.* **55**, 359 (1858) = *Werke* II, 665).

Ein Kegelschnittbüschel, das zwei Kreise enthält, besteht überhaupt nur aus Kreisen.

Die Zeichnung der Kegelschnittbüschel behandelt ausführlich Chr. Wiener, *Lehrb. der darstellenden Geometrie* I, 332 und 359, Leipzig 1884.

§ 5. Einige geometrische Örter.

Die *Brennpunkte* der einzelnen Kegelschnitte des Büschels liegen auf einer bizirkularen Kurve sechster Ordnung, die die Ecken und Höhenfußpunkte des dem Büschel gemeinsamen Poldreiecks zu Doppelpunkten hat. Sie zerfällt in zwei Kurven dritter Ordnung, wenn die vier Grundpunkte auf einem Kreis liegen. Näheres bei Faure, *Nouv. Ann.* (1) **20**, 56 (1861); Cayley,

Phil. Mag. **32**, 362 (1866) = *Coll. pap.* VII, 1; Bobek, *Monatsh. f. M.* **3**, 312 (1892); Haller, *Arch. Math. Phys.* (3) **7**, 37 (1904); G. Bauer, *Münch. Ber.* **35**, 97 (1905). Die Brennpunkte der zwei Parabeln des Büschels liegen auf dem Feuerbachschen Kreis des Polardreiecks (Painvin, *Nouv. Ann.* (2) **6**, 443, (1867)). Möbius brachte die vier durch die Grundpunkte bestimmten Dreiecke in Beziehung zu einem Brennpunkt irgendeiner Büschelkurve (*J. f. Math.* **26**, 29 (1843) = *Werke* I, 587).

Die Berührungspunkte der von irgendeinem Punkt P an die Kurven des Büschels gelegten Tangenten liegen auf einer Kurve 3. Ordnung, die durch die Grundpunkte, die Ecken des Polardreiecks, den Punkt P und den zu ihm in bezug auf die Kurven des Büschels konjugierten Punkt Q (S. 248) geht (Cayley, *Educ. Times* **2**, 70 (1864) = *Coll. pap.* V, 578; Greiner, *Arch. Math. Phys.* **69**, 40 (1883)).

Die Enveloppe der in den Schnittpunkten einer Geraden g mit den Büschelkurven gezogenen Tangenten ist eine Kurve 3. Klasse mit drei Spitzen, die die sechs Geraden des Büschels einfach und g doppelt berührt (Sporer, *Zschr. f. M.* **38**, 34 (1893)). Insbesondere ist die Enveloppe der Asymptoten eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln nach Steiner (*J. f. Math.* **53**, 234 (1857) = *Werke* II, 641) identisch mit der Enveloppe der Wallaceschen (Simsonschen) Geraden irgendeines der vier durch die Grundpunkte bestimmten Dreiecke. Es sind dies Geraden, auf denen die drei Fußpunkte der von einem beliebigen Punkt des Umkreises eines Dreiecks auf die drei Seiten gefällten Lote liegen. Die Bemerkung, daß diese Enveloppe identisch ist mit der dreispitzigen Hypozykloide, die von einem Punkt der Peripherie eines Kreises beschrieben wird, wenn dieser in einem Kreise von dreimal größerem Radius rollt, ohne zu gleiten, wird gewöhnlich Schläfli zugeschrieben. Vgl. auch Cremona, *J. f. Math.* **64**, 104 (1865); näheres über diese Kurve und viele Literaturangaben findet man bei M. Roegner, *Jenaer Diss.* 1908.

Die Enveloppe der *Achsen* eines beliebigen Büschels B_1 fällt zusammen mit der Enveloppe der Asymptoten desjenigen Büschels B_2, dessen Grundpunkte aus den Mittelpunkten der Umkreise der vier durch die Grundpunkte von B_1 bestimmten Dreiecke bestehen. Enthält B_1 nur gleichseitige Hyperbeln, so gilt gleiches auch von B_2 (Laguerre, *Nouv. Ann.* (2) **18**, 206 (1879); Bobek, *Monatsh. f. M.* **3**, 310 (1892)).

§ 6. Doppelverhältnis der Grundpunkte.

Die sechs Kegelschnitte des Büschels $\lambda g(x, x) - f(x, x) = 0$, für die das Doppelverhältnis der vier Grundpunkte gleich einer gegebenen Zahl s wird, bestimmte Gundelfinger durch eine Gleichung 6. Grades für λ, bei deren Ableitung die Gleichung $C(\lambda) = 0$ (§ 1) eine wichtige Rolle spielt. Von besonderem Interesse sind die *zwei äquianharmonischen* ($s = \sqrt[3]{-1}$) und die *drei harmonischen Kurven* ($s = -1$) *des Büschels*. Die Enveloppe aller Geraden, die die zwei erstgenannten Kurven in harmonischen Punktepaaren treffen, ist ein Kegelschnitt $\psi(x, x) = 0$, der schon oben (S. 250) erwähnt wurde; von allen Punkten desselben lassen sich an die zwei äquianharmonischen Kurven harmonische Tangentenpaare legen. Diese zwei Kurven bilden zusammen mit ψ ein System von solcher Beschaffenheit, daß die in bezug auf eine der drei Kurven genommenen Polaren von Punkten einer zweiten Kurve die dritte Kurve umhüllen. Die drei harmonischen Kegelschnitte werden von ψ doppelt berührt, und zwar sind die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks des Büschels die Berührungssehnen; auch die zugehörigen drei Tangentenpaare haben eine ausgezeichnete Lage (Gundelfinger, *Zschr. f. M.* **20**, 154 (1874); *Vorl.*, S. 368). Eine allgemeinere Definition des Kegelschnitts $\psi(x, x) = 0$ mit Hilfe der zu $\psi(x, x)$ gehörigen adjungierten Form $\Psi(u, u)$ findet sich in § 15; ich verdanke sie einer mündlichen Mitteilung von Herrn Gundelfinger. Zur Gleichung 6. Grades für die Doppelverhältnisse der vier Verbindungslinien irgendeines Punktes von $f(x, x) = 0$ mit den vier Grundpunkten des Büschels $\lambda g(x, x) - f(x, x) = 0$ sowie für die dual entsprechenden Doppelverhältnisse vgl. Walker, *Quart. Journ.* **10**, 162 und 317 (1870).

B. Kegelschnittscharen und sonstige Kegelschnittsysteme erster Stufe.

§ 7. Dualität zwischen Kegelschnittschar und Kegelschnittbüschel.

Dem Kegelschnittbüschel entspricht dual die *Kegelschnittschar*, die Gesamtheit der vier gegebene Geraden *(Grundtangenten)* berührenden Kegelschnitte, analytisch dargestellt durch

$$\lambda\psi(u, u) - \varphi(u, u) = 0, \tag{11}$$

wobei

$$(12)\quad \varphi(u,u) \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2, \qquad (\alpha_{ik}=\alpha_{ki}),$$

$$(13)\quad \psi(u,u) \equiv \beta_{11}u_1^2 + 2\beta_{12}u_1u_2 + \beta_{22}u_2^2 + 2\beta_{13}u_1u_3 + 2\beta_{23}u_2u_3 + \beta_{33}u_3^2, \qquad (\beta_{ik}=\beta_{ki}).$$

Dual zu den Betrachtungen in § 1 folgt, daß in der Schar drei Punktepaare enthalten sind, deren Träger ein allen Kurven der Schar gemeinsames Polardreiseit bilden. Sind zwei Grundtangenten der Schar reell, die beiden anderen konjugiert imaginär, so sind zwei Seiten dieses Polardreiseits imaginär, ihr Schnittpunkt reell.

Die adjungierte Form von (11) wird

$$(14)\qquad \lambda^2\Psi(x,x) - 2\lambda\chi(x,x) + \Phi(x,x),$$

wobei $\Psi(x,x)$ und $\Phi(x,x)$ die adjungierten Formen von $\psi(u,u)$ und $\varphi(u,u)$ bedeuten und

$$(15)\quad 2\chi(x,x) \equiv (\alpha_{22}\beta_{33} + \alpha_{33}\beta_{22} - 2\alpha_{23}\beta_{23})x_1^2 + \cdots + 2(\alpha_{31}\beta_{32} + \alpha_{32}\beta_{31} - \alpha_{12}\beta_{33} - \alpha_{33}\beta_{12})x_1x_2 + \cdots$$

ist.

Aus (14) geht hervor, *daß zwei Kurven der Schar durch einen beliebig gegebenen Punkt gehen; nur eine Scharkurve berührt eine beliebig gegebene Gerade.*

Die von irgendeinem Punkt an die Kegelschnitte der Schar gelegten Tangenten bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen aus den Tangenten derjenigen zwei Kurven der Schar bestehen, die sich in dem gegebenen Punkte schneiden. Die Kurve $\chi(x,x) = 0$ ist Ort aller Punkte, von denen an $\varphi(u,u) = 0$ und $\psi(u,u) = 0$ harmonische Tangentenpaare gezogen werden können (v. Staudtsche oder harmonische Kurve 2. Ordnung); *sie geht durch die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von φ und ψ.*

Die in bezug auf alle Kegelschnitte der Schar genommenen Pole einer beliebigen Geraden u liegen auf einer zweiten Geraden v, und umgekehrt liegen die Pole von v auf u (Poncelet, *P. p.* Nr. 398), u und v sind konjugiert hinsichtlich der Schar. Die Gerade v hat die Gleichung:

$$(16)\quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{wo} \quad \varphi_i = \tfrac{1}{2}\varphi'(u_i),\ \psi_i = \tfrac{1}{2}\psi'(u_i).$$

Ist u die unendlich ferne Gerade, so folgt, *daß die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schar eine Gerade, die Mittelpunkts-*

gerade, erfüllen, was schon Newton bekannt war (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, Buch 1, Lemma 25, Corol. 3). *Es liegen sonach die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits auf einer Geraden*, wie nach Angabe von Mackay (*Edinburgh M. S. Proc.* **9**, 88 (1891)) zuerst J. T. Connor (*The Ladies' Diary for 1795*) bemerkte. Vgl. auch Gauß, *Monatl. Korresp.* **22**, 115 und 120 (1810) = *Werke* IV, 387 und 391.

Für einen *gegebenen* Punkt x und veränderliche Linienkoordinaten u_i ist (16) die Enveloppe der in bezug auf alle Kurven einer Schar genommenen Polaren von x, der *Polarkegelschnitt* von x, zugleich Enveloppe aller Geraden, die zu den durch x gehenden Geraden hinsichtlich der Schar konjugiert sind. Vgl. auch Poncelet, *Ann. de math.* **12**, 247 (1822); *P. p.* Nr. 399.

§ 8. In der Schar enthaltene Kurvenarten.

Bei Angabe der in einer Schar enthaltenen Kurvenarten beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß die vier Grundtangenten reell sind und im Endlichen liegen. Die Seiten des gemeinsamen Polardreiseits zerlegen die Ebene, von diesem Dreiseit abgesehen, in drei trigonale und drei tetragonale Felder. Diese Bezeichnungsweise von Gundelfinger bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung. Je nachdem nun der Mittelpunkt einer Scharkurve in einem tetragonalen oder in einem trigonalen Felde liegt, ist die Kurve eine Hyperbel oder Ellipse. Da die Mittelpunktsgerade m im vorliegenden Falle nicht in das Innere des Polardreiseits eindringt, enthält die Schar zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln; dem unendlich fernen Punkt von m entspricht eine Parabel, die einzige der Schar, wenn keine Grundtangente mit g_∞ zusammenfällt. Die Schnittpunkte von m mit dem Umkreis des Polardreiseits sind nach Brianchon und Poncelet (*Ann. de Math.* **11**, 210 (1821)) die Mittelpunkte der zwei gleichseitigen Hyperbeln der Schar. Vgl. Steiner, *J. f. Math.* **55**, 374 (1858) = *Werke* II, 680; Steiner-Schröter, § 46, für Scharen mit zwei imaginären Grundtangenten § 50; Gundelfinger, *Vorl.*, S. 359. Bezüglich der verschiedenen Arten von Scharen und der speziellen Fälle sei besonders auf Heffter und Köhler, *A. G.* I, 317 und 404 verwiesen.

Fällt eine der vier Grundtangenten ins Unendliche, so besteht die Kegelschnittschar nur aus Parabeln, die dem Dreiseit Δ der übrigen Grundtangenten eingeschrieben sind; das zugehörige Polardreiseit ist das zu Δ parallel umschriebene Dreiseit.

Die Art der eine beliebig gegebene Gerade berührenden Kurve der Schar, also die Art eines durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitts untersuchte Möbius (*B. K.* § 264 = *Werke* I, 341).

Die Zeichnung der Kegelschnittscharen behandelt ausführlich Chr. Wiener, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* I, 325 und 350, Leipzig 1884.

§ 9. Einige geometrische Örter.

Die Gleichung des Direktorkreises irgendeiner Kurve der Schar $\lambda\psi(u,u) - \varphi(u,u) = 0$ ist nach Kap. XI, § 13 in den Koeffizienten von φ und ψ und in λ linear, die Gesamtheit aller dieser Kreise bildet somit ein Kreisbüschel, aus dessen im Endlichen liegenden Grundpunkten P_1, P_2 man an alle Scharkurven Paare zueinander rechtwinkliger Tangenten ziehen kann. Diese zwei Punkte P_1, P_2 konstruiert man als Schnittpunkte der den *Punktepaaren* der Schar zugehörigen Direktorkreise; die Verbindungslinie P_1P_2 ist die Direktrix der in der Schar befindlichen Parabel.

Die Brennpunkte der Scharkurven liegen auf einer zirkularen Kurve 3. Ordnung, die durch die sechs Ecken des vollständigen Vierseits der Grundtangenten und die Höhenfußpunkte des gemeinsamen Polardreiseits geht (Terquem, *Nouv. Ann.* (1) **4**, 372 (1845); Faure, ebenda (1) **20**, 56 (1861); Cremona, ebenda (2) **3**, 23 (1864); Schröter, *Math. Ann.* **5**, 50 (1872); Durège ebenda 83). Bei einer Parabelschar liegen die Brennpunkte auf g_∞ und auf dem Umkreis des im Endlichen gelegenen Dreiseits der Grundtangenten, in Übereinstimmung mit dem S. 208 erwähnten Satze von Lambert; die zugehörigen Direktricen bilden ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Höhenschnittpunkt des eben erwähnten Dreiseits der Grundtangenten ist (Steiner, *J. f. Math.* **2**, 191 (1827) und *Ann. de Math.* **19**, 59 (1828) = *Werke* I, 134 und 207).

Die Enveloppe der Scheiteltangenten der Parabelschar ist identisch mit der Enveloppe der Wallaceschen Geraden des Dreiseits der Grundtangenten, also nach S. 252 mit einer dreispitzigen Hypozykloide, denn die Scheiteltangente einer Parabel ist nach S. 208 der Ort der Fußpunkte der vom Brennpunkt auf die Kurventangenten gefällten Lote. Ebenso ist die Enveloppe der Achsen eine solche Hypozykloide. Vgl. Cremona, *J. f. Math.* **64**, 110 (1865); P. Serret, *Nouv. Ann.* (2) **9**, 79 (1870); Intrigila, *Giorn. di mat.* **23**, 263 (1885), hier auch nähere Literaturangaben.

Die Berührungspunkte der von einem festen Punkt P an die Kurven einer Kegelschnittschar gelegten Tangenten liegen auf einer durch die sechs Ecken des Vierseits der Grundtangenten gehenden Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt in P (Greiner, *Arch. Math. Phys.* **69**, 33 (1883)). Die Enveloppe der in den Schnittpunkten einer gegebenen Geraden mit den Scharkurven gezogenen Tangenten ist eine Kurve 3. Klasse, die die vier Grundtangenten, die Seiten des gemeinsamen Poldreiseits, die gegebene und die zu ihr hinsichtlich der Schar konjugierte Gerade berührt. Insbesondere umhüllen die Asymptoten der Scharkurven eine Kurve 3. Klasse.

§ 10. Konfokale Kegelschnitte.

Eine der wichtigsten Kegelschnittscharen ist diejenige, deren Grundtangenten durch die vom imaginären Kreispunktepaar J_1, J_2 an irgendeine Kurve $\varphi(u, u) = 0$ der Schar gezogenen Tangenten gebildet werden. Die in der Schar befindlichen Punktepaare bestehen nach Kap. XI, § 18 aus dem reellen und imaginären Brennpunktepaar von $\varphi(u, u) = 0$ sowie aus J_1, J_2. *Es haben somit sämtliche Scharkurven dieselben Brennpunkte, gemeinsamen Mittelpunkt, und ihre Achsen fallen daher aufeinander:* die Kegelschnitte werden als *konfokal* bezeichnet. Man hat drei Arten solcher Scharen zu unterscheiden, deren Gleichungen wir in rechtwinkligen Linienkoordinaten geben:

1. *die Schar konfokaler Ellipsen und Hyperbeln:*

$$(a^2 - \lambda)u^2 + (b^2 - \lambda)v^2 - 1 = 0, \tag{17}$$

2. *die Schar konzentrischer Kreise:*

$$(a^2 - \lambda)\,(u^2 + v^2) - 1 = 0, \tag{18}$$

3. *die Schar konfokaler Parabeln:*

$$pv^2 - u - \lambda(u^2 + v^2) = 0. \tag{19}$$

1. *Konfokale Ellipsen und Hyperbeln.*

Die durch irgendeinen Punkt P der Ebene gehenden zwei Scharkurven schneiden sich in P rechtwinklig, denn die in P gezogenen Tangenten derselben liegen nach S. 254 harmonisch zu allen von P an die Kegelschnitte der Schar gezogenen Tangenten, sind daher auch harmonische Polaren des Kreispunktepaares, also zueinander rechtwinklig (Fig. 1). Den Parameterwerten des Intervalles $-\infty < \lambda < b^2$ entsprechen Ellipsen, dem Intervall $b^2 < \lambda < a^2$ Hyperbeln, imaginäre Kurven erhält man für $a^2 < \lambda$

$< \infty$. Die Werte $\lambda = b^2$, $\lambda = a^2$ liefern das reelle bzw. imaginäre Brennpunktepaar, $\lambda = \pm\infty$ das imaginäre Kreispunktepaar.

In Punktkoordinaten hat die Kurvenschar (17) die Gleichung

$$(20)\quad (b^2-\lambda)x^2 + (a^2-\lambda)y^2 - (a^2-\lambda)(b^2-\lambda) = 0,$$

deren Wurzeln λ für gegebene x, y zwischen $-\infty$ und b^2 bzw. zwischen b^2 und a^2 gelegen sind; *durch irgendeinen Punkt P geht daher eine Ellipse und eine Hyperbel des Systems.*

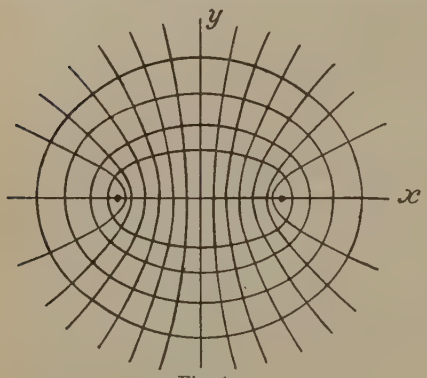


Fig. 1.

Konfokale Ellipsen und Hyperbeln findet man zuerst wohl bei Maclaurin, *A treatise of fluxions,* § 648 (1742); vgl. ferner Binet, *J. éc. pol.* **9**, 57 (1813); *J. de Math.* **2**, 248 (1837); Chasles, *Ann. de Math.* **18**, 269 (1828); Steiner-Schröter, S. 188, 338, 431; Reye, *G. d. L.,* S. 176; Gundelfinger, *Vorl.,* S. 165.

Man kann nach Lamé (*J. de Math.* **2**, 156 (1837)) die Parameter λ_1, λ_2 der zwei durch einen Punkt P gehenden Scharkurven als *elliptische Koordinaten* von P einführen, die allerdings P erst dann eindeutig bestimmen, wenn noch angegeben wird, in welchem Quadranten P liegen soll. Es ist nämlich

$$(21)\quad x^2 = \frac{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)}{a^2-b^2}, \quad y^2 = \frac{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}{b^2-a^2},$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - \lambda_1 + b^2 - \lambda_2$$

(Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* hggb. von Clebsch, S. 207, Berlin 1866; Hesse, *A. G. d. R.,* S. 292; Staude, *Die Fokaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung,* S. 162, Leipzig 1896).

Im Falle $a = b$ geht die Schar konfokaler Ellipsen und Hyperbeln (17) über in die durch

2. *konzentrische Kreise*

gebildete Schar (18). Die Brennpunkte ihrer Kurven sind nun mit dem Mittelpunkt O der Kreise zusammengefallen. Die (imaginären) Asymptoten bestehen aus den Verbindungslinien von O mit dem imaginären Kreispunktepaar J_1, J_2, sind daher allen Kreisen gemeinsam, *so daß konzentrische Kreise auch als solche aufgefaßt*

werden können, die sich in J_1 und J_2 berühren; sie bilden demnach einen speziellen Fall einer Büschelschar (vgl. § 11). Der gemeinsame Mittelpunkt gehört doppelt zählend der Schar als Ausartung an. Vgl. Poncelet, *P. p.* Nr. 131 und 410.

3. Konfokale Parabeln.

Die Parabeln des Systems (19) oder (in Punktkoordinaten) des Systems

$$y^2 - 2(p - \lambda)x + \lambda(p - \lambda) = 0 \tag{22}$$

haben sämtlich die Gerade $y = 0$ zur Achse. Je nach dem Vorzeichen von $p - \lambda$ öffnen sie sich nach entgegengesetzten Seiten, und durch jeden Punkt der Ebene geht eine Kurve von jeder Art (Fig. 2) (vgl. Hesse, *Zschr. f. M.* **19**, 52 (1874); über *parabolische Koordinaten* vgl. Staude, a. a. O., S. 171).

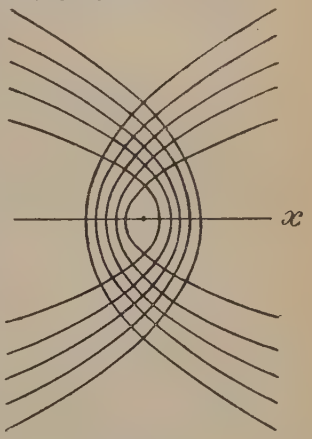


Fig. 2.

Die unendlich nahe benachbarten Kurven der vorstehend erwähnten drei Arten konfokaler Kegelschnittscharen teilen die Ebene in unendlich kleine Quadrate, sie bilden ein Netz von Isothermen. So nennt man mit Rücksicht auf ihre physikalische Bedeutung überhaupt Kurvennetze, die die Ebene in unendlich kleine Quadrate zerlegen. Die isogonalen Trajektorien solcher Kurvennetze bilden wieder ein isothermisches System. Näheres hierüber bei Holzmüller, *Math. Ann.* **18**, 304 (1881), sowie in dessen Werk *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften etc.*, besonders Kap. 8 und 14, Leipzig 1882; vgl. auch Scheffers, *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume*, S. 111 und 124 ff., Leipzig 1901.

Bei konfokalen Kegelschnitten ist die zu einer Geraden g hinsichtlich der Schar konjugierte Gerade rechtwinklig zu g, denn der Pol von g in bezug auf das imaginäre Kreispunktepaar liegt im Unendlichen in einer zu g normalen Richtung. Der zu einem Punkt P gehörige Polarkegelschnitt (vgl. § 7) ist nun eine Parabel, die das gemeinsame Achsenpaar der Scharkurven berührt, denn der Polarkegelschnitt hat die Träger der Punktepaare der Schar zu Tangenten. Ebenso berührt diese Parabel die in P gezogenen Tangenten der zwei durch P gehenden Systemkurven

(Steinersche Parabel von P; Steiner, *J. f. Math.* **49**, 339 (1855) = *Werke* II, 629; Steiner-Schröter, S. 340).

Zahlreiche Sätze über Beziehungen zwischen Kegelschnitten einer konfokalen Schar und einem anderen Kegelschnitt leitet Chasles aus gewissen Haupttheoremen ab; näheres *C. R.* **50**, 626 (1860) = *J. d. Math.* (2) **5**, 429 (1860); vgl. *Enzykl.* III C 1 (Dingeldey), S. 118.

§ 11. Büschelschar einander doppelt berührender Kegelschnitte.

Das System der Kegelschnitte, die sich in zwei Punkten A und B berühren, kann als Büschel und als Schar betrachtet werden (Büschelschar). Wir erwähnen nur folgende Sätze: Die Polaren eines Punktes Q in bezug auf alle Systemkurven gehen durch den auf der gemeinsamen Berührungssehne s gelegenen vierten harmonischen Punkt zu A, B und zu dem Schnittpunkt von s mit QS, wo S den Pol der Sehne s bezeichnet. Die Pole einer Geraden g in bezug auf alle Systemkurven liegen auf s selbst und auf der durch S gehenden vierten harmonischen Geraden zum Tangentenpaare SA, SB und zur Verbindungslinie von S mit dem Schnittpunkte von s und g. Die Mittelpunkte der Systemkurven liegen auf der Verbindungslinie von S mit der Mitte der Berührungssehne s. Die Brennpunkte liegen auf einer zirkularen Kurve 3. Ordnung, die in S einen Doppelpunkt mit rechtwinkligen Tangenten hat (Strophoide, focale à nœud). Die einfachste Gleichung eines Systems sich doppelt berührender Kegelschnitte ist $x_1 x_3 - \lambda x_2^2 = 0$, wo $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten sind, während $x_2 = 0$ die Berührungssehne darstellt. Analog bei Linienkoordinaten. Daß auch ein System konzentrischer Kreise als Büschelschar anzusehen ist, wurde schon in § 10 bemerkt.

Näheres über Büschelscharen bei Gergonne, *Ann. de Math.* **11**, 385 und 400 (1821); Poncelet, ebenda **12**, 248 (1822); Steiner, *J. f. Math.* **45**, 212 (1853) = *Werke* II, 471; Cayley, *Quart. Journ.* **3**, 246 (1860) = *Coll. pap.* IV, 456; Chasles, *S. c.*, Kap. 19; Milinowski, *Progr. Gymn. Tilsit* 1870; Steiner-Schröter, § 52.

§ 12. Sonstige Kegelschnittsysteme.

Für einige andere Systeme kann hier nur das Wichtigste erwähnt werden. Das System $S(3p, 1g)$ der Kegelschnitte, die

durch drei gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade berühren, sendet durch einen beliebigen Punkt der Ebene zwei seiner Kurven, eine beliebige Gerade wird von vier Kurven des Systems berührt; in ihm sind zwei gleichseitige Hyperbeln und drei Geradenpaare enthalten. Auch das System der einem Dreieck umschriebenen Parabeln gehört hierher. Die Mittelpunkte der Kurven erfüllen im allgemeinen Falle eine Kurve 4. Ordnung, die die Seiten des Dreiecks der Grundpunkte in ihren Schnittpunkten mit der gegebenen Geraden berührt und die Seitenmitten dieses Dreiecks zu Doppelpunkten hat.

Literatur: Gergonne, *Ann. de Math.* **11**, 393 (1821); Hearn, *Researches on curves of the second order*, p. 35, London 1846; Cayley, *Quart. Journ.* **6**, 24 (1864) = *Coll. pap.* V, 258; Hoßfeld, *Arch. Math. Physik* **70**, 253 (1884); Zimmermann, *Zschr. f. M.* **29**, 176 (1884); Steiner-Schröter, § 53; Grüninger, *Gießener Diss.* 1903.

Dem System $S(3p, 1g)$ entspricht dual das System $S(3g, 1p)$ von Kegelschnitten, die drei gegebene Geraden berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen. Der Ort der Mittelpunkte ist jetzt ein Kegelschnitt, der die Seiten des dem Dreiseit der Grundtangenten parallel eingeschriebenen Dreiseits berührt. Hierher gehören auch alle Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkt F, die durch einen gegebenen Punkt gehen; ihre Scheitel liegen nach Quetelet (*Bruxelles Nouv. Mém.* **3**, 116 (1826)) auf einer Kardioide, die F zur Spitze hat.

Literatur: Gergonne, *Ann. de Math.* **11**, 385 (1821); Poncelet, ebenda **12**, 111 (1821); Hearn, a. a. O. p. 39; Intrigila und Laudiero, *Giorn. di mat.* **19**, 245 (1881); Tesar, *Wien. Ber.* **84**, 194 (Jahrg. 1881); Steiner-Schröter, § 53; E. Heinemann, *Gießener Diss.* 1907.

Das sich selbst duale System $S(2p, 2g)$ besteht aus zwei verschiedenen Reihen von Kurven, deren Mittelpunkte auf je einen von zwei konzentrischen Kegelschnitten verteilt sind. Näheres bei Brianchon, *Mémoire sur les lignes du second ordre,* p. 20, Paris 1817; Poncelet, *Ann. de Math.* **12**, 233 (1822); Hearn, a. a. O. p. 40; Seydewitz, *Arch. Math. Phys.* **14**, 364 (1850); Cayley, *Quart. Journ.* **8**, 211 (1867) = *Coll. pap.* VI, 43; Steiner-Schröter, S. 347; Haller, *Progr. Münchener Kreisrealsch.* 1908. Auch die Kreise, die zwei gegebene Geraden berühren, gehören hierher, ebenso die durch zwei gegebene Punkte gehenden Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt F. Über die Aufgabe, einen Kegelschnitt mit Hilfe von F und *drei* gegebenen

Kurvenpunkten zu konstruieren vgl. Steiner-Geiser, S. 154, weitere Literatur hierzu in *Enzykl.* III C1 (Dingeldey), S. 128.

Auch bei dem *System der einen Kegelschnitt k doppelt berührenden Kreise* gibt es zwei Reihen von Systemkurven: Die eine Reihe, bei der die Kreismittelpunkte die Hauptachse von k erfüllen, enthält reelle und imaginäre Kurven; die Mittelpunkte der zur zweiten Reihe gehörigen, sämtlich reellen Kreise erfüllen die Nebenachse von k. Jeder dieser letztgenannten Kreise ist auch Ort für die Fußpunkte aller Geraden, die von den Brennpunkten unter demselben beliebigen Winkel nach allen Tangenten von k gezogen werden, ein Satz, der nach Rohn (*Leipz. Ber.* **60**, 2 (1908)) spezieller Fall eines weit allgemeineren Satzes ist.

Literatur: Steiner, *J. f. Math.* **37**, 174 (1848) = *Werke* II, 404, *J. f. Math.* **45**, 189 (1853) = *Werke* II, 447; Niemtschik, *Wien. Ber.* **67**, 298 (1873), **68**, 377 und 505 (1874); W. Fiedler, *Acta Math.* **5**, 331 (1884); Sporer, *Zschr. f. M.* **41**, 210 (1896); Schüßler, *Arch. Math. Phys.* (3) **2**, 1 (1902); Gundelfinger, *Vorl.*, S. 180; Kübel, *Gießener Diss.* 1907.

C. Kegelschnittnetze und Kegelschnittgewebe.

§ 13. Kegelschnittnetze.

Werden die Gleichungen dreier nicht demselben Büschel angehörigen Kurven 2. Ordnung $f(x,x)=0$, $g(x,x)=0$, $h(x,x)=0$ linear verbunden zu einer Gleichung

$$\varkappa f(x,x) + \lambda g(x,x) + \mu h(x,x) = 0, \tag{23}$$

wo $\varkappa$, λ, μ willkürliche Parameter bedeuten, so stellt diese ein System von ∞^2 Kurven 2. Ordnung, ein lineares Kegelschnittsystem 2. Stufe dar, das als *Kegelschnittnetz* bezeichnet wird. Dasselbe enthält unendlich viele Büschel, und irgend zwei dieser Büschel haben stets einen Kegelschnitt gemeinsam.

Sollen sich die Polaren eines Punktes x in bezug auf drei nicht demselben Büschel angehörige Systemkurven in einem und demselben Punkt, der y heißen möge, schneiden, so muß, wie leicht einzusehen, x auf der Kurve 3. Ordnung

$$\sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \tag{24}$$

liegen, die auch durch y hindurchgeht. Zwei so zusammengehörige Punkte x, y heißen *konjugierte* oder *harmonische Pole der Netzkurven. Die Kurve* (24) *ist der Ort der zu drei und damit zu allen*

Netzkurven zugeordneten konjugierten Pole und heißt die Hessesche oder Jacobische Kurve des Netzes (Hesse, *J. f. Math.* **28**, 105 (1844) = *Ges. Werke*, S. 132); Steiner nennt sie die Tripelkurve des Netzes (Steiner-Schröter, S. 469), da sie durch die drei Ecken (Tripel) des gemeinsamen Poldreiecks irgend zweier Netzkurven geht. *Auf der Kurve* (24) *liegen somit die Doppelpunkte aller Geradenpaare des Netzes.* Die Verbindungslinien irgendeines Punktes R_1 der Hesseschen Kurve mit zwei konjugierten Polen P_1, P_2 treffen die Kurve noch in einem weiteren konjugierten Polepaar Q_1, Q_2, und die Geraden P_1Q_2 und P_2Q_1 schneiden sich in dem zu R_1 konjugierten Pole R_2 der Hesseschen Kurve: das durch die Geraden R_1P_1, R_2P_2, P_1Q_2 und P_2Q_1 gebildete Vierseit ist ein Polarvierseit (vgl. Kap. XI, § 7). Die in zwei konjugierten Polen wie P_1 und P_2 gezogenen Tangenten der Hesseschen Kurve schneiden sich auf dieser Kurve in einem Punkt, der zum dritten Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 mit der Kurve konjugiert ist. (Vgl .Kap XVI.)

Die Verbindungslinien konjugierter Pole umhüllen nach Cayley (*J. de Math.* **9**, 290 (1844) = *Coll. pap.* I, 187) *eine Kurve 3. Klasse, die Cayleysche oder Hermitesche Kurve des Netzes;* jede ihrer Tangenten trifft offenbar irgend drei Netzkurven in Punktepaaren einer Involution. *Auch von den im Netz enthaltenen Geradenpaaren wird diese Kurve umhüllt,* und jede ihrer Tangenten gehört einem solchen Paare an.

Näheres über Kegelschnittnetze bei Hesse, *J. f. Math.* **36**, 151 (1848) = *Ges. Werke*, S. 164; Cayley, *London R.S. Trans.* **147**, 423 (Jahrg. 1857) = *Coll. pap.* II, 391; Cremona, *G. Th.*, S. 212; Durège, *Die ebenen Kurven dritter Ordnung*, S. 235, Leipzig 1871; Gundelfinger, *Vorl.*, S. 218; Steiner-Schröter, S. 469; Reye, *G. d. L.*, 4. Aufl., S. 278; Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.*, S. 702.

§ 14. Kegelschnittgewebe.

Dual zu (23) stellt

$$\varkappa\varphi(u,u) + \lambda\chi(u,u) + \mu\psi(u,u) = 0 \tag{25}$$

ein lineares zweistufiges System von ∞^2 Kurven 2. Klasse dar, das man als *Kegelschnittgewebe* oder *Scharschar* bezeichnet. Hier gelten natürlich die dual entsprechenden zu den beim Netz erwähnten Sätzen. *Alle drei beliebigen Kurven des Gewebes harmonisch zugeordneten Polarenpaare umhüllen jetzt eine Kurve 3. Klasse, die Hessesche Kurve des Gewebes; diese hat auch die Träger der im Gewebe befindlichen Punktepaare zu Tangenten, berührt also die Seiten des irgend zwei Kurven des Gewebes gemeinsamen Polardreiseits.*

Die Schnittpunkte der vorerwähnten Polarenpaare erfüllen eine Kurve 3. Ordnung, die Cayleysche oder Hermitesche Kurve des Gewebes; von ihren Punkten lassen sich an irgend drei Kurven des Gewebes Tangentenpaare einer Involution legen. *Alle Punktepaare des Gewebes liegen auf dieser Kurve, und jeder ihrer Punkte gehört einem solchen Paare an.*

Ein wichtiges Gewebe bilden die Kegelschnitte einer Schar zusammen mit ihren konfokalen Kurven. Seine Cayleysche Kurve ist Ort der Brennpunkte der Schar, seine Hessesche Kurve ist Enveloppe der Achsen der Scharkurven (Schröter, *Math. Ann.* **5**, 63 (1872); Gundelfinger, *Vorl.*, S. 404).

Näheres über Kegelschnittgewebe bei Hesse, J. f. Math. **38**, 246 und 252 (1849) = *Ges. Werke*, S. 198 und 205; Cayley, *J. de Math.* **10**, 104 (1845) = *Coll. pap.* I, 191; Gundelfinger, *Vorl.*, S. 226; Reye, *G. d. L.*, 4. Aufl., S. 278.

D. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme in konjugierter Lage.

§ 15. Einzelne Kegelschnitte in konjugierter Lage.

Hesse hat die Frage nach der geometrischen Bedeutung einer linearen Gleichung

$$(26)\quad \beta_{11}a_{11} + 2\beta_{12}a_{12} + \beta_{22}a_{22} + 2\beta_{13}a_{13} + 2\beta_{23}a_{23} + \beta_{33}a_{33} = 0$$

zwischen den Koeffizienten a_{ik} von $f(x,x) = 0$ aufgeworfen. In dieser Gleichung können die β_{ik} als Koeffizienten der Gleichung einer Kurve 2. Klasse betrachtet werden oder für $\beta_{ik} = B_{ik}$ als Koeffizienten der zur Kurve 2. Ordnung

$$(27)\quad \begin{aligned} g(x,x) \equiv\ & b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{13}x_1x_3 \\ & + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0 \end{aligned}$$

gehörigen Gleichung in Linienkoordinaten

$$(28)\quad \begin{aligned} & B_{11}u_1^2 + 2B_{12}u_1u_2 + B_{22}u_2^2 + 3B_{13}u_1u_3 \\ & + 2B_{23}u_2u_3 + B_{33}u_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Für $\beta_{ik} = B_{ik}$ wäre (26) identisch mit $\Theta = 0$, wo -3Θ den Koeffizienten von λ^2 in der früher (§ 1) erwähnten wichtigen kubischen Gleichung $C(\lambda) = 0$ bedeutet. Hesse kam zu dem Ergebnis, *daß bei Erfüllung der Bedingung* (26) *der Kegelschnitt f unendlich vielen Polardreiecken des Kegelschnitts g umschrieben ist* (Hesse, *J. f. Math.* **45**, 83 (1853) = *Ges. Werke*, S. 298; eine andere Ableitung bei Gundelfinger, *Vorl.* S. 162).

Diese Deutung von (26) bildet die Grundlage für Untersuchungen, die voneinander unabhängig Smith, *London M. S. Proc.* **2**, 85 (1868) = *Coll. pap.* I, 524 und Rosanes, *Math. Ann.* **6**, 264 (1873) anstellten, jener zum großen Teil rein geometrisch, dieser mit Hilfe der Symbolik der ternären Formen. Sind die β_{ik} in (26) die Koeffizienten einer ein Punktepaar darstellenden Kurve 2. Klasse, so ist (26) die Bedingung dafür, daß dieses Paar ein harmonisches Polepaar von f darstellt (vgl. (43) in Kap. XI, § 12). Smith nennt, wenn die Gleichung $\Theta = 0$ erfüllt wird, den Kegelschnitt f dem Kegelschnitt g *harmonisch umschrieben*; Rosanes nennt beide Kurven *konjugiert*. Reye (*J. f. Math.* **82**, 1 (1877), *G. d. L.*, 4. Aufl., S. 266) sagt, die Kurve f *stützt* oder *trägt* die Kurve g und umgekehrt *stützt sich* g auf f oder *ruht* g auf f; auch nennt er beide Kurven *apolar*.

Die Seiten der oben erwähnten Polardreiecke berühren den Kegelschnitt $\mathsf{H} = 0$, von dessen Tangenten die Kurven f und g nach § 2 in harmonischen Punktepaaren getroffen werden.

Wenn die Gleichung $\Theta = 0$ *erfüllt wird, können dem Kegelschnitt* g *unendlich viele Polardreiseite von* f *umschrieben werden,* g *ist der Kurve* f *harmonisch eingeschrieben.* Auch die Umkehrung gilt: *Stehen* f *und* g *in einer der vorerwähnten Beziehungen zueinander, so verschwindet* Θ.

Die Frage nach der geometrischen Bedeutung von $\mathsf{H} = 0$, wo $3\mathsf{H}$ den Koeffizienten von λ in der Gleichung 3. Grades $C(\lambda) = 0$ darstellt (vgl. (4) in § 1), ist hiermit gleichfalls erledigt.

Wenn Θ und H verschwinden, sind f und g die zwei äquianharmonischen Kegelschnitte des Büschels $\lambda g(x,x) - f(x,x) = 0$ (vgl. § 6, ferner Gundelfinger, *Zschr. f. M.* **20**, 156 (1874); Ferrers, *Quart. Journ.* **7**, 21 (1866)).

Der schon in § 4 und § 6 erwähnte, zu dem Büschel $\lambda g - f = 0$ gehörige Kegelschnitt $\Psi(u,u) = 0$ ist, wie Gundelfinger bemerkte, harmonisch eingeschrieben den Kurven $f(x,x) = 0$ und $g(x,x) = 0$ (somit allen Kurven des Büschels) und den Polkegelschnitten, die zu drei beliebigen Geraden der Ebene in bezug auf das Büschel $\lambda g - f = 0$ zugeordnet sind.

Bezüglich der einem Kegelschnitt g harmonisch umschriebenen *Kreise* f oder, was sich gleichzeitig hiermit erledigt, der einem Kreis f harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitte g fand Faure, daß die aus dem Mittelpunkt von g an einen Kreis f gezogenen Tangenten gleich dem Radius des Direktorkreises (vgl. Kap. XI, § 13) von g sein müssen. Daher schneidet dieser Kreis alle jene Kreise rechtwinklig, die Polardreiecken von g umschrieben sind (Faure,

Nouv. Ann. **19**, 234 (1860)); Painvin, ebenda 294; Salmon, ebenda 347; Steiner-Schröter, S 178; eine Verallgemeinerung des Satzes von Faure bei Cazamian, *Nouv. Ann.* (3) **13**, 229 und 324 (1894)). Weitere besondere Fälle und Literaturangaben in *Enzykl.* III C1 (Dingeldey), S. 144f.

§ 16. Kegelschnittsysteme in konjugierter Lage.

Es sei ein „Kegelschnittsystem k^{ter} Stufe" gegeben durch

$$(29)\quad \lambda_1 f_1(x,x) + \lambda_2 f_2(x,x) + \cdots + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x,x) = 0 \quad (k=1,2,3,4).$$

Sind die Kurven 2. Ordnung $f_i(x,x) = 0$ dieses Systems einem gegebenen Kegelschnitt $\varphi(u,u) = 0$ harmonisch umschrieben, im übrigen aber voneinander unabhängig, so sind alle Kurven des Systems dem Kegelschnitt φ harmonisch umschrieben. Es gibt überhaupt ein „konjugiertes System $(4-k)^{\text{ter}}$ Stufe"

$$(30)\quad \mu_1 \varphi_1(u,u) + \mu_2 \varphi_2(u,u) + \cdots + \mu_{5-k} \varphi_{5-k}(u,u) = 0,$$

dessen sämtlichen Kurven die Kurven des Systems (29) harmonisch umschrieben sind.

Für $k = 4$ reduziert sich (30) auf einen einzigen Kegelschnitt, dessen Tangenten aus den in (29) befindlichen Doppelgeraden bestehen. Sind die $f_i(x,x) = 0$, $(i=1,2,..5)$, fünf Doppelgeraden $U_i^2 = 0$, die einen Kegelschnitt φ berühren, so steht der Ausdruck $U_6 = 0$ einer sechsten Tangente dieser Kurve mit den U_i in solcher Beziehung, daß man immer Faktoren λ_i $(i=1,2,..6)$ bestimmen kann, die die Summe $\sum_1^6 \lambda_i U_i^2$ identisch zu Null machen. Die im Systeme $\sum_1^5 \lambda_i U_i^2 = 0$ befindlichen Kreise bilden ein Netz, dessen Potenzmittelpunkt im Mittelpunkte von φ liegt, während die Doppelpunkte der zwei zirkularen Geradenpaare, die sich in jedem Kreisbüschel des Netzes befinden (die Grenzpunkte des Büschels) den Direktorkreis von φ (vgl. Kap. XI, § 13) erfüllen (P. Serret, *G. d. d.*, p. 74, 131, 209, 116).

Im Falle $k = 3$ besteht das konjugierte System (30) aus einer Kegelschnittschar, deren vier Grundtangenten durch die Doppelgeraden des Systems (29) gebildet werden. Jede Kurve von (29) läßt sich durch die vier Doppelgeraden linear darstellen (P. Serret, *G. d. d.*, p. 49 und 260; Rosanes, *Math. Ann.* **6**, 307 (1873)). Timerding (*Gött. Nachr.* Jahrg. 1900, 103) deutet die

Koeffizienten in dieser Darstellung als homogene Punktkoordinaten im Raume und bildet hierdurch das System eindeutig auf den Raum ab. Ist (30) eine Schar konfokaler Kegelschnitte, so besteht (29) aus allen gleichseitigen Hyperbeln, denen das Brennpunktepaar der Schar konjugiert ist (Picquet, *É. g.*, p. 128).

Dem Falle $k = 3$ entspricht dual $k = 1$. Hier ist ein Büschel gegeben; das konjugierte System ist dritter Stufe, und die Mittelpunkte der in ihm befindlichen Kreise liegen auf der im Büschel enthaltenen gleichseitigen Hyperbel (Picquet, p. 74).

Im Falle $k = 2$ stellt die Gleichung (29) ein Netz N, (30) ein Gewebe G dar. Zwischen beiden finden viele Beziehungen statt. So ist z. B. die Hessesche Kurve von N identisch mit der Cayleyschen Kurve von G und die Cayleysche Kurve von N identisch mit der Hesseschen von G (vgl. § 13 und § 14). Näheres bei Picquet, p. 96; Gundelfinger, *Vorl.*, S. 228; White, *Am. M. S. Trans.* **1**, 1 und 170; Gordan, ebenda **1**, 9 und 402.

Haben alle Kurven eines Netzes einen und denselben Punkt P gemeinsam, so ist dieser ein Doppelpunkt der Hesseschen Kurve; die Cayleysche Kurve zerfällt in P und einen Kegelschnitt. In dem konjugierten Gewebe ist P als Doppelpunkt enthalten.

Von den Netzen, deren Kurven *zwei* Punkte gemeinsam haben, sei nur das aus Kreisen bestehende Netz erwähnt, bei dem diese zwei Punkte die imaginären Kreispunkte sind. Seine Hessesche Kurve zerfällt in die unendlich ferne Gerade und einen Kreis k, der alle Kreise des Netzes rechtwinklig schneidet (*Orthogonalkreis* des Netzes). Das konjugierte Gewebe besteht aus allen Kegelschnitten, die k zum Direktorkreis haben. Vgl. Picquet, p. 117; Gundelfinger, *Vorl.* S. 389.

Haben alle Kurven eines Kegelschnittnetzes *drei* Punkte P, Q, R gemeinsam, so besteht die Hessesche Kurve aus den Verbindungslinien der drei Punkte, die Cayleysche Kurve aus ihnen selbst. Das konjugierte Gewebe wird durch die Kegelschnitte gebildet, die PQR zum Polardreieck haben.

Bezüglich einer ausführlicheren Darstellung der Eigenschaften der in konjugierter Lage befindlichen Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme sei verwiesen auf Picquet, *É. g.*; Rosanes, *Math. Ann.* **6**, 264 (1873); Clebsch-Lindemann (1. Aufl.), S. 295; W. F. Meyer, *Apolarität und rationale Kurven*, S. 84, Tübingen 1883; Reye, *G. d. L.*, 4. Aufl., S. 264; Gundelfinger, *Vorl.* § 17 und § 25—26; Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.*, Kap. 19, wo überhaupt die Invariantentheorie der Kegelschnitte ausführlich behandelt wird.

Zusammenstellung abkürzender Bezeichnungen, von denen in Kapitel X bis XII Gebrauch gemacht ist.

Apollonius = Apollonius von Perga, *8 Bücher Kegelschnitte*, um 225 v. Chr. Deutsche Bearbeitung von H. Balsam, Berlin 1861. *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis.* Edidit J. L. Heiberg, 2 Bde., Leipzig 1890—1893.

Cantor, *G. d. M.* = M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. I, 2. Aufl., Leipzig 1894; Bd. II, 2. Aufl., Leipzig 1900; Bd. III, 2. Aufl., Leipzig 1901.

Carnot, *G. d. p.* = L. N. M. Carnot, *Géométrie de position*, Paris 1803.

Chasles, *G. s.* = M. Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, Paris 1852; 2. Aufl., Paris 1880.

Chasles, *S. c.* = M. Chasles, *Traité des sections coniques*, Paris 1865.

Clebsch-Lindemann, *Vorl.* = A. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, bearbeitet und herausg. von F. Lindemann, Bd. I, 2. Aufl., Leipzig 1906.

Cranz, *Th. d. K.* = C. Cranz, *Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen 2. Ordnung*, Stuttgart 1886.

Cremona, *G. Th.* = L. Cremona, *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven*, ins Deutsche übertragen von M. Curtze, Greifswald 1865.

De la Hire, *S. c.* = Ph. De la Hire, *Sectiones conicae*, Paris 1685.

Desargues, *B. p.* = G. Desargues, *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres d'un cône avec un plan* (Paris 1639), *Œuvres de Desargues réunies et analysées* par Poudra, Bd. I, Paris 1864.

Enriques, *P. G.* = F. Enriques, *Vorlesungen über projektive Geometrie*, deutsche Ausg. von H. Fleischer, Leipzig 1903.

Gundelfinger, *Vorl.* = S. Gundelfinger, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte*, herausg. von F. Dingeldey, Leipzig 1895.

Heffter und Koehler, *A. G.* = L. Heffter und C. Koehler, *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Bd. I, Leipzig und Berlin 1905.

Hesse, *A. G. d. R.* = O. Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, revidiert und mit Zusätzen versehen von S. Gundelfinger, 3. Aufl., Leipzig 1876.

Möbius, *B. K.* = A. F. Möbius, *Der baryzentrische Kalkul*, Leipzig 1827; auch in Bd. I der *Ges. Werke*, Leipzig 1885.

Picquet, *É. g.* = H. Picquet, *Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques*, Paris 1872.

Plücker, *A. E.* = J. Plücker, *Analytisch - geometrische Entwickelungen*, 3 Bde., Essen 1828—1831.

Poncelet, *P. p.* = J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822; 2. Ausg., 2 Bde., Paris 1865—1866.

Poncelet, *A. a. g.* = J. V. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, 2 Bde., Paris 1862—1864.

Reye, *G. d. L.* = Th. Reye, *Die Geometrie der Lage*, 1. Abt., 5. Aufl., Leipzig 1909.

Salmon-Fiedler, *A. G. d. K.* = W. Fiedler, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, nach G. Salmon deutsch bearbeitet, 1. Teil, 7. Aufl. Leipzig 1907, 2. Teil, 6. Aufl. Leipzig 1903.

Serret, *G. d. d.* = P. Serret, *Géométrie de direction*, Paris 1869.

Simon, *E. d. G.* = M. Simon, *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert*, Leipzig 1906.

v. Staudt, *G. d. L.* = Chr. v. Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg 1847.

Steiner, *S. E.* = J. Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*, Berlin 1832, auch in Bd. I der *Ges. Werke* und in Nr. 82—83 von *Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften.*

Steiner-Geiser = J. Steiner, *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, 1. Teil: *Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung*, bearbeitet von C. F. Geiser, 3. Aufl., Leipzig 1887.

Steiner-Schröter = J. Steiner, *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, 2. Teil: *Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektive Eigenschaften*, bearb. von H. Schröter, 3. Aufl. durchgesehen von R. Sturm, Leipzig 1898.

Kapitel XIII.

Allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Kurven.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

Bibliographische Notizen.

Die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Kurven konnten erst nach der Entdeckung der analytischen Geometrie erforscht werden. R. Descartes, *La Géométrie*, Leyden 1637 (*Œuvres* publiées par Ch. Adam et P. Tannery, Paris 1902, vol. VI, p. 369, deutsch von L. Schlesinger, Berlin 1894) hat zuerst die ebenen Kurven in *algebraische* und *transzendente*, wie er sagt, *geometrische* und *mechanische*, geschieden und die höheren algebraischen Kurven betrachtet. Einige allgemeine Sätze gab Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1676), London 1704, *Opera* ed. Horsley, vol. I, p. 531 (von uns zitiert als *Enumeratio*); ihm verdanken wir die Einteilung der Kurven nach ihrer Ordnung.

Die ersten allgemeinen Lehrbücher der Kurventheorie waren: L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne 1748, vol. II; G. Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève 1750 (zitiert als *Introduction*).

In der Folgezeit war von großer Bedeutung: Plücker, *Theorie der algebraischen Kurven*, Bonn 1839 (zitiert als *Theorie*), worin u. a. die berühmten nach Plücker benannten Formeln enthalten sind.

Neuere Lehrbücher sind: L. Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, *Bologna Mem.* (1) **12**, 305 (1861), dtsch. von M. Curtze, Greifswald 1865 (zitiert als *Introd.*); Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, 2. Aufl., Leipzig 1882 (*Salmon-Fiedler*), franz. Ausgabe mit einer Studie über die singulären Punkte von Halphen,

Paris 1884 (*Étude*); Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. I, Leipzig 1875—76 (*Clebsch-Lindemann*). Das erste dieser Werke geht von geometrischen Gesichtspunkten aus, die anderen haben wesentlich analytischen Charakter.

Elementarer ist das neue Buch: Wieleitner, *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung*, Leipzig 1905.

Im besonderen haben wir die folgenden Werke zu nennen: Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879 (*Kalkül*); F. Klein, *Riemannsche Flächen*, autographiert, 2 Bde., Göttingen 1891—92; Clebsch und Gordan, *Theorie der Abelschen Funktionen*, Leipzig 1866 (*Clebsch-Gordan*); Picard und Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, vol. II, Paris 1900 (*Picard-Simart*); Hensel und Landsberg, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln*, Leipzig 1902 (*Hensel-Landsberg*); Picard, *Traité d'analyse*, 2. éd. vol. II, Paris 1905 (*Traité*); Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa 1907 (*Introd.*); Severi, *Lezioni di geometria algebrica* (lith.), Padova 1908 (*Lezioni*); überdies die folgenden Abhandlungen: Riemann, *J. f. Math.* **54**, 115 (1857), *Werke*, 2. Aufl., S. 100 (*Abelsche Funktionen*); Brill und Nöther, *Math. Ann.* **7**, 269 (1874) (*Brill-Nöther*); E. Kötter, *Grundzüge einer rein geom. Th. d. alg. ebenen Kurven*, Berl. Abh. 1887 (*Preisschrift*); Bertini, *Ann. di mat.* (2) **22**, 1 (1894) (*Geom. serie lin.*); Segre, ibid. p. 41 (*Introd.*).

Darstellungen der historischen Entwicklung gaben: Brill und Nöther, *Math.-Ver.* **3**, 107 (1894); E. Kötter, ibid. **5**, 1 (1901). Man vgl. auch die Artikel der Mathematischen Enzyklopädie, insbesondere: Wirtinger, *Alg. Funktionen*, IIB2, S. 115; Zeuthen, *Abzählende Methoden*, IIIC3, S. 257; Berzolari, *Allgemeine Theorie der höh. eb. alg. Kurven*, IIIC4, S. 313.

§ 1. Algebraische ebene Kurven und ihre reelle Darstellung.

1. *Ebene algebraische Kurven.* Eine ebene algebraische Kurve c_n von der Ordnung n ist der Ort der reellen und imaginären Punkte, deren homogene projektive Koordinaten x_1, x_2, x_3 einer Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ genügen, indem f eine Ternärform der Ordnung n bezeichnet mit konstanten, reellen oder komplexen Koeffizienten.

Liegt die Kurve in einer reellen Ebene, und ist ihre Gleichung auf ein reelles Grunddreieck bezogen, so heißt sie reell

oder imaginär, je nachdem die Koeffizienten von f alle reell sind oder nicht.

Eine Kurve c_n heißt *irreduzibel* oder *reduzibel* (einfach oder zerfallend), je nachden f es ist. Algebraische (invariante) Kriterien für das Zerfallen einer c_n in Gerade bei Junker, *Math. Ann.* **45**, 1 (1894), Brill, *Gött. Nachr.* 1893, S. 757, *Math. Ann.* **50**, 157 (1898), Gordan, *Math. Ann.* **45**, 410 (1894), Hadamard, *Bull. Soc. M.* **27**, 34 (1899).

Die Ordnung n von c_n hängt von der Wahl des Grunddreiecks nicht ab und bezeichnet deshalb einen projektiven Charakter der Kurve: sie bedeutet die Anzahl der Punkte, in denen die Kurve von jeder nicht einen Teil von ihr bildenden Geraden getroffen wird.

2. *Reelle Darstellungen.* Ein reelles Bild von c_n kann man auf mannigfache Weise bekommen. Setzt man z. B. $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ und stellt die Werte von x, y in der Gaußschen Weise durch die Punkte zweier Ebenen dar, so wird durch die Gleichung $F(x, y) = 0$, in die $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ auf diese Weise übergeht, eine mehrdeutige Beziehung zwischen den Punkten der beiden Ebenen hergestellt, und jedes Paar entsprechender Punkte ist hierbei das Bild eines Punktes von c_n. Man kann auch die Punkte von c_n durch die reellen Punkte der x-Ebene darstellen, indem man sich in jedem von diesen die $m\,(\leqq n)$ korrespondierenden Werte von y angebracht denkt. So entsteht eine m-blättrige Riemannsche Fläche, die über der x-Ebene ausgebreitet ist, und deren Punkte die Bilder der Kurvenpunkte sind. Die Fläche ist zusammenhängend, wenn die Kurve einfach ist, und umgekehrt; sie ist symmetrisch, wenn die Kurve reell ist, und umgekehrt (vgl. § 12). Alle Riemannschen Flächen, die zu einer gegebenen algebraischen Kurve gehören, stehen untereinander in eindeutiger reeller konformer Korrespondenz.

Eine algebraische Kurve besitzt demnach ∞^2 Punkte, und von jedem läßt sich auf der Kurve zu jedem anderen auf unendlich vielen Wegen übergehen. Betreffs der angeführten und ähnlicher Darstellungen vgl. man F. Klein, *Riemannsche Flächen;* Segre, *Math. Ann.* **40**, 413 (1892); Busche, *J. f. Math.* **122**, 227 (1900); Juel, *Diss.,* Kopenhagen 1884, und *Math. Ann.* **61**, 77 (1905).

§ 2. Definitionen und elementare Eigenschaften der ebenen algebraischen Kurven.

1. *Mehrfache Punkte.* Da die Anzahl der wesentlichen Koeffizienten in $f = 0$ $\frac{1}{2}n(n+3)$ beträgt, so kann man durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte immer wenigstens eine c_n, die eine einfache Kurve oder zusammengesetzt sein kann, hindurchlegen. Die Punkte lassen sich immer in solcher Lage annehmen, daß durch sie nur eine einzige c_n hindurchgeht: zu dem Zweck genügt es, n Gerade $a_1, a_2, \ldots, a_n$ anzunehmen und von den Punkten 2 in a_1, 3 in a_2 usw. schließlich $n+1$ in a_n zu wählen; eine c_n durch diese $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte besteht notwendigerweise aus den n Geraden $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Sei die Gleichung einer c_n in inhomogenen Koordinaten x, y in der Form gegeben $f_0 + f_1 + \cdots + f_n = 0$, indem f_i eine Binärform i^{ter} Ordnung von x, y bezeichnet; ist dann $f_0 = 0$, während $f_1 \neq 0$ ist, so ist der Ursprung O ein *einfacher* Punkt der Kurve. Die Tangente in O ist $f_1 = 0$, sie berührt die c_n k-punktig in O, wenn f_1 ein Teiler von $f_2, \ldots, f_{k-1}$, aber nicht von f_k ist. Für $k = 3$ sagt man, daß O ein gewöhnlicher *Wendepunkt* ist, für $k > 3$ nennt man ihn einen höheren Wendepunkt, insbesondere für $k = 4$ einen *Undulationspunkt* (point de serpentement nach *Maupertuis, Paris Mém.* 1729, p. 277).

Wenn $f_1, \ldots, f_{s-1}$, aber nicht f_s identisch verschwindet, so sind von den n Schnittpunkten der c_n mit einer allgemeinen Geraden durch O nur $n - s$ von O verschieden. Dann heißt O ein *s-facher Punkt* der Kurve, und die s Geraden $f_s = 0$ seine *Tangenten,* weil von den n Schnittpunkten irgendeiner von ihnen mindestens $s+1$ nach O fallen. Der Punkt O heißt ein *gewöhnlicher s-facher Punkt,* wenn die s Tangenten alle verschieden sind. Irgendeine der Tangenten berührt in O die Kurve $(s+k+1)$-punktig, wenn der zugehörige Linearfaktor von f_s in $f_{s+1}, \ldots, f_{s+k}$, aber nicht in f_{s+k+1} aufgeht.

Insbesondere erhält man für $s = 2$ einen *Doppelpunkt,* und zwar einen *eigentlichen Doppelpunkt* oder *einen Rückkehrpunkt* (eine *Spitze*), je nachdem die beiden Tangenten verschieden sind oder nicht. Wenn bei einer reellen Kurve der Doppelpunkt reell ist, aber die beiden Tangenten konjugiert imaginär, so heißt der Doppelpunkt ein *isolierter* oder *konjugierter* Punkt von c_n.

Der Rückkehrpunkt heißt ein *gewöhnlicher* oder *erster Art,* wenn seine Tangente in O die c_n *dreipunktig* berührt; wenn sie *vierpunktig* berührt, so hat man im allgemeinen einen *Selbstberührungspunkt (tacnode).* Genauer, nimmt man $y = 0$ für die

Tangentengleichung, so hat die Gleichung der Kurve die Form $y^2 + y(ax^2 + bxy + cy^2) + (a'x^4 + \cdots) +$ höhere Glieder $= 0$. Dann ist O ein Selbstberührungspunkt, wenn $a^2 \neq 4a'$; für $a^2 = 4a'$ erhält man im allgemeinen eine *Spitze zweiter Art* oder einen *Schnabelpunkt* (vgl. unten § 10).

Die vorstehende Art, die mehrfachen Punkte zu betrachten, findet sich schon in de Gua de Malves, *Usages de l'analyse de Descartes etc.*, Paris 1740, und ist daraus in alle Lehrbücher übergegangen.

Dieselben Resultate ergeben sich auch in allgemeinerer Form nach der *Joachimsthalschen Methode* aus der Entwicklung der Gleichung $f(\lambda x_i + \mu y_i) = 0$, welche die Schnittpunkte der c_n mit der Verbindungslinie der Punkte x und y liefert: *J. f. Math.* **33**, 371 (1846). Man findet so, daß *ein Punkt y ein s-facher Punkt ist, wenn für seine Koordinaten* y_1, y_2, y_3 *alle Derivierten von f der Ordnung* $s - 1$, *aber nicht alle der Ordnung s verschwinden.*

Die zusammenfassende Gleichung der s Tangenten in y erhält man, indem man den Koeffizienten von $\lambda^s \mu^{n-s}$ in der vorstehenden Entwicklung gleich Null setzt. Insbesondere hat die Tangente in einem einfachen Punkte y die Gleichung

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0.$$

Wenn c_n mehrfache Punkte y besitzt, so hat man

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

aus denen durch Elimination der y_i folgt, daß die *Diskriminante* von f verschwindet, deren Grad in den Koeffizienten von f gleich $3(n-1)^2$ ist.

Eine c_n mit einem n-fachen Punkt zerfällt in n Gerade durch diesen Punkt.

Mac Laurin (*Geom. organica*, London 1720, p. 137) hat bewiesen, daß *eine irreduzible* c_n *höchstens* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *Doppelpunkte, einen s-fachen Punkt für* $\frac{1}{2}s(s-1)$ *Doppelpunkte gerechnet, haben kann.* Diese Höchstzahl kann erreicht werden, und die Kurve ist dann *rational* (s. § 11).

Allgemeiner, wenn c_n sich aus a verschiedenen irreduzibeln Kurven zusammensetzt, so ist

$$\sum \tfrac{1}{2} s_i(s_i - 1) \leqq \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + a - 1,$$

wobei die Summe über alle mehrfachen Punkte von c_n zu er-

strecken ist. Bertini, *Ist. Lomb. Rend.* (2) **21**, 329 (1888) und *Introd.*, p. 375.

2. *Schnitt zweier algebraischen Kurven. Eine c_n und eine c_m ohne gemeinsame Teile schneiden sich in mn Punkten,* wenn jeder gemeinsame Punkt eine geeignete Anzahl Male gerechnet wird *(Bézoutsches Theorem).*

Dieses Theorem wurde durch Induktion von Mac Laurin gefunden, *Geom. organica* 1720, p. 135, und bewiesen von Euler, *Berl. Hist.* **4**, 221, 234 (1748) und Cramer, *Introd.*, p. 76, 660, vollständiger von Bézout, *Paris Mém.* 1764, p. 288, und *Th. gén. des équat. alg.*, Paris 1779. Weitere Beweise gaben: in rationaler Form Noether, *Math. Ann.* **23**, 311 (1884), Gordan, *Vorl. über Invariantentheorie* I, Leipzig 1885, S. 148, mit Hilfe des Korrespondenzprinzips Chasles, *C. R.* **75**, 736 (1872), **76**, 126 (1873) oder *J. de Math.* (2) **18**, 202, 212 (1873).

Um die gemeinsamen Punkte von c_n, c_m zu bestimmen, nimmt man z. B. den Punkt (0, 0, 1) in allgemeiner Lage an und eliminiert x_3 aus den Gleichungen der beiden Kurven. Die einzelnen Schnittpunkte findet man dann, indem man die Linearfaktoren der Resultante $R(x_1, x_2)$ einzeln gleich Null setzt, die Multiplizität des Schnittes in einem gemeinsamen Punkte ist die des zugehörigen Linearfaktors von R.

Haben in einem Punkte A c_m, c_n die Multiplizitäten r, s, so absorbiert A wenigstens rs von ihren Schnittpunkten, und absorbiert nur dann mehr, wenn die Kurven in A eine gemeinsame Tangente haben. Rationale Beweise findet man bei Noether a. a. O. und Voß, *Math. Ann.* **27**, 533 (1886). Die Methode von Voß ist weiter verfolgt worden durch Segre, *Giorn. di Mat.* **36**, 1 (1898), auf welche Arbeit wir für manche Fragen dieses Paragraphen und des § 7 verweisen können.

3. *Kurven als Punktörter und Enveloppen.* Mit Hilfe des Dualitätsprinzips lassen sich die vorstehenden Sätze auf die algebraischen Strahlenenveloppen übertragen, die durch eine Gleichung $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ dargestellt werden, wenn u_1, u_2, u_3 Linienkoordinaten, φ eine Ternärform n^{ter} Ordnung von ihnen und n die *Klasse* der Enveloppe bedeutet. Die zu dem Doppel- und Rückkehrpunkt dualen Singularitäten sind die *Doppel-* und die *Rückkehrtangente.*

Nach der bereits gegebenen Tangentengleichung werden die Koordinaten der Tangente an die Kurve $f = 0$ im Punkte y

$$\varrho u_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \varrho u_2 = \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \varrho u_3 = \frac{\partial f}{\partial y_3}.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen und $u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$

y_1, y_2, y_3 und den Proportionalitätsfaktor ϱ, so erhält man als Resultat eine homogene algebraische Gleichung in den u, der außer den Tangenten der einfachen Kurvenpunkte alle Geraden durch mehrfache Punkte genügen. Dividiert man also die linke Seite der Gleichung durch die Linearfaktoren, welche die Büschel der Strahlen durch die mehrfachen Punkte liefern, jeden in eine Potenz erhoben, deren Exponent der Multiplizität des betreffenden Punktes gleich ist, so erhält man eine algebraische Gleichung $\varphi = 0$, der alle Tangenten der Kurve (einschließlich der Tangenten der vielfachen Punkte) und nur sie genügen. Diese Gleichung heißt die *Klassen-* oder *Tangentengleichung* der Kurve. Aus dem Dualitätsprinzip folgt umgekehrt, daß jede nicht zerfallende algebraische Strahlenenveloppe aus den Tangenten einer algebraischen Kurve besteht.

Für die Bildung der Klassengleichung und die damit verknüpften algebraischen Probleme vgl. Cayley, *J. f. Math.* **34**, 30 (1847) = *Papers* I, 337; Hesse, *J. f. Math.* **40**, 317 (1850) = *Werke*, S. 259; Aronhold, *J. f. Math.* **55**, 185 (1858); Clebsch, *J. f. Math.* **59**, 35 (1860); Clebsch-Lindemann, S. 274; Pasch, *J. f. Math.* **74**, 92 (1872). Die doppelte Auffassung einer Kurve als Ordnungs- und Klassenkurve rührt von Plücker her (*Theorie*, S. 200ff.).

§ 3. Elementare Lehrsätze über lineare Kurvensysteme.

Wenn $f_1 = 0, \ldots, f_{k+1} = 0$ $k+1$ Kurven der Ordnung n darstellen, die linear unabhängig sind, d. h. zwischen denen keine Relation von der Form $\sum_{i=1}^{k+1} a_i f_i = 0$ mit konstanten und nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten a_i besteht, so bestimmen sie ein *lineares System* der *Ordnung* n von der *Stufe* oder *Dimension* k d. h. von ∞^k Kurven. Diesem System gehören alle Kurven von der Gleichungsform $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i = 0$, wo λ_i variable Parameter sind, an.

Für $k = 1$ erhält man ein *Büschel*, für $k = 2$ ein *Netz* (Bündel). Die dual entsprechenden Gebilde hierzu sind die *Schar* und das *Gewebe* oder die *Scharschar*.

Von einem System k^{ter} Stufe geht durch k allgemeine Punkte der Ebene eine einzige Kurve. Dieser Satz ist, bei Ausschluß einzelner Ausnahmefälle, umkehrbar. Vgl. Bertini, *Introduzione,*

p. 222; Severi, *Lezioni,* p. 15; Humbert, *J. de Math.* (4) **10**, 174 (1894), reproduziert in Picard-Simart, p. 56.

Das lineare System, das durch eine gewisse Anzahl von Kurven eines linearen Systems bestimmt wird, gehört ganz dem linearen System an. Linearsysteme der Stufe k' $(k' \leq k)$, die in einem ∞^k-System enthalten sind, gibt es $\infty^{(k-k')\overline{(k'+1)}}$. Sind zwei lineare Systeme gleicher Ordnung von den Dimensionen k, k' gegeben, und ist c die Dimension des kleinsten sie umfassenden Systems, s die Dimension des größten ihnen gemeinsamen Systems, so ist $k + k' = c + s$.

Schneidet man die Kurven eines Systems k^{ter} Stufe n^{ter} Ordnung durch eine gerade Linie, so erhält man eine Involution n^{ten} Grades, deren Dimension $k - h$ ist, wenn die Gerade h linear unabhängigen Kurven des Systems angehört.

Ein s-facher Punkt von $k + 1$ linear unabhängigen Kurven des Systems k^{ter} Stufe ist s-facher Punkt der allgemeinen Kurve des Systems und heißt ein s-facher *Basis-* oder *Fundamentalpunkt.* Die Gruppen der Tangenten in ihm bilden eine Involution s^{ter} Ordnung, deren Stufe nur dann $< k$ ist, wenn einige Kurven des Systems in dem Punkte eine Multiplizität $> s$ besitzen. Die Zahl der Basispunkte ist endlich, wenn sich nicht von allen Kurven des Systems eine feste Kurve ablöst. Sätze über die Basispunkte gaben Döhlemann, *Math. Ann.* **41**, 545 (1893), Guccia, *Rend. Circ. M.* **7**, 193 (1893).

Ein lineares System heißt *irreduzibel* oder *reduzibel*, je nachdem seine allgemeine Kurve es ist. Häufige Verwendung finden die folgenden Sätze von Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **15**, 24 (1882) und *Introduzione,* p. 227; vgl. auch Severi, *Lezioni,* p. 25; Lüroth, *Math. Ann.* **42**, 457 (1893), **44**, 539 (1894): *Wenn jede Kurve des Systems außerhalb der Basispunkte einen s-fachen Punkt besitzt, so ist der Ort dieser Punkte eine Kurve, die $(s-1)$-fach gezählt einen Teil von jeder Kurve des Systems bildet. Deshalb hat die allgemeine Kurve eines irreduzibeln Systems keine beweglichen mehrfachen Punkte.*

Wenn man die Systeme ausschließt, die eine feste Teilkurve besitzen, so zerfällt die allgemeine Kurve eines reduzibeln Systems in eine gewisse Anzahl t irreduzibler Kurven eines und desselben Büschels, die in diesem Büschel eine Involution vom Grade t bilden.

Ein irreduzibles System heißt *einfach,* wenn alle seine Kurven, die außer den Basispunkten einen Punkt gemein haben, keinen anderen gemeinsamen Punkt besitzen. Haben sie außerdem aber eine feste Anzahl $\mu - 1$ von Punkten gemein, so heißt das System

ein *zusammengesetztes.* Im letzteren Falle ist dem System eine *Punktinvolution vom Grade* μ in der Ebene zugeordnet, bei der jeder Punkt der Ebene zu einer und nur zu einer Gruppe von μ Punkten gehört, und eine Systemkurve, die durch einen Punkt einer Gruppe geht, geht durch alle Punkte der Gruppe hindurch. Man sagt deshalb, daß das System *mittels der Involution zusammengesetzt sei,* oder auch, daß es der Involution *angehöre.*

Grad eines linearen Systems heißt die Zahl der variablen Schnittpunkte irgend zweier seiner Kurven. Der Grad ist nur Null, wenn der veränderliche Teil des Systems aus einer oder mehreren Kurven eines Büschels besteht. Für ein irreduzibles System k^{ter} Stufe ist der Grad $D \geqq k-1$. Vgl. Bertini, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **10**[1], 73 (1901); *Introduzione,* p. 232. Ein Netz vom Grade $D > 1$ gehört einer Punktinvolution vom Grade D an (s. oben). Ein Netz vom Grade 1 heißt *homaloidisch;* solche Netze liefern die birationalen Transformationen der Ebene.

§ 4. Polareigenschaften.

Ist $f(x_1, x_2, x_3)$ eine Ternärform n^{ter} Ordnung, so setzt man

$$\Delta_y f = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3\right).$$

Dann ist $\Delta_y f = 0$ die Gleichung der *ersten Polare* des Punktes (y_1, y_2, y_3) bezüglich der Kurve $f = 0$.

In dieser Polarenbildung kann man fortfahren, indem man vom Punkte y wieder die Polare bzw. der ersten Polare nimmt usw. Man erhält dann die zweite, dritte usw., allgemein die r^{te} Polare des Punktes y bzw. der Kurve $f = 0$ dargestellt in der Form

$$\Delta_y^r f = 0.$$

Man kann bzw. dieser wieder die s^{te} Polare eines neuen Punktes z nehmen. Für diese *gemischten Polaren* gilt, entsprechend der Identität

$$\Delta_z^s(\Delta_y^r f) \equiv \Delta_y^r(\Delta_z^s f)$$

der Satz: *Die s^{te} Polare eines Punktes z bzw. der r^{ten} Polare eines Punktes y fällt zusammen mit der r^{ten} Polare von y bzw. der s^{ten} Polare von z* (Plücker).

Ferner liefert die Identität

$$\Delta_y^r f(x) \equiv \Delta_x^{n-r} f(y)$$

den *Satz der Reziprozität: Liegt x auf der r^{ten} Polare von y, so liegt y auf der $(n-r)^{ten}$ Polare von x* (Bobillier).

Die r^{te} Polare eines Punktes y ist der Ort der r^{ten} Polargruppen von y in bezug auf die Gruppe der n Punkte, die eine durch y gehende bewegliche Gerade aus c_n ausschneidet.

Ist y ein s-facher Punkt von $c_n (n \geqq s \geqq 1)$, so sind die Polaren von y, deren Ordnung $< s$ ist, unbestimmt und die übrigen haben in y einen s-fachen Punkt mit denselben Tangenten wie c_n. Umgekehrt ist ein Punkt, der für irgendeine seiner Polaren s-fach ist, auch ein s-facher Punkt von c_n.

Damit ein Punkt y ein s-facher Punkt von c_n sei, ist notwendig und hinreichend, daß seine Polare von der Ordnung $s-1$ unbestimmt wird. Die Tangenten in y werden dann durch die Gleichung $\Delta_y^{n-s} f(x) = 0$ dargestellt.

Ist y s-fach für c_n, so hat die r^{te} Polare eines anderen Punktes z (für $r < s$) in y einen $(s-r)$-fachen Punkt, und ihre Tangenten in y bilden die r^{te} Polare von z (oder der Geraden yz) bezüglich der Gruppe der s Tangenten von c_n in y.

Wenn die r^{te} Polare von y in z einen s-fachen Punkt hat, so hat die Polare der Ordnung $r+s-1$ von z in y ebenfalls einen s-fachen Punkt, und umgekehrt.

Die ersten Polaren der Punkte einer Geraden bilden ein *Büschel,* dessen Basispunkte die $(n-1)^2$ *Pole* (*points polaires* nach Bobillier, *konjugierte Pole* nach Cremona) der Geraden sind.

Die ersten Polaren aller Punkte der Ebene bilden ein *Netz,* das aber für $n > 3$ ein spezialisiertes Netz ist.

Die Theorie der Polaren ist fast gleichzeitig von Bobillier, *Ann. de Math.* **18**, 89, 157, 253 (1828), **19**, 106, 138, 302 (1829) und mit Verwendung homogener Koordinaten von Plücker, *J. f. Math.* **5**, 1 (1830) = *Abhdlgn.* I, 124 entwickelt worden, später von H. Graßmann, *J. f. Math.* **24**, 262, 372 (1842); **25**, 57 (1843) = *Werke* II^1, 3, in rein geometrischer Form von Steiner, *Berl. Ber.* 1848, S. 310 oder *J. f. Math.* **47**, 1 (1854) = *Werke* II, 495 und Cremona, *Introduzione,* Abschn. II. S. auch Clebsch, *J. f. Math.* **58**, 273 (1860). Sätze von anderer Art hat vom Standpunkt der Formentheorie Laguerre 1872—78 gegeben, *J. de Math.* (2) **17**, 1, (3) **1**, 99, 265, (3) **4**, 213; *C. R.* **78**, 744; **80**, 1218; *Bull. Soc. Math.* **3**, 174, alles vereinigt in seinen Werken, Bd. II.

§ 5. Apolarität.

Die Polarentheorie ebener Kurven findet ihre Erweiterung in der *Theorie der Apolarität.*

Eine Kurve n^{ter} Ordnung c_n und eine Kurve n^{ter} Klasse k_n, deren Gleichungen lauten $f = 0$ und $\varphi = 0$, heißen zueinander *konjugiert* (Rosanes), *harmonisch* oder *apolar* (Reye), wenn die bilineare, simultane Invariante von f und φ, die Battaglini als *Harmonizante* bezeichnet, verschwindet. Man sagt auch nach Reye, c_n *stützt* oder *trägt* k_n, und k_n *stützt sich* oder *ruht* auf c_n.

Wenn die k_n zu mehreren Kurven apolar ist, so ist sie apolar zu allen Kurven des durch diese bestimmten linearen Systems. Jedem linearen System von Kurven n^{ter} Klasse wird so ein lineares System von Kurven n^{ter} Ordnung zugeordnet; die Stufenzahlen dieser beiden Systeme ergänzen sich zu $\frac{1}{2}n(n+3)-1$; *jeder Kurve des ersten Systems ist jede Kurve des zweiten Systems konjugiert.* Die beiden Systeme heißen selbst zueinander *konjugiert* oder *apolar.*

Polare einer Kurve m^{ter} Klasse k_m bez. einer Kurve n^{ter} Ordnung c_n $(n > m)$ heißt nach Reye die Kurve $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Punkte bez. c_n zu $(n-m)^{\text{ten}}$ Polaren apolare Kurven von k_m haben. Löst sich k_m in einen oder mehrere einfach oder mehrfach gezählte Punkte auf, so gelangt man zu dem gewöhnlichen Polarenbegriff zurück. Dual entsprechend ist auch die Polare einer Ordnungskurve bez. einer Klassenkurve zu finden.

Eine c_n und eine k_m heißen nach *Reye apolar, wenn die Polare der einen bez. der anderen unbestimmt wird.*

Sind mehrere Kurven derselben Ordnung apolar zu derselben Klassenkurve, so ist zu dieser auch jede Kurve des durch jene Kurven bestimmten linearen Systems apolar.

Eine zerfallende k_m, die als Teil eine apolare Kurve von c_n enthält, ist apolar zu c_n.

Damit ein m-fach gezählter Punkt zu einer c_n apolar sei, ist notwendig und hinreichend, daß der Punkt ein $n-m+1$-facher Punkt von c_n ist.

Die Apolaritätstheorie steht in engem Zusammenhang mit der Darstellung einer Ternärform n^{ter} Ordnung als Summe von n^{ten} Potenzen einer gewissen Anzahl ν von Linearformen. Stellt die Ternärform $= 0$ gesetzt eine c_n dar, so bilden die ν Geraden, die man erhält, indem man die r Linearformen einzeln $= 0$ setzt, ein *polares r-Seit* der c_n.

Ein r-Seit ist polar für eine c_n dann und nur dann, wenn alle ihm einbeschriebenen Kurven n^{ter} Klasse zu c_n apolar sind.

Dann sind auch alle Kurven der Klasse $m < n$, die dem r-Seit einbeschrieben sind, apolar zu c_n.

Nimmt man $n-1$ Punkte willkürlich an und einen n^{ten} Punkt auf der gemischten Polare jener Punkte, so bilden die n Punkte ein *konjugiertes n-Eck* der Grundkurve c_n. Sie sind dann als zerfallende Kurve n^{ter} Klasse aufgefaßt apolar zu c_n.

Ein $(n+1)$-*Eck* ist *konjugiert* zu c_n, wenn je n der $n+1$ Punkte ein konjugiertes n-Eck von c_n bilden. Es gibt ∞^{n+1} konjugierte $(n+1)$-Ecke. *In den* $\frac{n(n+1)}{2}$ *Seiten eines konjugierten* $(n+1)$-*Ecks verschwinden solche Linearformen, durch deren* n^{te} *Potenzen die Gleichung der* c_n *linear ausgedrückt werden kann.* Für $n > 2$ ist dies aber nicht die kleinste Zahl von n^{ten} Potenzen. Vielmehr beträgt diese z. B. für $n = 3$ vier und für $n = 4$ sechs.

Von großer Wichtigkeit für diese Darstellung der Ternärformen ist die Untersuchung solcher Linearformen $l_1, l_2, \ldots, l_r$, zwischen denen identische Relationen von der Form

$$\lambda_1 l_1^n + \lambda_2 l_2^n + \cdots + \lambda_r l_r^n = 0$$

bestehen, wobei $r \leqq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. *Dann berührt jede k_n, die $r-1$ der durch die Linearformen gegebenen Geraden berührt, auch die letzte.*

Ein solches System von r Geraden heißt nach Rosanes ein *abhängiges System.* Man vgl. Serret, *Géom. de direction*, Paris 1869, und Rosanes, *J. f. Math.* **88**, 241 (1879), **90**, 303 (1880), **95**, 247 (1883).

Die Anfänge der verallgemeinerten Polarentheorie finden sich bei Clifford, *Lond. M. S. Proc.* **2**, 116 (1868), *Papers,* p. 115; Battaglini, *Napoli Atti* (1) **4**, 1 (1868), *Giorn. di Mat.* **9**, 152, 193 (1871); Graßmann, *Gött. Nachr.* 1872, S. 567 = *Werke* II^1, 250; *J. f. Math.* **84**, 273 (1878), *Werke* II^1, 283. Die Ausführung der Theorie gaben Rosanes, *J. f. Math.* **76**, 312 (1873) und Reye, *J. f. Math.* **72**, 293 (1870), **77**, 269 (1874), **78**, 97, 114, 123, 345 (1874), **79**, 159 (1875), **82**, 1, 54, 173 (1876). Vgl. Scherrer, *Ann. di Mat.* (2) **10**, 212 (1880), und die algebraische Seite der Theorie betreffend Stephanos, *Paris Sav. étr.* **27** (1881); Brill, *Math. Ann.* **20**, 335 (1882); Lindemann, *Bull. Soc. M.* **5**, 113 (1877), **6**, 195 (1878), *Math. Ann.* **23**, 111 (1884); O. Schlesinger, *Diss. Breslau* 1882, *Math. Ann.* **22**, 520 (1883); W. F. Meyer, ibid. **21**, 528 (1883) und *Apolarität und rationale Kurven,* Tübingen 1883. Für die Theorie der polaren Figuren vgl. noch Caporali, *Rom. Acc. L. Trans.* (3) **1**, 232

(1877) = *Mem. di Geom.*, p. 47; de Paolis, *Rom. Acc. L. Mem.* (4) **3**, 265 (1886); O. Schlesinger, *Math. Ann.* **30**, 453 (1887), **31**, 183 (1888); London, ibid. **36**, 535 (1890); Scorza, ibid. **51**, 154 (1899), *Ann. di Mat.* (3) **2**, 155 (1899).

Über die Darstellung der Ternärformen als Potenzsummen von Linearformen und verwandte Fragen vgl. Palatini, *Torino Atti* **38**, 43 (1902); **41**, 634 (1906); *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{12}^1$, 378 (1903); Hilbert, *J. de Math.* (4) **4**, 249 (1888); Richmond, *Quart. Journ.* **33**, 331 (1902), *Cambr. Phil. Soc. Proc.* **13**, 296 (1906); Lasker, *Math. Ann.* **58**, 434 (1904).

§ 6. Kovariante Kurven.

Sind f_1, f_2, f_3 drei Ternärformen in x_1, x_2, x_3 von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, so stellt die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

die *Jacobische Kurve* J von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 - 3$ der drei Kurven $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ dar. Diese Kurve ist der Ort eines Punktes, dessen letzte (gerade) Polaren bez. der gegebenen drei Kurven durch denselben Punkt gehen, und ebenso der Ort eines Punktes, in dem sich die ersten Polaren desselben Punktes bez. der drei Kurven schneiden. Ein Punkt, der für die letzteren s_1-, s_2-, s_3-fach ist, ist wenigstens $(s_1 + s_2 + s_3 - 2)$-fach für J. Vgl. Cremona, *Introduzione*, Nr. 93ff.; Guccia, *Rend. Circ. M.* **7**, 193 (1893); Gerbaldi, ibid. **8**, 1 (1894).

Haben die drei Kurven dieselbe Ordnung n_1, so ist J durch irgend drei keinem Büschel angehörende Kurven des durch die gegebenen Kurven bestimmten Netzes festlegbar, d. h. eine *Kombinante* des Netzes. In diesem Fall ist J nur dann unbestimmt, wenn das Netz vom Grade Null ist (s. § 3). Vgl. Pasch, *Math. Ann.* **18**, 93 (1881); A. Levi, *Giorn. di Mat.* **34**, 218 (1896); Bertini, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{10}^1$, 73 (1901), *Introduzione*, p. 234. J ist von der Ordnung $3(n_1 - 1)$ und der Ort der Doppelpunkte von Kurven des Netzes, gleichzeitig ist es der Ort aller Punkte, in denen sich zwei und damit unendlich viele Kurven des Netzes berühren, oder der Punkte, deren gerade Polaren bez. aller Kurven des Netzes durch *einen* Punkt gehen. Der Ort S dieses

letzteren Punktes ist die *Steinersche Kurve* des Netzes, die von der Ordnung $3(n_1-1)^2$ ist. Die Kurven J und S sind wechselweise eindeutig aufeinander bezogen; die Geraden, die entsprechende Punkte verbinden, umhüllen eine Kurve $3n_1(n_1-1)^{\text{ter}}$ Klasse, die *Cayleysche Kurve* des Netzes.

Hat das Netz einen s-fachen Basispunkt ($s>1$), in dem die Tangenten eine Involution 2. Stufe vom Grade s bilden, so hat J in ihm die Multiplizität $3s-1$ (Cremona).

Über die kovarianten Kurven eines Netzes vgl. man noch E. Kötter, *Math. Ann.* **34**, 123 (1889); Doehlemann, ebenda **41**, 545 (1893); Ch. A. Scott, *Quart. Journ.* **29**, 329 (1898), **32**, 209 (1900).

Nimmt man insbesondere für das Kurvennetz das Netz der ersten Polaren einer c_n, setzt demnach

$$f_1=\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad f_2=\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad f_3=\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

so werden die drei erörterten Kurven kovariante Kurven *einer* Grundkurve $f=0$. Statt Jacobische Kurve sagt man dann *Hessesche Kurve*. Diese ist auch der Ort der Punkte, deren konische Polaren (Polarkegelschnitte) in zwei Gerade zerfallen, und der Ort der Schnittpunkte dieser Geraden ist die Steinersche Kurve. Zwei korrespondierende Punkte x, y der beiden Kurven genügen den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_1}y_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_2}y_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_3}y_3=0\qquad (i=1,2,3),$$

aus denen durch Elimination der y_i bezw. x_i die Gleichungen der Hesseschen und der Steinerschen Kurve hervorgehen; die erstere ist $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}\right|=0$.

Für $n=3$ fallen Hessesche Kurve und Steinersche Kurve zusammen.

Die Gleichung der Hesseschen Kurve ist dann und nur dann identisch erfüllt, wenn c_n in n Gerade eines Büschels zerfällt (Hesse, *J. f. Math.* **42**, 117 (1851), **56**, 263 (1859) = *Abhdlgn.* S. 289, 481; vgl. auch Gordan und Noether, *Math. Ann.* **10**, 547 (1876)).

Für eine von singulären Punkten freie Grundkurve sind die charakteristischen Zahlen der drei kovarianten Kurven folgende, wenn wir nennen N die Ordnung, N' die Klasse, D die Zahl der Doppelpunkte, R die der Rückkehrpunkte, D' die Zahl der Doppeltangenten, R' die der Wendetangenten:

	Hessesche Kurve	Steinersche Kurve
N	$3(n-2)$	$3(n-2)^2$
N'	$3(n-2)(3n-7)$	$3(n-1)(n-2)$
D	0	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$
D'	$\frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$
R	0	$12(n-2)(n-3)$
R'	$9(n-2)(3n-8)$	$3(n-2)(4n-9)$

	Cayleysche Kurve
N	$3(n-2)(5n-11)$
N'	$3(n-1)(n-2)$
D	$\frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$
D'	$\frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$
R	$18(n-2)(2n-5)$
R'	0

Auf diese Zahlen beziehen sich viele Sätze über Polaren. So gibt es $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ erste Polaren mit zwei Doppelpunkten und $12(n-2)(n-3)$ erste Polaren mit Rückkehrpunkt. Ihre Pole sind die Doppel- und Rückkehrpunkte der Steinerschen Kurve.

In einem s-fachen Punkte A von c_n $(s<n)$ besitzt die Hessesche Kurve mindestens die Multiplizität $3s-4$, und hat zu Tangenten die s Tangenten von c_n und außerdem die $2(s-2)$ Geraden, die im Büschel der Strahlen durch A die Hessesche Gruppe jener s Tangenten bilden. Vgl. Brill, *Math. Ann.* **13**, 175 (1878).

Die Hessesche und Cayleysche Kurve haben ihre Namen nach ihren Entdeckern erhalten: Hesse (*J. f. Math.* **28**, 68 (1844), *Abhdlgn.*, S. 89) und Cayley (*J. de Math.* (1) **9**, 285 (1844), *Phil. Trans.* **147**, 415 (1857), *Papers* I, 183, II, 381). Die Grundeigenschaften aller drei Kurven fand Steiner (a. a. O. § 3, *Werke* II, 495), der die Hessesche und Cayleysche Kurve als *konjugierte Kernkurven* bezeichnete. Geometrische Beweise gab Cremona (*Introduzione*), analytische Clebsch (*J. f. Math.* **59**, 125 (1861), **64**, 288 (1865)). Andere Arbeiten rühren her von Voss, *Math. Ann.* **30**, 418 (1887); E. Kötter, ebenda **34**, 123 (1889); Wölffing, ebenda **36**, 97 (1890); Segre, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) $\mathbf{4^2}$, 143 (1895). Daß die Hessesche Kurve einer singularitätenfreien

c_n keine mehrfachen Punkte besitzt, bewiesen del Pezzo, *Napoli Rend.* **22**, 203 (1883), E. C. Valentiner, *Tidsskr. f. Math.* (5) **6**, 48 (1888). Sätze über die Cayleysche Kurve gab Laguerre in den § 4 zitierten Arbeiten.

Cayley (*J. f. Math.* **34**, 30 (1847), *Papers* I, 337) fand, daß die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer c_n ihr vollständiger Schnitt mit einer kovarianten Kurve $(n-2)(n^2-9)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, die er *Bitangentialkurve* nannte und deren Gleichung er finden lehrte. Vgl. auch Hesse, *J. f. Math.* **36**, 155, **40**, 260, **41**, 291, **52**, 97 (1848—55), *Ges. Werke*, S. 168, 260, 287, 405; Jacobi, *J. f. Math.* **40**, 237 (1850), *Werke* III, 519; Clebsch, *J. f. Math.* **59**, 35 (1861); Salmon, *Phil. Mag.* (4) **16**, 318 (1858), *Quart. Journ.* **3**, 317 (1859); Cayley, *Phil. Trans.* **149**, 193 (1859), **151**, 357 (1861), *Papers* IV, 186, 342; Dersch, *Math. Ann.* **7**, 497 (1874) und die Darstellung bei Salmon-Fiedler, S. 432.

§ 7. Die Plückerschen Formeln.

Die erste Polare eines Punktes P bez. einer c_n geht durch die Berührungspunkte der Tangenten hindurch, die man von P an die Kurve legen kann. Die Zahl dieser Tangenten heißt die *Klasse* der Kurve. So ergibt sich, daß *die Klasse einer singularitätenfreien c_n gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer der ersten Polaren, mithin $= n(n-1)$ ist.* Dieser Satz findet sich schon in dem anonymen, du Séjour und Goudin zugeschriebenen *Traité des courbes algébr.* Paris 1756, p. 88 und wurde von Poncelet, *Ann. de Math.* **8**, 213 (1818), neuentdeckt.

Ein s-facher Punkt A mit getrennt liegenden Tangenten erniedrigt die Klasse der Kurve um $s(s-1)$; sind nur λ der s Tangenten verschieden und haben sie in A je $s+1$ zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein, so erniedrigt sich die Klasse um $s^2-\lambda$.

Ist W ein Wendepunkt von c_n, so zerfällt seine konische Polare in zwei Gerade, von denen eine die Wendetangente in W ist und die andere nicht durch W hindurchgeht. *Deshalb liegt W auf der Hesseschen Kurve.* Umgekehrt ist jeder einfache Schnittpunkt der Grundkurve mit der Hesseschen Kurve ein Wendepunkt der ersteren. Wenn c_n keine mehrfach gezählten Stücke und keine geraden Bestandteile hat, und nur dann, besitzt c_n mit ihrer Hesseschen Kurve keine gemeinsamen Stücke und die beiden Kurven schneiden sich in $3n(n-2)$ Punkten, nämlich in den Wendepunkten und mehrfachen Punkten von c_n. *Dies ist also für eine singularitätenfreie Kurve die Zahl der Wendepunkte.*

Berührt eine Tangente die c_n in einem einfachen Punkte $(\sigma+1)$punktig $(\sigma>1)$, so fallen $\sigma-1$ Schnittpunkte mit der Hesseschen Kurve in diesen Punkt, d. h. es fallen dorthin $\sigma-1$ gewöhnliche Wendepunkte. Ein s-facher Punkt von c_n absorbiert mindestens $3s(s-1)$ Wendepunkte, er absorbiert nur dann mehr, wenn entweder die s Tangenten in ihm nicht alle verschieden sind oder eine von ihnen mehr als $s+1$ zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat.

Insbesondere erniedrigt ein Doppelpunkt die Klasse um 2, die Zahl der Wendepunkte um 6, ein Rückkehrpunkt diese Zahlen um 3 und 8 Einheiten. Besitzt eine Kurve n^{ter} Ordnung n'^{ter} Klasse keine anderen Singularitäten als d gewöhnliche Doppelpunkte, r Rückkehrpunkte, d' Doppeltangenten und r' Wendepunkte, so ergeben sich die *Plückerschen Formeln*, von denen eine eine Folge der übrigen drei ist:

$$(1)\qquad \begin{cases} n' = n(n-1) - 2d - 3r, \\ r' = 3n(n-2) - 6d - 8r, \\ n = n'(n'-1) - 2d' - 3r', \\ r = 3n'(n'-2) - 6d' - 8r'. \end{cases}$$

Die beiden letzten stehen den beiden ersten dualistisch gegenüber. Man kann aus den vier Formeln auch die dualistisch sich selbst entsprechenden Gleichungen ableiten:

$$(2)\qquad r-r' = 3(n-n'), \quad d-d' = \tfrac{1}{2}(n-n')(n+n'-9).$$

Aus drei der 6 charakteristischen Zahlen lassen sich die übrigen finden. Sind z. B. n, d, r bekannt, so findet man n', r' aus den beiden ersten Gleichungen (1) und

$$d' = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2d+3r)(n^2-n-6) + 2d(d-1) + \tfrac{9}{2}r(r-1) + 6dr.$$

Die Formeln (1) gab Plücker im *J. f. Math.* **12**, 105 (1834), *Abhdlgn.* I, 298, ohne Beweis. Ausführlich entwickelte er sie in seiner *Theorie*, S. 200 ff. Andere Beweise gaben Cayley, *J. f. Math.* **34**, 30 (1847), *Papers* I, 337, vgl. auch V, 162, 416 (aus *J. f. Math.* **63**, **64**); Cremona, *Introd.*, Art. 16; Zeuthen, *Nouv. Ann.* (2) **6**, 200 (1867); Beck, *Math. Ann.* **14**, 207 (1879), *Zürich Vierteljahrsschr.* **30**, 173 (1889) u. a. m. Daß die Wendepunkte den völligen Schnitt mit einer kovarianten Kurve bilden, entdeckte Hesse, *J. f. Math.* **28**, 104 (1844) = *Abhdlgn.*, S. 131.

Setzen wir mit Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 192 (1864), **64**, 98 (1865),

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r, \tag{3}$$

so folgt aus (2), daß auch

$$p = \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - d' - r' \tag{4}$$

ist, so daß die Zahl p sich dualistisch selbst entspricht. Sie heißt das *Geschlecht* der Kurve (s. § 11). Bei Einführung von p kann man den Formeln (1) die Gestalt geben:

$$\begin{aligned} 2p - 2 &= n(n-3) - 2d - 2r = r + n' - 2n \\ &= n'(n'-3) - 2d' - 2r' = r' + n - 2n'. \end{aligned} \tag{5}$$

§ 8. Erzeugung algebraischer Kurven. Rein geometrische Untersuchungen.

Nach der sehr speziellen *organischen Kurvenerzeugung* Newtons (Newton, *Enumeratio* 1704, Mac Laurin, *Geom. organica* 1720, Braikenridge, *Exercitatio geometrica*, London 1733), ist die erste allgemeine Methode die von Steiner angegebene Erzeugung einer Kurve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung als Ort für die Schnittpunkte entsprechender Kurven zweier projektiven Büschel von den Ordnungen m und n (*J. f. Math.* **47**, 1 (1854), **49**, 334 (1855), *Werke* II, 495, 624), weiter ausgeführt von H. Graßmann, *J. f. Math.* **42**, 193, 204 (1851), *Werke* II^1, 86, 99; Chasles *C. R.* **36**, 943 (1853), **37**, 272, 372, 437 (1853), **41**, 1102, 1190 (1855); **45**, 393, 1061 (1857); *J. de Math.* (1) **19**, 366 (1854) und de Jonquières, *Paris Sav. Étr.* (2) **16**, 159 (1858). Das auf einfachen Abzählungen beruhende Beweisverfahren der letzteren Autoren genügt aber nicht, um die Allgemeinheit der so gewonnenen Kurven nachzuweisen, und ist erst von Bobek, *Math. Ann.* **25**, 448 (1885) und Küpper, ebenda **32**, 282 (1888), **48**, 401 (1897) richtig gestellt worden.

Die Kurvenkonstruktion mittels *reziproker* linearer Kurvensysteme, zwischen deren Parametern eine bilineare Relation besteht, hat v. Escherich behandelt, *Wien. Ber.* **75**, 523 (1877), **85**, 526, 893 (1882), **90**, 1036 (1885).

Eine andere Erzeugungsart algebraischer Kurven, durch einen linearen Mechanismus, rührt von H. Graßmann her (zuerst in der *„Ausdehnungslehre"* 1844, § 145—8, *Werke* I^1, unabhängig davon *J. f. Math.* **31**, 111 (1846), **42**, 187 (1851), *Werke* II^1, 49, 80). Wenn die Bewegung eines Punktes x in einer Ebene der-

art zwangläufig gemacht wird, daß ein Punkt und eine Gerade, die durch lineare Konstruktionen aus x und einem System von festen Punkten und Geraden hergeleitet sind, miteinander inzident sind, so beschreibt x eine algebraische Kurve von der Ordnung n, wenn x bei diesen Konstruktionen n-mal verwendet worden ist. Umgekehrt kann jede Kurve so erzeugt werden.

Allgemeiner kann jede c_n als Ort eines Punktes angesehen werden, in dem n homologe Strahlen aus n in n-linearer Beziehung stehenden Büscheln sich schneiden. Die Mittelpunkte der Büschel sind dabei irgendwelche Punkte der Kurve (E. Kötter, *Preisschrift*, § 173ff.).

Mit der Graßmannschen Erzeugungsart in gewisser Weise verwandt ist die Erzeugung einer algebraischen Kurve mit Hilfe eines Gelenksystems. Daß man so jede algebraische Kurve erzeugen kann, bewies Kempe, *Lond. M. S. Proc.* **7**, 213 (1876) und *How to draw a straight line*, London 1877, p. 33ff. Vgl. auch Königs, *Leçons de Cinématique*, Paris 1897, Chap. 11.

Das Problem der Erzeugung der algebraischen Kurven führt von selbst auf das andere, die Theorie dieser Kurven auf rein geometrischem Wege zu entwickeln.

Cremona (*Introduzione*) hatte die geometrische Behandlung der Polarentheorie einer beliebigen c_n auf algebraische Prinzipien gegründet, indem er von einfachen Streckenrelationen ausging, und darauf rein geometrische Ausführungen gegründet. In streng geometrischer Weise hat zuerst Thieme, *Ztschr. f. M.* **24**, 221, 276 (1878), *Math. Ann.* **20**, 144, (1882), **28**, 133 (1887), das System der ersten Polaren einer c_{n+1} konstruiert, indem er die gleiche Konstruktion für die c_n als schon ausgeführt ansah. Zu diesem Zweck bezog er die Punkte der Ebene projektiv auf die Kurven eines Netzes von der Ordnung n derart, daß die durch das Theorem der gemischten Polaren geforderte Bedingung erfüllt ist. So gewann er auch eine rein geometrische Definition einer Kurve und des durch mehrere Kurven bestimmten linearen Systems.

Eine rein geometrische Theorie der ebenen algebraischen Kurven beliebiger Ordnung hat, wenigstens für einzelne Partien, E. Kötter in seiner *Preisschrift* 1887 gegeben (Zusätze in den *Math. Ann.* **34**, 123 (1889)). Er geht von der Staudtschen Theorie des Imaginären aus, und nachdem er im binären Gebiet durch den Schluß von n auf $n + 1$ die Involutionen beliebiger Ordnung und die Korrespondenzen (m, n) bewältigt, stützt er darauf die grundlegenden Sätze über ebene Kurven und ihre linearen Systeme,

wieder durch den Schluß von n auf $n+1$ und fußend auf der Kurvenerzeugung durch projektive Büschel. Er beweist das Bézoutsche Theorem und die Schnittpunktsätze von Gergonne, Plücker, Jacobi, Cayley (vgl. Kap. XIV, § 9), die Hauptsätze über Polarentheorie und die Erzeugung einer c_n aus n in n-linearer Beziehung stehenden Büscheln, woraus eine Methode für die lineare Konstruktion einer c_n aus $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkten resultiert.

Während Kötter die Methoden von Steiner und Chasles ausbaute und vertiefte, suchte de Paolis, von den Resultaten Thiemes ausgehend, die Gedanken v. Staudts, der die Kegelschnitte aus dem Polarsystem ableitet, auf allgemeine c_n auszudehnen. Er konnte aber von seiner rein geometrischen Kurventheorie nur die Grundlagen ausführen, welche das geometrische Gegenstück zu Sätzen von Weierstraß, G. Cantor und anderen über die Theorie der Funktionen einer Variabeln liefern: *Soc. ital. dei XL Mem.* (3) **7** (1890), Auszug *Ann. di Mat.* (2) **18**, 93 (1890); *Torino Mem.* (2) **42**, 495 (1891). Vgl. auch den posthumen Aufsatz *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{3}^2$, 225 (1894, datiert vom 30. Dez. 1887), mit Anhang von Segre.

§ 9. Systeme von einfach unendlich vielen Kurven. Charakteristikentheorie.

Ein algebraisches System von ∞^1 algebraischen Kurven gegebener Ordnung erhält man, wenn man in ihrer Punktgleichung die Koeffizienten als rationale Funktionen zweier Parameter ansetzt, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht. Die allgemeinen Eigenschaften solcher Systeme hat Jonquières untersucht, *J. de Math.* (2) **6**, 113 (1861), dieser bezeichnete als Index μ die Zahl der Kurven des Systems, die durch einen gegebenen Punkt gehen. Die duale Zahl ν der Systemkurven, die eine gegebene Gerade berühren, führte Chasles ein: *C. R.* **58**, 222, 297, 425, 1167 (1864), **59**, 7, 93, 209, 345 (1864).

Die beiden Zahlen μ, ν spielen eine Hauptrolle in vielen hierhergehörigen Fragen. Z. B. *ist die Zahl der Kurven eines Systems* (μ, ν), *die eine gegebene Kurve von der Ordnung n und der Klasse n′ berühren*, $\mu n' + \nu n$. Für diesen von Chasles (*C. R.* **58**, 300 (1864)) ausgesprochenen Satz gaben Beweise Zeuthen, *Math. Ann.* **3**, 150 (1871); Brill, ebenda **8**, 534 (1875) u. a. Vgl. Schubert, *Kalkül*, S. 14, 51, 295; Clebsch-Lindemann, S. 424.

Der Ort der Punkte, in denen sich zwei Kurven aus zwei

Systemen (μ_1, ν_1) und (μ_2, ν_2) berühren, ist eine Kurve von der Ordnung $\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \mu_1\mu_2$, und dual entsprechend ist die Enveloppe der Tangenten in diesen Punkten eine Kurve von der Klasse $\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \nu_1\nu_2$ (Schubert, *Math. Ann.* **10**, 108 (1876), *Kalkül*, S. 52).

Sind drei Systeme (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2), (μ_3, ν_3) vorgelegt, so kann man $\mu_2\mu_3\nu_1 + \mu_3\mu_1\nu_2 + \mu_1\mu_2\nu_3 + \mu_1\nu_2\nu_3 + \mu_2\nu_3\nu_1 + \mu_3\nu_1\nu_2$ Tripel von Kurven finden, die sich in einem Punkte berühren (Schubert, *Kalkül*, S. 289). Andere Formeln bei Halphen, *Bull. Soc. M.* **5**, 14 (1876); Schubert, *Gött. Nachr.* 1877, p. 401; *Math. Ann.* **17**, 188 (1880); Zeuthen, *C. R.* **89**, 899, 946 (1879).

Die vorstehenden und analoge Formeln bleiben auch für (μ, ν)-Systeme von ∞^1 *transzendenten* Kurven bestehen, welche die Integralkurven einer in $x, y, \frac{dy}{dx}$ algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sind. Vgl. Fouret in vielen Arbeiten *C. R.* **78**, **82**, **83**, **86**, **102** u. *Bull. Soc. Math.* **2**, **5**, **7**, **19** (1874—1891).

Chasles hatte a. a. O. vermutungsweise ausgesprochen, daß die Anzahl der Kurven eines Systems (μ, ν), die einer weiteren von dem System unabhängigen Bedingung genügen, sich immer in der Form ausdrücken läßt: $\alpha\mu + \beta\nu$ (*Modul* der Bedingung), wobei α, β nur von der auferlegten Bedingung abhängende Zahlen sind; deswegen nannte er μ, ν die *Charakteristiken* des Systems. Halphen zeigte aber (*J. éc. polyt.* **45**, 27 (1878)) schon an dem Beispiel der Kegelschnitte, daß der Satz nicht richtig ist, wenn man ausgeartete Kurven ausschließen will. Zeuthen, *Kjöbnh. Skrifter* (5) **10**, 287 (1873), franz. Auszug in *Bull. Sc. M.* **7**, 97 (1873), behandelte dann ausführlich die allgemeine Frage; er setzt voraus, daß das System die gewöhnlichen ausgearteten Kurven besitzt, wie sie sich bei elementaren Systemen (nämlich solchen, die durch gegebene Punkte und Tangenten bestimmt sind) darbieten, z. B. indem ein weiterer Doppelpunkt oder ein weiterer Rückkehrpunkt vorhanden ist, oder indem ein Doppelpunkt in eine Spitze ausartet oder zwei Doppelpunkte zusammenfallen usw. Zwischen den 40 Zahlen von Ausartungen, die auftreten (μ, ν einbegriffen), der Ordnung n und den Anzahlen der Doppelpunkte und Spitzen, die die allgemeine Kurve besitzt, bestehen 23 unabhängige Beziehungen, die gestatten, 23 von diesen Zahlen durch die übrigen 17 linear auszudrücken. Diese letzteren lassen sich als die *Charakteristiken* des vorliegenden Systems ansehen: durch sie kann die Zahl für jede weitere Bedingung, die von den das System bestimmenden unabhängig ist, linear und homogen

ausgedrückt werden. Das Vorhandensein von singulären Kurven anderer Art würde die Zahl der Charakteristiken weiter erhöhen.

Von anderen Arbeiten über Systeme von ∞^1 Kurven nennen wir die von Zeuthen, *C. R.* **78**, 274, 339 (1874), in denen die Plückerschen Zahlen der von den Kurven des Systems umhüllten Kurve bestimmt sind, und die von Krey, *Acta Math.* **5**, 83 (1884), **7**, 49 (1885) und Schubert, *Math. Ann.* **12**, 194 (1877), **13**, 429 (1878), wo u. a. die obengenannten Zeuthenschen Formeln auf Systeme in einer veränderlichen Ebene ausgedehnt sind.

§ 10. Auflösung der Singularitäten. Zweige. Reihenentwicklungen.

1. *Auflösung der Singularitäten.* Indem wir den im XV. Kapitel zu entwickelnden Begriff der eindeutigen (*birationalen*) Beziehung zwischen zwei algebraischen ebenen Kurven vorwegnehmen, können wir den wichtigen Satz formulieren: *Eine ebene Kurve, die keine mehrfach zählenden Bestandteile enthält, läßt sich immer birational auf eine andere beziehen, die nur mit gewöhnlichen Singularitäten behaftet ist, und auch auf eine andere, deren einzige Singularitäten gewöhnliche Doppelpunkte sind.*

Dieser Satz ist zuerst von Kronecker aufgestellt worden, *J. f. Math.* **91**, 301 (1881); vgl. Hensel-Landsberg, S. 365ff.; sodann von Halphen, *C. R.* **80**, 638 (1875), *J. de Math.* (3) **2**, 87 (1876). Die zuletzt genannte Reduktion hat geometrisch ausgeführt Bertini, *Riv. mat.* **1**, 22 (1891) oder *Math. Ann.* **44**, 158 (1894), reproduziert in Picard, *Traité*, p. 408. Andere Beweise bei Halphen, *Étude*, p. 630; Appell-Goursat, *Théorie des fonctions alg.*, Paris 1895, p. 276ff.; Simart, *C. R.* **116**, 1047 (1893).

Derselbe Satz läßt sich durch ein Projektionsverfahren aus dem anderen Theorem gewinnen, daß *jede ebene algebraische Kurve auf eine von mehrfachen Punkten freie Raumkurve birational bezogen werden kann,* wenn man will, auch durch eine birationale (Cremonasche) Transformation *des ganzen Raumes.*

Die ebene Kurve läßt sich auch immer als die Projektion einer von mehrfachen Punkten freien algebraischen Kurve in einem Überraum ansehen, so daß allgemein jede Singularität einer ebenen Kurve durch Projektionen erzeugt werden kann.

Über alles dies vgl. Veronese, *Math. Ann.* **19**, 213 (1882); Poincaré, *C. R.* **117**, 18 (1893); del Pezzo, *Napoli Rend.* (2) **7**, 15, 45 (1893); Pieri, *Riv. mat.* **4**, 40 (1894); Vessiot,

Bull. Soc. Math. **22**, 208 (1894); Segre, *Ann. di Mat.* (2) **25**, 43 (1896); B. Levi, *Rom Acc. L. Rend.* (5) **7**[1], 111 (1898); Hensel-Landsberg, S. 418; Severi, *Lezioni,* p. 172.

Unabhängig hiervon hat Noether den Satz aufgestellt, *daß jede von mehrfachen Bestandteilen freie ebene algebraische Kurve sich in eine andere, die nur gewöhnliche Singularitäten* (mehrfache Punkte mit getrennt liegenden Tangenten) *besitzt, transformieren läßt durch eine Folge von eindeutigen quadratischen Transformationen der Ebene, d. h. durch eine Cremonasche Transformation: Gött. Nachr.* 1871, S. 267, *Math. Ann.* **9**, 166 (1876), **23**, 311 (1884). Daß die Folge der quadratischen Transformationen begrenzt ist, bewies Hamburger, *Ztschr. f. M.* **16**, 461 (1871); geometrische Beweise bei Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **21**, 326, 413 (1888), *Introd.,* p. 377; Severi, *Lezioni,* p. 61; vgl. auch Picard, *Traité,* p. 404. Um einen singulären Punkt A, den die Kurve f s-fach enthält, aufzulösen, legt man nach A eine Ecke des Fundamentaldreiecks für eine quadratische Transformation, indem man die anderen beiden Ecken B, C allgemein läßt. Die entsprechende Kurve f' hat dann in den Fundamentalpunkten A', B', C' der transformierten Ebene gewöhnliche vielfache Punkte, während die von A verschiedenen singulären Punkte der Kurve f sich in vielfache Punkte auf f' von derselben Multiplizität und derselben Art wie die ursprünglichen transformieren. Wenn von den s Tangenten von f in A einige in gewisse Gerade $t_1, t_2, \ldots$ zusammenfallen, so gibt es auf $B'C'$ außerhalb B' und C' ebensoviel Punkte $A_1', A_2', \ldots$, die für f' gewisse Multiplizitäten s_1, $s_2, \ldots$ besitzen, so daß $s_1 + s_2 + \cdots \leqq s$. Diese Punkte können sich aber auch auf einen einzigen s-fachen Punkt A' reduzieren. Dann wendet man auf f' eine neue quadratische Transformation mit einem Fundamentalpunkt in A' an usw. Nach einer endlichen Anzahl von Operationen hat man aus A Punkte von geringerer Multiplizität abgeleitet. Man kann so auch schließlich zu einer Kurve gelangen, auf welcher die dem Punkte A entsprechenden Punkte alle *einfache* Punkte sind.

Man sagt dann mit Noether, daß dem s-fachen Punkte A auf den Tangenten $t_1, t_2, \ldots$ gewöhnliche mehrfache Punkte von den Multiplizitäten $s_1, s_2, \ldots$ *unendlich benachbart* sind, die auf f die *Umgebung erster Ordnung* bilden. Die Umgebung zweiter Ordnung wird analog aus den Punkten, von den Multiplizitäten $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{21}, s_{22}, \ldots$, die den Punkten $A_1', A_2', \ldots$ auf f' unendlich benachbart sind, gewonnen usf. Die Zahlen $s, s_i, s_{ik}, \ldots$, welche die Noethersche Zusammensetzung des vielfachen Punktes

geben, hängen allein von dem letzteren, nicht aber von den ausgeführten quadratischen Transformationen ab.

2. *Zweige und Reihenentwicklungen.* Verfolgt man die quadratischen Transformationen so weit, daß sich der s-fache Punkt A von f in lauter einfache Punkte $P, Q, \ldots$ einer Kurve Φ aufgelöst hat, so entsprechen den Punkten, die auf Φ die Umgebung eines dieser Punkte $P, Q, \ldots$ bilden, auf f die Punkte eines gewissen Bereiches bei A, der, wie man sagt, einen *Zweig* (nach Halphen *cycle*) mit A als *Ursprung* bildet.

Bei einer birationalen Transformation von f geht ein Zweig immer wieder in einen Zweig über. Näher wird der Begriff durch das folgende Theorem bestimmt:

Die Koordinaten x, y der Punkte eines Zweiges lassen sich als Reihen von ganzen positiven Potenzen eines Parameters t ausdrücken, der seinerseits eine rationale Funktion der Koordinaten selbst ist. Man erhält alle Punkte des Zweiges, indem man, bei Benutzung der Gaußschen Zahlenebene, t innerhalb des Konvergenzkreises jener Potenzreihen sich bewegen läßt.

Die Grundeigenschaften der Zweige leiten sich aus dem Begriff der *Multiplizität des Schnittes* eines Zweiges mit einer durch seinen Ursprung A gehenden algebraischen Kurve her. Man lege der Einfachheit wegen nach A den Koordinatenursprung und lasse ihm den Wert $t = 0$ entsprechen, und es sei $F(x, y) = 0$ eine algebraische Kurve, die durch A geht. Wenn man dann für x, y die Potenzreihen mit dem Argument t einsetzt, so bedeutet der Exponent (> 0) der niedrigsten vorkommenden Potenz von t die Multiplizität des Schnittes des Zweiges und der Kurve F in A.

Im besonderen ist die Multiplizität des Schnittes für eine allgemeine Gerade durch A eine konstante Zahl Δ, welche die *Ordnung* des Zweiges heißt. Ein Zweig heißt *linear* oder *superlinear*, je nachdem $\Delta = 1$ oder > 1. Eine Ausnahme bildet eine einzige Gerade a durch A, für welche die Multiplizität des Schnittes $\Delta + \Delta'$ $(\Delta' > 0)$ wird: sie heißt die *(singuläre) Tangente* an den Zweig in A. Wählt man sie zur x-Achse, so nimmt die Darstellung des Zweiges die Form an

$$(1) \qquad x = c t^{\Delta} + \cdots, \quad y = c' t^{\Delta + \Delta'} + \cdots,$$

wo c, c' von 0 verschiedene Konstanten sind. Die Zahl Δ' heißt dann die *Klasse* des Zweiges.

Die Tangenten in den Punkten eines Zweiges stellen das zu dem letzteren duale Gebilde dar, und man findet, daß *die Zahlen Δ und Δ' einander dual entsprechen.* Δ' ist die Anzahl

der mit a zusammenfallenden Tangenten, die aus einem Punkte von a (ausgenommen A) an den Zweig gehen, $\Delta + \Delta'$ auch die Zahl der mit a zusammenfallenden Tangenten, die von A an den Zweig gehen.

Dieses Theorem ist von Cayley, *Quart. Journ.* **7**, 212 (1866), *J. f. Math.* **64**, 369 (1865), *Papers* V, 424, 520, vermutet und von Halphen, *Paris Sav. étr.* (2) **26** (1877), Auszug *C. R.* **78**, 1105 (1874), bewiesen worden, ebenso von Stolz, *Math. Ann.* **8**, 415 (1875). Vgl. auch Zeuthen, *Math. Ann.* **10**, 210 (1876); Halphen, *Étude*, p. 544; Bertini, *Introd.*, p. 365; einen geometrischen Beweis gab Segre, *Introd.*, n. 43.

Aus (1) findet man y ausgedrückt durch eine Reihe mit positiven ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta}}$, wobei man in jedem Gliede der Reihe für $x^{\frac{1}{\Delta}}$ denselben im übrigen willkürlichen Wert unter den Δ möglichen zu nehmen hat. Cayley hat a. a. O. auch die *partiellen Zweige* betrachtet, die man aus dem *vollständigen Zweig* dadurch erhält, daß man den Wert von $x^{\frac{1}{\Delta}}$ bestimmt auswählt.

Eine Methode, um die genannten Entwicklungen auszurechnen, findet sich schon in Newton, *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* (von 1669), London 1711, und *Methodus fluxionum* (1671), London 1736, *Opera* ed. Horsley I, 257, 391. Diese Methode hat Puiseux, *J. de Math.* (1) **15**, 365 (1850), **16**, 228 (1851), dtsch. v. Fischer als *Theorie der alg. Funktionen*, 1861, vervollkommnet. Sie ist in viele Lehrbücher übergegangen, s. z. B. Clebsch-Lindemann, S. 331; Baltzer, *Anal. Geom.*, S. 295; Netto, *Algebra* II, 51; Hensel-Landsberg, S. 39; Picard, *Traité*, p. 392; Jordan, *Cours d'Analyse*, 2. éd., I, 90.

Ein allgemeines analytisches Verfahren, das nicht wie das vorstehende die vorangehende Bestimmung von Ordnungen des Unendlichkleinen erfordet, gab Hamburger, *Zschr. f. M.* **16**, 461 (1871); man vgl. auch Weierstraß, *Werke* IV, Kap. 1; Königsberger, *Theorie d. ellipt. Funkt.* I, 189 (1874). Eine andere Methode bei Brill, *Münch. Ber.* **21**, 207 (1891).

Wenn der Zweig *reell* ist, so läßt sich die Darstellung (1) so ausführen, daß die Koeffizienten reell sind und reelle Punkte des Zweiges reellen Werten von t entsprechen. Es ergeben sich dann folgende vier Typen des Zweiges, je nach der Rolle, die A bei dem Zweige spielt:

Δ ungerade, Δ' ungerade: A gewöhnlicher Punkt (Fig. 1),

Δ ungerade, Δ' gerade: A Wendepunkt (Fig. 2),

Δ gerade, Δ' ungerade: A Spitze erster Art (Fig. 3),

Δ gerade, Δ' gerade: A Spitze zweiter Art (Fig. 4).

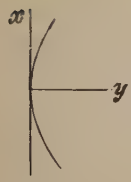


Fig. 1.

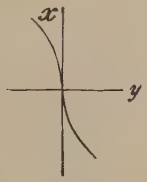


Fig. 2.

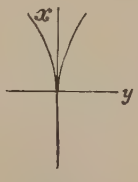


Fig. 3.

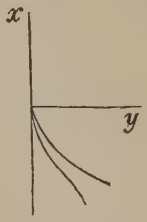


Fig. 4.

Vgl. Plücker, *Theorie,* S. 200; Stolz, *Math. Ann.* **8**, 433 (1875); St. Smith, London, *M. S. Proc.* **6**, 153 (1873—1876), *Papers* II, 101.

Wendet man die allgemeinen Betrachtungen auf Doppelpunkte (Knotenpunkte) und Spitzen an, so gelangt man zu folgenden Definitionen: Ein *Knotenpunkt* ist *von der k^{ten} Art,* wenn er in seiner Umgebung k^{ter} Ordnung zwei einfache Punkte hat, also sich nach k quadratischen Transformationen in einfache Punkte auflöst. Eine *Spitze* heißt *von der k^{ten} Art*, wenn sie in ihrer Umgebung k^{ter} Ordnung einen einfachen Punkt hat, also nach k quadratischen Transformationen in einen gewöhnlichen Punkt übergeht.

Ein *Knotenpunkt* ist immer Ursprung von *zwei* Zweigen *erster* Ordnung, eine *Spitze* von *einem* Zweig *zweiter* Ordnung.

3. *Multiplizität des Schnittes.* Die Multiplizität I des Schnittes zweier Kurven f, f' (ohne gemeinsame Bestandteile) in einem gemeinsamen Punkte A (vgl. § 2, Nr. 2) läßt sich bestimmen, indem man die Summe der Multiplizitäten des Schnittes der einen Kurve mit den Zweigen der anderen bildet. Vgl. Weierstraß, *Werke* IV, Kap. 2, 6, und besonders Halphen, *Bull. Soc. M.* **4**, 59 (1875), *J. de Math.* (3) **2**, 257, 371 (1876), *Thèse*, Paris 1878, *Étude*, p. 575.

Die Zahl I läßt sich auch auf Grund der Definition der Resultante von $f = 0$, $f' = 0$ als Differenzenprodukt der Werte von y, die durch diese beiden Gleichungen demselben Wert von x zugeordnet werden, berechnen. Vgl. die zitierten Arbeiten von

Cayley (*Papers* V, 424, 520); Smith (*Papers* II, 101); Halphen (*Paris Sav. étr.* **26**).

In geometrischer Ausdrucksweise ist I die *Summe der Ordnungen des Unendlichkleinen derjenigen Strecken, welche zwischen den beiden Kurven auf einer Transversalen, deren Abstand von A unendlich klein von der ersten Ordnung ist, liegen* (Halphen, a. a. O. und *Bull. Soc. M.* **1**, 133 (1873), **2**, 35 (1873)).

Cayley und Halphen verwenden auch die partiellen Multiplizitäten der Schnitte der für sich betrachteten Teilzweige. Ist dann s die Multiplizität von A für f, r die für f', so wird die totale Multiplizität I des Schnittes gleich rs plus der Summe der Ordnungen aller Berührungen, die zwischen den Teilzweigen der beiden Kurven eintreten. Anwendungen hiervon gab Halphen, *Bull. Soc. M.* **3**, 76 (1875).

Noether gründet im Anschluß an seine Auflösung der singulären Punkte die Bestimmung von I auf die sukzessiven Multiplizitäten $s, s_i, s_{ik}, \ldots$ und $r, r_i, r_{ik}, \ldots$ von A für die beiden Kurven f, f' und findet

$$I = rs + \sum_i r_i s_i + \sum_{i,k} r_{ik} s_{ik} + \cdots,$$

wo die Summen sich auf die gemeinsamen vielfachen Punkte von f und f' in der Umgebung erster, zweiter, ... Ordnung von A beziehen.

Nachzutragen ist noch, daß man, um einen vielfachen Punkt zu charakterisieren, wie Segre (*Torino Atti* **36**, 645 (1901), vgl. Bertini, *Introd.*, p. 385) hervorgehoben hat, nicht bloß auf die Ordnungen der von ihm ausgehenden Kurvenzweige und auf die Multiplizitäten $s, s_i, s_{ik}, \ldots$ der konsekutiven vielfachen Punkte zu achten hat, sondern auch auf die Natur der Zweige, die durch die Punkte hindurchgehen können. Z. B. bieten drei konsekutive Punkte von f zwei verschiedene Fälle dar, je nachdem durch sie lineare oder nur superlineare Zweige hindurchgehen. Im letzteren Falle existieren keine irreduzibeln Kegelschnitte, welche die drei Punkte enthalten, und diese können sich deshalb nicht zu Fundamentalpunkten einer quadratischen Transformation wählen lassen.

Andere Methode zur Bestimmung der Schnittmultiplizität bei Brill, *Münch. Ber.* **18**, 81 (1888) und Macaulay (a. d. Kap. XIV, § 9 zitierten Ort).

§ 11. Das Geschlecht und die adjungierten Kurven. Erweiterung der Plückerschen Formeln. Plückersche Äquivalente.

1. *Das Geschlecht und der Riemannsche Satz.* Die wichtigste unter den charakteristischen Zahlen (Invarianten), die für alle Kurven einer *Klasse* (d. h. alle Kurven, die sich birational ineinander transformieren lassen) denselben Wert haben, ist das *Geschlecht.* Geschlecht heißt die für jede von mehrfachen Bestandteilen freie Kurve f der Ordnung n zu bildende Zahl

$$(1) \qquad p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum \tfrac{1}{2} s(s-1),$$

wo die Summe sich auf die Multiplizitäten s aller singulären Punkte der Kurve, sowohl der unmittelbaren wie der diesen unendlich benachbarten (§ 10), bezieht.

Ist f irreduzibel, so ist $p \geqq 0$. Für $p = 0$ wird die Kurve *rational*, d. h. gehört mit den geraden Linien in eine Klasse. Löst sich f in a irreduzible Teilkurven von den Geschlechtern p_1, $p_2, \ldots, p_a$ auf, so wird

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_a - a + 1,$$

woraus $p \geqq 1 - a$ folgt. Für eine Kurve mit lauter gewöhnlichen Doppel- und Rückkehrpunkten gilt die Formel (3) in § 7.

Den Begriff des Geschlechtes hat Riemann eingeführt (*Theorie der Abelschen Funktionen*, *J. f. Math.* **54**, 115 (1857), *Werke*, S. 88) und darauf die Zusammenhangslehre der nach ihm benannten Flächen gegründet. Die Bedeutung der Zahl p für die Kurventheorie erkannte Clebsch (*J. f. Math.* **63**, 189 (1864), **64**, 43, 98, 210 (1865)), der auch den Namen Geschlecht einführte, Cayley sagte dafür *deficiency* und Cremona *genere.* In anderer Weise hat Weierstraß das Geschlecht definiert, der es *Rang* nennt und mit ϱ bezeichnet (Kap. XIV, § 4).

Die Gleichheit von p für zwei Kurven derselben Klasse hat Riemann nachgewiesen, indem er sie aus der Beziehung zwischen den zugehörigen Riemannschen Flächen, die dann denselben Zusammenhang haben, herleitete. Einen algebraischen Beweis gaben zuerst Clebsch und Gordan (*Th. d. Abelschen Funkt.* § 16). Geometrische Beweise gaben Cremona, *Bologna Mem.* (2) **6**, 133 (1866), Übersetzung von Curtze, S. 55; Bertini, *Giorn. di Mat.* **7**, 105 (1869) (reproduziert in Salmon-Fiedler, S. 84, und mit anderen Beweisen in Clebsch-Lindemann, S. 458, 666, 681); Zeuthen, *C. R.* **70**, 743 (1870);

Voß, *Gött. Nachr.* 1873, S. 414, 550; Noether (nach Clebsch), *Math. Ann.* **8**, 497 (1875); Schubert, ebenda **16**, 180 (1880) (reproduziert in Bertini, *Introd.*, p. 206); andere Beweise bei Noether, a. a. O. und *Math. Ann.* **9**, 166 (1876); St. Smith, *Lond. M. S. Proc.* **6**, 153 (1873—76), *Papers* II, 101; Halphen, *C. R.* **78**, 1833 (1874); *Bull. Soc. M.* **4**, 29 (1875); *Étude*, p. 624; Zeuthen, *Math. Ann.* **10**, 210 (1876).

2. *Erweiterung der Plückerschen Formeln. Adjungiert* zu einer c_n heißt jede Kurve, die in allen s-fachen $(s > 1)$ unmittelbaren und benachbarten Punkten von c_n wenigstens die Multiplizität $s-1$ hat. Solche adjungierte Kurven sind z. B. die ersten Polaren. Während aber die Multiplizität des Schnittes einer allgemeinen adjungierten Kurve für einen singulären Punkt A $\Sigma s(s-1)$ ist, wo die Summe über die Noetherschen Komponenten des Punktes zu erstrecken ist, wird diese Zahl für eine allgemeine erste Polare noch um $\Sigma(\Delta-1)$ erhöht, wo die Summe über die Ordnungen Δ der durch A gehenden superlinearen Zweige zu erstrecken ist. Diese Zahl $\Sigma(\Delta-1)$ heißt nach Noether die *Verzweigung*, nach Smith der *Kuspidalindex* der singulären Stelle. Eine mehr geometrische Bestimmung für sie findet sich bei Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **21**, 326, 413 (1888), **23**, 307 (1890).

Die Formel in § 7 für die Klasse von c_n geht demnach im allgemeinen Falle über in

$$(2) \qquad n' = n(n-1) - \Sigma s(s-1) - \Sigma(\Delta-1).$$

Die dazu duale Formel lautet:

$$(3) \qquad n = n'(n'-1) - \Sigma s'(s'-1) - \Sigma(\Delta'-1),$$

wo s' die (unmittelbaren und benachbarten) Tangentenmultiplizitäten, Δ' die Klasse der einzelnen Zweige bedeutet.

Aus der Gleichheit des Geschlechtes für die als Punktort und als Tangentengebilde aufgefaßte Kurve (oder eine reziproke Kurve) folgt

$$(4) \qquad n(n-3) - \Sigma s(s-1) = n'(n'-3) - \Sigma s'(s'-1).$$

Diese *Erweiterungen der Plückerschen Formeln* lassen sich bei Einführung des Geschlechtes auch schreiben

$$(5) \qquad \begin{aligned} 2p-2 &= n(n-3) - \Sigma s(s-1) = \Sigma(\Delta-1) + n' - 2n \\ &= n'(n'-3) - \Sigma s'(s'-1) = \Sigma(\Delta'-1) + n - 2n'. \end{aligned}$$

Es läßt sich aus ihnen ableiten:

$$(6) \qquad \sum(\Delta - \Delta') = 3(n - n'),$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum(2\Delta + \Delta' - 3) = 3(n + 2p - 2), \\ \sum(\Delta + 2\Delta' - 3) = 3(n' + 2p - 2); \end{cases}$$

die Summen in (7) sind dabei über alle Zweige zu erstrecken, für die $\Delta\Delta' > 1$.

Nennt man r' die Zahl der Wendepunkte, die in einfache Punkte fallen, jeden die gehörige Anzahl Male gezählt (§ 7), so findet man aus (1) und (7):

$$(8) \quad r' = 3n(n-2) - 3\sum s(s-1) - \sum(2\Delta + \Delta' - 3).$$

Die letzte Summe ist hierbei nur über die superlinearen Zweige $(\Delta > 1)$ zu erstrecken.

Die vorstehenden Formeln rühren von Noether her, *Math. Ann.* **9**, 166 (1876). Vgl. auch außer den zitierten Arbeiten von Smith, Halphen und Zeuthen: Halphen, *C. R.* **80**, 638 (1875); Segre, *Introd.*, § 9; Bertini, *Introd.*, p. 383, 398 Anm. Für die Erniedrigung der Klasse durch die singulären Punkte gelten noch die folgenden Regeln:

Die Erniedrigung der Klasse durch einen s-fachen Punkt A ist gleich der Summe der Ordnungen des Unendlichkleinen der Segmente zwischen den Kurvenpunkten auf einer Sekante, deren Abstand von A ein Unendlichkleines erster Ordnung ist und die mit keiner der Tangenten in A zusammenfällt (Halphen, Zeuthen).

Die Erniedrigung ist auch gleich $s(s-1)$, vermehrt um das Doppelte der Summe der Ordnungen aller Berührungen, die zwischen den Teilzweigen in A eintreten (Cayley, Halphen).

Eine *rein rationale* Ausführung aller beschriebenen Prozesse, insbesondere der Bestimmung von p und der Adjungierten, gab Noether, *Math. Ann.* **23**, 311 (1884). Vgl. auch Raffy, *Ann. éc. norm.* (2) **12**, 156 (1883), Auszug *Math. Ann.* **23**, 527.

3. *Charakteristische Zahlen eines Zweiges.* Smith und Halphen haben bemerkt, daß in der Entwicklung von y nach steigenden Potenzen von x, die zu einem Zweig mit dem Ursprung $x = 0$, $y = 0$ und der Tangente $y = 0$ gehört, nur die Exponenten $t, t_1, \ldots, t_k$ einer gewissen endlichen Anzahl von Gliedern die auf die Singularität des Zweiges bezüglichen Zahlen liefern. Diese sind für alle linearen Transformationen der Ebene invariant und in der Form darstellbar:

$$t = \frac{u}{q}, \quad t_1 = t + \frac{u_1}{q\,q_1}, \ldots, t_k = t_{k-1} + \frac{u_k}{q\,q_1 \ldots q_k},$$

wobei u_i, q_i ganze positive, relativ prime Zahlen sind und $q\,q_1 \ldots q_k = \Delta$ wird. Die t_i heißen nach Halphen die *charakteristischen Exponenten* (kritische Exponenten nach Smith) und u_i/q_i die *charakteristischen Zahlen des Zweiges*. Man führt noch neue Zahlen Δ_i, α_i ein durch die Gleichungen:

$$q = \frac{\Delta}{\Delta_1}, \; q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \ldots, q_{k-1} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}, \; q_k = \Delta_k,$$

$$u = \frac{\alpha}{\Delta_1}, \; u_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta_2}, \ldots, u_{k-1} = \frac{\alpha_{k-1}}{\Delta_k}, \; u_k = \alpha_k.$$

Noether, *Rend. Circ. M.* **4**, 89, 300 (1890), hat diese Zahlen aus den zur Auflösung der Singularität dienenden quadratischen Transformationen geometrisch abgeleitet und hat die Zahlenpaare (Δ, α), (Δ_1, α_1), $\ldots$, (Δ_k, α_k) die *charakteristischen Kombinationen* der Singularität des Zweiges genannt.

Δ ist die Ordnung des Zweiges, α die Multiplizität seines Schnittes mit der Tangente im Ursprung, Δ_i kann man als größten gemeinschaftlichen Teiler von Δ_{i-1} und α_{i-1} erhalten, und man hat

$$\alpha > \Delta \geqq \Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3 > \cdots > \Delta_k > \Delta_{k+1}, \text{ wobei } \Delta_{k+1} = 1.$$

Die Entwicklung von y in eine Potenzreihe von x nimmt die Form an

$$y = x^{\frac{\alpha}{\Delta}}\left[x^{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\right] + x^{\frac{\alpha+\alpha_1}{\Delta}}\left[x^{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\right] + \cdots + x^{\frac{\alpha+\cdots+\alpha_k}{\Delta}}\left[x^{\frac{1}{\Delta}}\right],$$

wenn man mit Halphen durch $[q]$ eine Reihe ganzer positiver Potenzen von q, in der das konstante Glied $\neq 0$, charakterisiert. Für die Erniedrigung K der Klasse und die Erniedrigung Π des Geschlechtes durch die singuläre Stelle hat man die Ausdrücke

$$\mathsf{K} = \alpha(\Delta - 1) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\Delta_i - 1),$$

$$\Pi = \tfrac{1}{2}(\alpha - 1)(\Delta - 1) + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\Delta_i - 1).$$

4. *Formeln von Halphen, Smith und Zeuthen.* Halphen und Smith haben einige Formeln angegeben, in denen nur die *unmittelbaren* Punkt- und Tangentenmultiplizitäten vorkommen und deren Anwendung deshalb keine vorhergehende Bestimmung

von Ordnungen des Unendlichkleinen erfordert. Von dieser Art ist schon die Formel

$$\alpha = \Delta + \Delta',$$

in der α die Multiplizität des Schnittes eines Zweiges (Δ, Δ') mit der singulären Tangente und gleichzeitig die dual entsprechende Zahl bezeichnet.

Eine Verknüpfung zwischen diesen Relationen hat Zeuthen aufgestellt: *Acta Math.* **1**, 171 (1882); vgl. auch Noether, *Chicago Congreß Math. Papers* 1896, p. 253, *Math. Ann.* **56**, 677 (1903).

Nennt man K' und Π' die den Zahlen K und Π der vorigen Nummer dual entsprechenden Zahlen, so gelten z. B. die Formeln (Smith):

$$\mathsf{K} - \mathsf{K}' = \Delta^2 - \Delta'^2,$$

$$\Pi - \Pi' = \tfrac{1}{2}\Delta(\Delta - 1) - \tfrac{1}{2}\Delta'(\Delta' - 1) = \tfrac{1}{2}(\alpha - 1)(\Delta - \Delta').$$

Für zwei Kurven von den Ordnungen n, ν und den Klassen n', ν' mit den unmittelbaren Punkt- und Tangentenmultiplizitäten s, σ und s', σ', hat man (Halphen, Smith):

$$n\nu - n'\nu' = \sum s\sigma - \sum s'\sigma'.$$

Für die eine Kurve allein erhält man die Formel (Zeuthen):

$$n(n-3) - \sum s(s-1) = n'(n'-3) - \sum s'(s'-1),$$

die sich von der Noetherschen Formel (4) dadurch unterscheidet, daß sich in ihr die Summen nur auf die *unmittelbaren* Multiplizitäten beziehen.

5. *Plückersche Äquivalente.* Die Plückerschen Formeln (§ 7) kann man auch auf irgendwie singuläre Kurven anwenden, wenn man nur in ihnen die singulären Punkte oder Tangenten einer gewissen Anzahl von Doppelpunkten und Spitzen oder Doppel- und Wendetangenten *äquivalent* setzt. Dieser Gedanke findet sich schon bei Plücker, *Theorie,* S. 216.

Indem man die Gleichung für das Geschlecht im Auge behält, ergeben sich vier vollkommen bestimmte Werte $\delta_1, \varepsilon_1, \delta_1', \varepsilon_1'$ (die *Prinzipaläquivalente* nach Zeuthen, δ_1, ε_1 nach Smith *Nodal-* und *Kuspidalindex*), diese bestimmen sich für einen Zweig (Δ, Δ'), der die Klasse um K *(Diskriminantindex)* und die Ordnung um K' erniedrigt, aus den Formeln:

$$\varepsilon_1 = \Delta - 1, \quad \varepsilon_1' = \Delta' - 1, \quad 2\delta_1 + 3\varepsilon_1 = \mathsf{K}, \quad 2\delta_1' + 3\varepsilon_1' = \mathsf{K}'.$$

Dies hat Cayley a. a. O. (*Papers* V, 424, 520) gezeigt, Ergänzungen finden sich bei Stolz, *Math. Ann.* **8**, 442 (1875), Smith, a. a. O., Zeuthen, *Math. Ann.* **10**, 210 (1876).

Zwischen den vier Zahlen besteht die Relation (Smith):

$$\delta_1 - \delta_1' = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_1')\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_1' - 1).$$

Zeuthen, *Acta Math.* **1**, 171 (1882), hat diese Relation in der Form

$$\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_1' = \tfrac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_1')\,(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_1' + 2\gamma - 3),$$

derart ausgedehnt, daß sie sich auf γ sich berührende Zweige, deren Äquivalente $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_1'$, $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_1'$ sind, bezieht.

Die vorstehenden Ergebnisse erfahren eine Ergänzung durch den von Brill, *Math. Ann.* **16**, 348 (1880), geführten Nachweis, daß *jede höhere Singularität sich auf Grund eines systematischen Deformationsprozesses als Grenzfall gewöhnlicher Singularitäten ansehen läßt.* Wie man diese Deformation durch quadratische Transformationen erhält, zeigte Scott, *Am. Journ. of M.* **14**, 301 (1892), **15**, 221 (1893). Baker, *Cambr. Trans.* $\mathbf{15}^4$, 403 (1894) (Auszug *Math. Ann.* **45**, 133 (1894)), wandte auf die Frage das Newtonsche Polygon an.

Die Cayleyschen Prinzipaläquivalente können eine beliebige Singularität nicht allein in den Plückerschen Formeln ersetzen, sondern auch bei allen Fragen, bei denen es sich um birationale Transformationen der Kurve handelt, allerdings nicht in allen Fragen der abzählenden Geometrie: vgl. Halphen, *J. de Math.* (3) **2**, 281 (1876), *Étude*, p. 608, Weiß, *Prag. Deutsche Math. Ges. Mitt.* 1892, S. 139, *Wien. Ber.* **102**, 1025 (1893).

6. *Reelle Singularitäten einer reellen Kurve.* Ist die Kurve *reell*, von der Ordnung n und der Klasse n' und hat sie w' *reelle* Wendepunkte, t'' *reelle* Doppeltangenten mit *imaginären* Berührungspunkten, r' *reelle* Rückkehrpunkte und d'' *reelle* Doppelpunkte mit *imaginären* Tangenten (isolierte Punkte), so besteht die Relation

$$n + w' + 2t'' = n' + r' + 2d'',$$

die von F. Klein herrührt, *Math. Ann.* **10**, 199 (1876), vgl. auch Perrin, *Bull. Soc. Math.* **6**, 84 (1877), und für Kurven mit höheren Singularitäten, Schuh, *Amsterd. Wet. Versl.* (2) **12**, 845 (1904); Juel, *Math. Ann.* **61**, 77 (1905).

Die algebraische Grundlage dieser Formel erkannte Brill, *Math. Ann.* **16**, 388 (1880), in der Zerfällbarkeit der Diskri-

minante der Doppelpunkts- und Doppeltangentengleichung einer besonderen Gattung von rationalen Kurven. Er fand außerdem, daß, wenn r', w', d', t'' die Zahlen der reellen Rückkehr- und Wendepunkte und isolierten Doppelpunkte und Doppeltangenten sind, die bei der Auflösung einer beliebigen Singularität in äquivalente elementare Singularitäten auftreten, die Zahl $r' - w' + 2(d'' - t'')$ denselben Wert hat, welches auch die Auflösungsart sei, so daß dieser *Realitätsindex* für die *Kleinsche Formel* dieselbe Rolle spielt wie die *Aquivalenzzahlen* für die *Plückerschen Formeln*. Die erwähnte Zerspaltung hat W. F. Meyer, *Math. Ann.* **38**, 369 (1891), auf beliebige rationale ebene Kurven ausgedehnt.

§ 12. Reelle Züge einer ebenen algebraischen Kurve.

Eine ebene Kurve f läßt sich erzeugen, indem ein Punkt P sich kontinuierlich auf einer Geraden t (der *Tangente*) bewegt, während sich gleichzeitig t um P dreht. Die beiden Bewegungen von P und t kann man, die erstere auf einen festen Punkt der Tangente, die letztere auf eine feste Gerade in der Ebene von f, beziehen. Der Sinn der Bewegungen kann nur in einzelnen singulären Lagen der erzeugenden Elemente, welche als die Rückkehrelemente bezeichnet werden, wechseln. Bezeichnet man den Fall eines solchen Rückkehrelementes mit $+$, den Fall eines gewöhnlichen Elementes mit $-$, so sind für jedes Paar Pt von f die folgenden vier Fälle möglich:

$$--, \quad -+, \quad +-, \quad ++.$$

Der erste Fall liefert einen gewöhnlichen Punkt, der zweite einen Wendepunkt, der dritte eine gewöhnliche Spitze und der vierte eine Spitze zweiter Art (vgl. S. 295). Bei zwei reziproken Kurven korrespondieren einander gegenseitig die Fälle $-+$ und $+-$ und die anderen Fälle sich selbst. Vgl. hierüber Plücker, *Theorie*, S. 200ff., v. Staudt, *Geom. d. Lage*, 1847, n. 197—204.

Ein geschlossener *Kurvenzug* (*vollständiger Zug* nach Harnack, *branche complète* nach Zeuthen, *circuit* nach Cayley) ist ein Teil einer Kurve, der in kontinuierlicher Bewegung von einem reellen Punkte erzeugt werden kann, wenn dieser durch jede Lage einmal hindurchgeht und schließlich zur Anfangslage zurückkehrt. Im Endlichen kann ein Kurvenzug sich in mehrere Äste zerlegen, wie die Hyperbel, im übrigen aber ist der Gesichtspunkt, unter dem diese Züge betrachtet werden, der der pro-

jektiven Geometrie, so daß das Unendlichferne nur ein besonderer Fall ist und das Dualitätsprinzip allgemein anwendbar bleibt.

Ein Zug kann *paar* oder *unpaar* sein, je nachdem eine willkürliche Gerade von ihm in einer geraden oder ungeraden Anzahl Punkte getroffen wird. Zwei Züge schneiden sich in einer geraden oder ungeraden Anzahl Punkte, je nachdem wenigstens einer von ihnen paar ist oder beide unpaar sind. Ein paarer Zug ohne mehrfache Punkte teilt die Ebene in zwei Stücke, von denen das eine, *äußere,* unpaare Züge enthalten kann, das andere, *innere,* nicht. Ein Zug hat eine gerade oder ungerade Anzahl von Wendepunkten, je nachdem er paar oder unpaar ist. Ein unpaarer Zug erstreckt sich immer durch das Unendlichferne hindurch.

Die vorstehenden Begriffe und Sätze verdanken wir v. Staudt, a. a. O., § 12, 15, und Moebius, *Leipz. Ber.* 1848, S. 179, *Leipz. Abh.* **1**, 1 (1852), *Werke* II, 185, 91. Der letztere leitete sie aus der Betrachtung der sphärischen Kurven ab mit Hilfe einer Abbildung der projektiven ebenen Geometrie auf die sphärische Geometrie, die er durch Projektion der Ebene auf die Kugel von deren Mittelpunkte gewann. Vgl. auch Zeuthen, *Math. Ann.* **7**, 410 (1874); Kneser, ebenda **31**, 507 (1888), **34**, 205 (1889) und besonders **41**, 349 (1893); Scott, *Amer. M. S. Trans.* **3**, 388, 399 (1902).

Harnack, *Math. Ann.* **10**, 189 (1876), hat bewiesen, daß *eine reelle algebraische Kurve* (vgl. § 1) *vom Geschlecht p nicht mehr als p + 1 reelle Züge haben kann und für jeden Wert von p auch wirklich Kurven mit p + 1 reellen Zügen existieren.* Die gegenseitige Lage, die dann die $p + 1$ Züge haben können, hat für singularitätenfreie Kurven (bei denen alle Züge paar sind, wenn die Ordnung n der Kurve gerade und ein einziger unpaar wird, wenn n ungerade ist) Hilbert untersucht, *Math. Ann.* **38**, 115 (1891). Vgl. Hulburt, *Am. M. S. Bull.* **1**, 197 (1892), *Amer. Journ. of M.* **14**, 246 (1892); Ragsdale, ebenda **28**, 376 (1906).

Einen wichtigen Beitrag zu den Untersuchungen über die allgemeinen Realitätsverhältnisse bei algebraischen Kurven hat F. Klein geliefert, erstlich durch Einführung einer neuen Art Riemannscher Flächen, sodann durch die Weiterführung der allgemeinen Riemannschen Theorie, insbesondere des Riemannschen Existenztheorems der algebraischen Funktionen und der Eigenschaften der Abelschen Integrale.

Sieht man die gegebene Kurve f als Klassenkurve an, so kann man jeder ihrer Tangenten einen reellen Punkt entsprechen lassen, nämlich, wenn die Tangente reell ist, ihren Berührungs-

punkt, wenn sie imaginär ist, ihren einzigen reellen Punkt. Die ∞^2 reellen Punkte, die man so erhält, bilden eine geschlossene Fläche F, welche die verschiedenen Gebiete der Ebene mit so viel Blättern überdeckt, als imaginäre Tangenten von f durch irgendeinen Punkt des in Rede stehenden Gebietes gehen. Längs jedes reellen Zuges der Kurve hängen zwei Blätter der Fläche zusammen.

Ist f reell, vom Geschlecht p, mit w' reellen Wendetangenten und t'' isolierten Doppeltangenten, so ist der „Zusammenhang" von F gleich $2p + w' + 2t''$. Die Kurve f und die zugehörige Fläche F heißen *orthosymmetrisch* oder *diasymmetrisch*, je nachdem F, längs aller Kurvenzüge von f aufgeschnitten, zerfällt oder nicht. Vgl. Klein, *Math. Ann.* **7**, 558 (1874), **9**, 476 (1876), **10**, 365, 398 (1876), **11**, 293 (1877); ferner *Riemannsche Flächen* I, 208ff.

Später hat Klein die *symmetrischen Riemannschen Flächen* betrachtet, die eine konforme Abbildung auf sich selbst mit Umlegung der Winkel und der Periode 2 zulassen, indem er zeigte, daß den reellen algebraischen Kurven symmetrische Riemannsche Flächen zugehören, und umgekehrt unter den unendlich vielen algebraischen Kurven, die einer solchen Fläche korrespondieren, sich immer reelle befinden. Die *Symmetrielinien* der Fläche, deren Punkte bei der erwähnten symmetrischen Abbildung ungeändert bleiben, entsprechen den reellen Zügen der reellen Kurve. Daraus folgt die Scheidung der symmetrischen Flächen und der zugehörigen reellen Kurven in $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten: es gibt $p+1$ Arten diasymmetrischer und $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ Arten orthosymmetrischer Flächen mit bzw. $0, 1, \ldots, p$ und $p+1$, $p-1$, $p-3, \ldots$ Symmetrielinien. Vgl. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, 1882, S. 64ff., *Riemannsche Flächen* I, 227, II, 117; *Math. Ann.* **19**, 159 (1882), **42**, 1 (1893); s. auch Weichold, *Ztschr. f. M.* **28**, 321 (1883).

Kapitel XIV.

Die Geometrie auf einer ebenen algebraischen Kurve.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

§ 1. Der Noethersche Fundamentalsatz.

Die *Geometrie auf einer algebraischen Kurve* hat zum Gegenstand die Eigenschaften der Kurve, die bei einer birationalen Transformation ungeändert bleiben (vgl. Kap. XIII, § 11 und Kap. XV, § 1). Sie ist auf transzendentem Wege durch Riemann, *Abelsche Funktionen*, 1857, und Clebsch-Gordan, 1866, begründet und auf algebraisch-geometrischem Wege von Brill-Noether, 1874, auf algebraisch-arithmetischem Wege von Kronecker und Dedekind-Weber (*J. f. Math.* **92**) 1882, auf rein geometrischem Wege (mit Hilfe der Überräume) von Segre, Castelnuovo und anderen italienischen Mathematikern weiter entwickelt worden.

Neuere Darstellungen der funktionentheoretischen Methoden geben: Klein-Fricke, *Theorie der elliptischen Modulfunktionen* I, 1890; Klein, *Riemannsche Flächen*; Picard, *Traité*; der algebraisch-geometrischen Methoden: Bertini, *Geom. serie lin.*; H. Stahl, *Theorie der Abelschen Funktionen*, 1896 (Abschn. 2 und 4); Picard-Simart (Chap. 1, 2); der geometrischen Methoden: Segre, *Introduzione*; der algebraisch-arithmetischen: Hensel-Landsberg; der ersten drei Methoden: Severi, *Lezioni*.

Wir werden uns insbesondere an die Methode von Brill und Noether halten, die sich auf dem *Noetherschen Fundamentalsatze* aufbaut. Dieser drückt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aus, daß, wenn zwei Kurven $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ ohne gemeinsame Stücke gegeben sind, die linke Seite der Gleichung $F(x, y) = 0$ einer dritten Kurve sich in die Form $F = Af + B\varphi$ bringen läßt, wobei A, B zwei ganze Polynome von x, y bedeuten. Die Bedingung ist die, daß

für jeden gemeinsamen Punkt (x_0, y_0) *der beiden ersten Kurven sich zwei Reihenentwicklungen* A', B' *nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen von* $x - x_0$, $y - y_0$ *finden lassen derart, daß bis auf Glieder von genügend hoher Dimension identisch*

$$F = A'f + B'\varphi$$

wird. Vgl. Noether, *Math. Ann.* **2**, 314 (1870), **6**, 351 (1873), **30**, 410 (1887), **40**, 140 (1892); außerdem Halphen, *Bull. Soc. M.* **5**, 160 (1877); Voß, *Math. Ann.* **27**, 527 (1886); Stickelberger, ebenda **30**, 401 (1887); Brill, ebenda **39**, 129 (1891), u. a. m. (s. u. § 9).

Bertini, *Math. Ann.* **34**, 447 (1889) (vgl. Noether, ebenda S. 450) hat bemerkt, daß *für einen Punkt, den* $f = 0$ r*-fach,* $\varphi = 0$ s*-fach enthält und der* $\alpha (\geqq r \cdot s)$ *ihrer Schnittpunkte absorbiert, die Übereinstimmung bis auf die Glieder der Dimension* $\alpha - rs + r + s - 2$ *inklusive genügt,* und er hat in *Lomb. Ist. Rend.* (2) **24**, 1095 (1891) eine systematische algebraische Darstellung des Gegenstandes gegeben.

Besonders wichtig für die Brill-Noethersche Theorie der linearen Scharen ist der „einfache Fall", wo die Kurven f, φ in ihren gemeinsamen Punkten keine gemeinsame Tangente besitzen. *Dann ist, damit eine dritte Kurve eine Gleichung von der Form* $Af + B\varphi = 0$ *hat, hinreichend, daß sie in jedem Punkte, durch den* f r*-mal,* φ s*-mal geht, die Multiplizität* $r + s - 1$ *besitzt; die Kurven* $A = 0$, $B = 0$ *lassen sich so wählen, daß sie in einem solchen Punkte mindestens die Multiplizitäten* $s - 1$, $r - 1$ *haben.* Für diesen Fall findet man einen einfachen algebraischen Beweis bei Voß, *Math. Ann.* **27**, 532 (1886), einen geometrischen bei Ch. A. Scott, ebenda **52**, 593 (1899), einen anderen bei Severi, *Lezioni,* p. 143, wiederholt *Padova Atti e Mem.* **24**, 137 (1908). Hier ist auch bemerkt, daß sich in das derart spezialisierte Theorem jeder Fall einschließen läßt, wenn man nur unendlich benachbarte vielfache Punkte mit in Betracht zieht.

§ 2. Die linearen Scharen von Punktgruppen.

Es sei f eine ebene irreduzible algebraische Kurve, und man betrachte die Punktgruppen, die aus ihr durch die Kurven eines linearen Systems ausgeschnitten werden. Diese Schnittpunkte können alle veränderlich sein; im anderen Falle können irgendwelche oder alle festen Schnittpunkte als zu den Punktgruppen gehörig betrachtet werden. Die Gesamtheit der Punktgruppen, die man so erhält, bezeichnet man als eine *lineare Schar*

der *Ordnung n,* wenn n die Anzahl der Punkte einer allgemeinen Gruppe ist, und von der *Dimension r,* wenn ∞^r Punktgruppen in der Schar enthalten sind. Man bezeichnet eine solche Schar mit g_n^r.

Besteht das gegebene Kurvensystem aus ∞^R Kurven, unter denen ∞^h die Kurve f als Teil enthalten, so ist die Dimension $r = R - h - 1$. Indessen kann man immer g_n^r durch ein lineares System von ∞^r Kurven aus f ausschneiden, das in dem gegebenen System enthalten ist und von dem eine und nur eine Kurve durch jede einzelne Punktgruppe der Schar geht.

Ist f nicht rational, so ist $r < n$.

Nimmt man bei allen Gruppen einer g_n^r n' feste Punkte hinweg oder fügt sie hinzu, so entsteht eine $g_{n \pm n'}^r$.

Ein Punkt A von f heißt *vielfach* für eine lineare Schar, wenn in ihm *auf demselben Zweig von f* mehrere Punkte einer beweglichen Punktgruppe der Schar zusammenfallen.

Eine birationale Transformation von f führt eine g_n^r in eine andere g_n^r und einen ν-fachen Punkt der ersten Schar in einen ν-fachen Punkt der zweiten Schar über.

Es gehören r allgemeine Punkte von f zu einer einzigen Gruppe von g_n^r. Allgemeiner bilden die Punktgruppen einer g_n^r, die $k (\leqq r)$ Punkte von f enthalten, eine lineare Schar, die im allgemeinen von der Dimension $r - k$ ist.

Nennt man *Involution* von der *Ordnung n* und *Dimension r* ein algebraisches System von ∞^r Gruppen mit je n Punkten von der Art, daß r allgemeine Punkte von f zu einer und nur einer Gruppe des Systems gehören, so ist für $r > 1$ jede solche Involution eine rationale, d. h. eine g_n^r; für $r = 1$ gibt es aber auch anders geartete (irrationale) Involutionen (vgl. Kap. XV, § 5).

Ist eine g_n^r $(r > 1)$ so beschaffen, daß diejenigen ihrer Gruppen, die einen bestimmten Punkt enthalten, auch notwendig noch andere Punkte gemein haben, so existiert auf f eine eindimensionale Involution (die rational sein kann oder nicht), derart daß jede Gruppe von g_n^r aus einer gewissen Anzahl von Gruppen dieser Involution besteht. Dann heißt g_n^r mit dieser Involution *zusammengesetzt.*

Mit Ausnahme dieses Falles können nicht die Gruppen einer g_n^r, die irgend s beweglichen Punkte enthalten $(1 < s < r)$, auch notwendigerweise noch andere Punkte gemein haben. S. Bertini, *Torino Atti* **26**, 118 (1890) und *Geom. ser. lin.*, n. 29, 34.

Die g_n^1 können als *rationale einstufige Involutionen* charakterisiert werden, d. h. als solche, deren Gruppen in birationale

Beziehung zu einem Parameter λ gebracht werden können. Daraus ergibt sich, daß, wenn x, y die Koordinaten eines Punktes der Gruppe sind,

$$\varphi(x, y) - \lambda\psi(x, y) = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

wird, wobei φ, ψ ganze Funktionen bedeuten. Die Funktionen, die wie λ rationale Funktionen von den Koordinaten der Kurvenpunkte sind, nennt man nach Weierstraß *rationale Funktionen der Kurve f*. In jedem Punkte von f nimmt eine solche Funktion einen eindeutig bestimmten Wert an, den man entweder direkt erhält, indem man die Koordinaten des Punktes einsetzt, oder als Grenzwert, wenn dieses Einsetzen sowohl φ wie ψ zum Verschwinden bringt.

Eine Gruppe in einer g_n^1 wird also von den Punkten gebildet, in denen eine gegebene rationale Funktion von f denselben Wert annimmt, wenn man *eventuelle Fixpunkte der Schar ausschließt*, für die Zähler und Nenner der rationalen Funktion gleichzeitig verschwinden. Die Gruppen der Involution sind auf f, wie man sagt, *Gruppen gleichen Niveaus* für eine rationale Funktion von f.

Die Ordnung n der Schar (*Grad* der rationalen Funktion nach Weierstraß, *Wertigkeit* nach Klein) ist gleichzeitig die Zahl der Nullstellen und die der Pole der rationalen Funktion.

Während eine rationale Funktion λ von f eine g_n^1 festlegt, wird durch diese umgekehrt λ nur bis auf eine lineare Substitution bestimmt, und es können deshalb zwei willkürliche Gruppen der g_n^1 als die Gruppen, für die λ null und unendlich werden soll, ausgewählt werden.

Durch die Multiplizitäten ν einer g_n^1 auf f läßt sich das Geschlecht p der Kurve in neuer Weise ausdrücken, und so wird seine Invarianz für die birationalen Transformationen der Kurve augenscheinlich gemacht. Man hat nämlich

$$\sum(\nu - 1) - 2n = 2p - 2 .$$

Vgl. Segre, *Introd.*, § 8; Bertini, *Introd.*, p. 397.

Eine Kurve vom Geschlecht $p > 1$, auf der eine g_2^1 existiert, heißt *hyperelliptisch*. Dazu gehören u. a. alle Kurven vom Geschlecht $p = 2$. *Elliptisch* heißt jede Kurve vom Geschlecht $p = 1$. Eine Kurve, die eine g_n^1, aber keine g_{n-1}^1 enthält, heißt *n-gonal*.

Auch eine g_n^r für $r > 1$ läßt sich ansehen als Gesamtheit der Punktgruppen konstanten Niveaus für eine rationale Funktion

von f. Diese muß aber hier $r-1$ willkürliche Parameter linear enthalten. Man kann nämlich zunächst die g_n^r durch eine Gleichung

$$\varphi_0(x,y)+\lambda_1\varphi_1(x,y)+\cdots+\lambda_r\varphi_r(x,y)=0$$

geben. Dann aber lassen sich ihre einzelnen Gruppen auch durch bestimmte Werte — λ_r der folgenden Funktion festlegen:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_r}+\lambda_1\frac{\varphi_1}{\varphi_r}+\cdots+\lambda_{r-1}\frac{\varphi_{r-1}}{\varphi_r}.$$

§ 3. Der Restsatz. Voll- und Teilscharen. Operationen mit linearen Scharen.

Zwei Punktgruppen auf f heißen zueinander *residual* oder die eine der *Rest* (das *Residuum*) der anderen, wenn sie zusammen den vollständigen Schnitt von f mit einer adjungierten Kurve (s. vor. Kap. § 11), abgesehen von den in die mehrfachen Punkte fallenden Schnittpunkten, bilden. Zwei Gruppen, die zu einer dritten residual sind, heißen *korresidual* (Brill-Noether) oder *äquivalent* (Dedekind-Weber).

Wie Brill und Noether gezeigt haben, ergibt sich als eine wichtige Folgerung aus dem Noetherschen Fundamentalsatz (§ 1) in Verbindung mit den adjungierten Kurven der sogenannte *Restsatz:*

Wenn zwei Gruppen G_u, $G_{u'}$ von u, u' Punkten auf f Reste einer Gruppe G_q sind und überdies G_u Rest einer anderen Gruppe $G_{q'}$ ist, so ist auch $G_{u'}$ Rest von $G_{q'}$. Mit anderen Worten: der Begriff der korresidualen Gruppen ist unabhängig von der gemeinsamen Restgruppe.

Im besonderen *ist eine Punktgruppe, wenn sie Rest einer Gruppe aus einer linearen Schar ist, auch Rest von jeder anderen Gruppe der Schar,* so daß die Schar nichts anderes ist als eine Schar von korresidualen Punktgruppen, und das Wort *korresidual* oder *äquivalent* sich direkt zur Bezeichnung von Gruppen *derselben linearen Schar* verwenden läßt.

Eine g_n^r heißt eine *Vollschar*, wenn keine lineare Schar von der Ordnung n und von einer Dimension $> r$ existiert, die sie enthält, im entgegengesetzten Falle eine *Teilschar.*

Alle adjungierten Kurven einer gegebenen Ordnung oder alle, die noch durch gewisse feste einfache Punkte von f hindurchgehen, schneiden f außer in diesen und den mehrfachen Punkten in einer Vollschar, und umgekehrt läßt sich jede Vollschar auf solche Weise gewinnen.

Es folgt daraus, daß *es eine einzige Vollschar von der Ordnung n gibt, die eine gegebene Gruppe von n Punkten (oder eine gegebene lineare Schar der Ordnung n) enthält.* Um sie zu finden, genügt es, durch die gegebene Gruppe G (oder eine Gruppe G der gegebenen Schar) eine adjungierte Kurve zu legen, diese schneidet f außer in G und den mehrfachen Punkten in einer Punktgruppe G'. Dann schneiden die die durch G' hindurchgehenden adjungierten Kurven, welche dieselbe Ordnung haben wie die bereits verwendete, die gesuchte Vollschar aus.

Allgemeiner: *Zwei lineare Scharen derselben Ordnung, die eine Punktgruppe gemein haben, sind in einer und derselben, auf diese Weise vollkommen bestimmten Vollschar von der gleichen Ordnung enthalten.*

Ist g_n^s die Vollschar, in der eine gegebene g_n^r enthalten ist, so heißt die Differenz $s - r \ (\geqq 0)$ *Defekt (deficienza, défaut)* von g_n^r.

Alle Gruppen von $N = n + n'$ Punkten, die durch Vereinigung von je zwei Punktgruppen aus zwei Scharen g_n^r und $g_{n'}^{r'}$ entstehen, sind in einer Vollschar g_N^R enthalten, welche die *Summe* der beiden gegebenen Scharen heißt, und man schreibt

$$g_N^R = g_n^r + g_{n'}^{r'}.$$

Die Erweiterung auf die Summe von mehr als zwei Scharen und ganzzahlige Vielfache einer Schar liegt auf der Hand.

Die Differenz zweier Vollscharen g_N^R, g_n^r läßt sich nur bilden, wenn eine und damit alle Gruppen von g_n^r in einer Gruppe von g_N^R enthalten sind. Dann existiert eine dritte vollkommen bestimmte Vollschar $g_{n'}^{r'}$ $(n' = N - n)$, derart daß $g_n^r + g_{n'}^{r'} = g_N^R$ wird. Diese heißt die *Differenz* von g_N^R und g_n^r; g_n^r und $g_{n'}^{r'}$ heißen *Residuen voneinander* in bezug auf g_N^R. Vgl. Bertini, *Geom. ser. lin.*, § 2, 3; Segre, *Introd.*, § 14; Severi, *Lezioni*, p. 90.

Alle diese Begriffe sind wie die der Voll- und Teilscharen für alle birationalen Transformationen der Kurve invariant.

In anderer fruchtbarer Weise hat Castelnuovo (*Rendic. Circ. M.* **7**, 89 (1893)) den Begriff der Summe zweier linearen Scharen festgelegt und davon z. B. für die Bestimmung des (auch wirklich erreichbaren) Maximalgeschlechtes einer Kurve, die eine nicht zusammengesetzte g_n^r enthält, Gebrauch gemacht. Diese Zahl wird:

$$\chi[n - r - \tfrac{1}{2}(\chi - 1)(r - 1)],$$

unter χ die größte ganze Zahl $< \frac{n-1}{r-1}$ verstanden. Vgl. noch Castelnuovo, *Torino Atti* **24**, 346 (1889); Bertini, ebenda **26**, 118 (1890); S. Kantor, *Acta Math.* **25**, 113 (1900).

§ 4. Speziale und nicht-speziale Scharen.

1. *Speziale und nicht-speziale Scharen.* Ist f irreduzibel, von der Ordnung m und dem Geschlecht p, so sind die Bedingungen, die durch die mehrfachen Punkte von f den adjungierten Kurven einer gegebenen Ordnung $l \geqq m-3$ auferlegt werden, unabhängig voneinander. Ist $l = m-3+\alpha$ $(\alpha > 0)$, so ist die von den adjungierten Kurven auf f ausgeschnittene Vollschar eine $g^{m\alpha+p-2}_{m\alpha+2p-2}$; derartige adjungierte Kurven existieren also für $m > 2$ immer.

Die adjungierten Kurven der Ordnung $m-3$ heißen die *φ-Kurven* und existieren nur für $p \geqq 1$. Eine lineare Schar von Punktgruppen heißt *spezial* oder *nicht-spezial*, je nachdem sie sich durch ein lineares System von φ-Kurven erhalten läßt oder nicht. Ihr *Spezialitätsindex* heißt die Zahl der linear unabhängigen φ-Kurven, die durch ihre Punktgruppen hindurchgehen.

Das System aller φ-Kurven schneidet f in einer Vollschar g^{p-1}_{2p-2}, welche die einzig existierende dieser Ordnung und Dimension ist und die *kanonische Schar* von f heißt. Sie enthält keine festen Punkte und ist nicht zusammengesetzt, vorausgesetzt daß f nicht hyperelliptisch ist.

Die speziellen Scharen sind somit die kanonische Schar und die in ihr enthaltenen Scharen. Für diese wird $r \leqq p-1$, $n \leqq 2p-2$.

Diese Eigenschaften sind eine Folge nachstehender Sätze:

Reduktionssatz. Damit die durch eine gegebene Gruppe von $n+1$ Punkten bestimmte Vollschar $(n+1)^{ter}$ Ordnung in einem von diesen Punkten, P, einen festen Punkt besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß sich durch die übrigen n Punkte eine φ-Kurve legen läßt, die nicht durch P geht (Noether, *J. f. Math.* **97**, 224 (1884); *Math. Ann.* **37**, 424 (1890)).

Spezialgruppensatz. Für eine spezielle Vollschar g^r_n ist $r > n-p$ und für eine nicht spezielle $r = n-p$; umgekehrt ist eine Voll- oder Teilschar g^r_n, für die $r > n-p$, eine spezielle.

Riemann-Rochscher Satz. Wenn eine Vollschar von der Ordnung n auf einer irreduzibeln Kurve vom Geschlecht p den

Spezialitätsindex $i\,(\geqq 0)$ hat, so wird ihre Dimension r durch die Gleichung bestimmt:

$$r = n - p + i.$$

Roch (*J. f. Math.* **64**, 372 (1865)) hat diesen von Riemann für den Fall $i = 0$ gefundenen Satz allgemein ausgesprochen. Das Theorem hat bei ihm die analytische Form: *Die rationalen Funktionen einer Kurve vom Geschlecht p, deren einfache Pole unter den n Punkten einer gegebenen Gruppe enthalten sind, hängen linear und homogen von $n - p + i + 1$ Konstanten ab, wenn durch die Punktgruppe i linear unabhängige φ-Kurven gehen.*

Eine andere Form desselben Satzes, die man Brill und Noether verdankt, ist der

Reziprozitätssatz. Jede speziale Vollschar g_n^r hat als Residualschar bezüglich der kanonischen Schar eine andere speziale Vollschar $g_{n'}^{r'}$, wobei

$$n + n' = 2p - 2, \quad n - n' = 2(r - r').$$

Zu allen vorstehenden Sätzen vergleiche man die abgekürzt zitierten Schriften von Bertini, Segre und Severi.

Die Sätze selbst zeigen für eine irreduzible f *die geometrische Bedeutung von p als die Zahl der linear unabhängigen Kurven φ, ferner die Invarianz von p und der spezialen Scharen bei allen birationalen Transformationen von f, indem eine solche Transformation einer linearen Transformation der φ äquivalent ist (Invarianzsatz).*

Außerdem ist das *reine adjungierte System von f*, d. h. (für $p > 1$) das lineare System der Kurven φ, von etwaigen festen Bestandteilen befreit, *invariant bei allen birationalen Transformationen der Ebene.* Dieser Satz stammt von Noether, *Math. Ann.* **23**, 311 (1884), Anwendungen von ihm machten S. Kantor u. a., insbesondere Castelnuovo, *Torino Mem.* (2) **42**, 3 (1891), auf die linearen Kurvensysteme (§ 13).

Das reine adjungierte System schneidet auf f die kanonische Schar aus. Wenn es reduzibel ist, ist f hyperelliptisch, aber nicht umgekehrt.

2. *Anwendungen. Definition von p nach Weierstraß; Lückensatz.* Unter den zahlreichen Anwendungen der Sätze der vorigen Nummer wollen wir das folgende Theorem hervorheben:

Damit eine irreduzible ebene Kurve m^{ter} Ordnung die Projektion einer Raumkurve gleicher Ordnung aus einem Raumpunkte auf die Ebene wird, ist für $m > p + 2$ keine Bedingung zu erfüllen,

während für $m \leqq p+2$ es hinreicht, wenn von den durch die mehrfachen Punkte den adjungierten Kurven der Ordnung $m-4$ auferlegten Bedingungen eine eine Folge der übrigen ist.

Dieses Theorem fanden gleichzeitig H. Valentiner, *Acta Math.* **2**, 170 (1882); Halphen, *J. éc. polyt.* **52**, 26 (1882); Noether, *Berl. Abh.* 1882, S. 23. Vgl. auch Küpper, *Math. Ann.* **31**, 291 (1888); Segre, *Introd.* n. 85; Bertini, *Torino Atti* **26**, 118 (1890).

Eine andere Folgerung ist das nach Clifford (*Phil. Trans.* **169**, 681 (1878), *Papers*, p. 331) benannte Theorem: *Für jede speziale g_n^r ist $n \geqq 2r$, und das Gleichheitszeichen gilt nur für die kanonische Schar oder wenn die Kurve hyperelliptisch ist.* Vgl. auch die Schriften von Bertini, Segre, Severi.

Den folgenden Satz hat Weierstraß (*Werke* IV, 69) in analytischer Form zur Definition des Geschlechtes benutzt:

Die geringste Zahl von Punkten, die sich in allgemeiner Lage zur Bestimmung einer Gruppe aus einer linearen Schar der Dimension 1 annehmen lassen, ist $p+1$. Vgl. Ed. Weyr, *Prag. Abh.* (6) **6** (1874), *Wien. Ber.* **69**, 399 (1874); Halphen, *Étude*, p. 632; Picard, *Traité*, p. 473, 503; Severi, *Lezioni*, p. 177.

Eine andere Definition von p, die wie die vorhergehende die Invarianz von p für birationale Transformationen sofort erkennen läßt und ebenfalls an die Ordnungen der rationalen Funktionen von f anknüpft, erhält man aus dem sog. *Weierstraßschen Lückensatz* (*Werke* IV, Kap. 9), dem Noether, *J. f. Math.* **97**, 224 (1884), folgende erweiterte Form gegeben hat: Auf f betrachte man irgend n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$, indem man n so groß wählt, daß durch diese Punkte keine φ-Kurve geht. Bezeichnet man dann mit G_i die Gruppe der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *so entsprechen diejenigen unter diesen Gruppen G_i, die zusammen mit festen Punkten Vollscharen bestimmen, gewissen p Werten von i.* Der eigentliche Lückensatz geht hieraus hervor, wenn man die n Punkte in einen Punkt zusammenfallen läßt. In analytischer Form lautet er:

Unter den rationalen Funktionen von f, deren i Pole in einen einzigen Pol von der Ordnung i zusammenfallen, fehlen nur diejenigen, die zu gewissen p Werten von i gehören.

Ist P ein allgemeiner Punkt der Kurve f, so wird die Reihenfolge der fehlenden Ordnungen durch die Zahlen $1, 2, \ldots, p$ gebildet. Eine Abweichung hiervon tritt nur ein, wenn P einer der (stets in endlicher Zahl vorhandenen) Weierstraßschen Punkte ist, welche die p-fachen Punkte der kanonischen Schar bilden (vgl.

§ 10). Für ein allgemeines P s. Noether, *J. f. Math.* **92**, 301 (1882). Für alles Vorstehende vgl. die Schriften von Segre und Severi.

3. *Bemerkungen über die rein invariante Theorie.* Die kanonische Schar läßt sich, nach F. Enriques, *Torino Atti* **37**, 19 (1901) (vgl. Severi, *Lezioni*), auch in der folgenden, auf dem Operieren mit linearen Scharen (§ 3) beruhenden Weise erhalten:

Wir nennen *Jacobische Gruppe* einer g_n^r die Gruppe ihrer Doppelpunkte. Zunächst ergibt sich dann, daß die *Jacobischen Gruppen der verschiedenen g_n^1 einer g_n^r einer und derselben Vollschar von der Ordnung $2n + 2p - 2$ angehören,* welche die *Jacobische Schar* von g_n^r heißt. Weiter ist die *Jacobische Schar der Summe zweier Vollscharen die Summe von der Jacobischen Schar einer der beiden gegebenen Scharen und dem Doppelten der anderen,* woraus man ableiten kann, daß *die Differenz zwischen der Jacobischen Schar einer auf der Kurve beliebig gegebenen g_n^r und dem Doppelten von g_n^r unabhängig von der g_n^r ist und eben mit der kanonischen Schar zusammenfällt.*

§ 5. Erweiterungen und spezielle Fälle.

1. *Die Sonderfälle der rationalen, elliptischen, hyperelliptischen und i-gonalen Kurven.* Für $p = 0$ existieren keine adjungierten φ-Kurven, für $p = 1$ existiert (wenn die Ordnung der Kurve > 3) eine einzige solche Kurve. Die Vollscharen für $p = 0$ sind die g_n^n, d. h. sie bestehen aus *allen* möglichen Gruppen von n Punkten; für $p = 1$ sind es die g_n^{n-1}.

Für $p = 0$, wenn die Punkte der Kurve in eindeutiger Weise den Werten eines Parameters λ entsprechen (§ 11), erhält man eine Gruppe von n Punkten der Kurve aus den Werten von λ, die einer Gleichung n^{ten} Grades genügen. Es wird deshalb eine g_n^r gegeben durch die Wurzeln einer Gleichung:

$$a_1 f_1(\lambda) + a_2 f_2(\lambda) + \cdots + a_{r+1} f_{r+1}(\lambda) = 0,$$

in der die a veränderliche Parameter und die f ganze Funktionen n^{ter} Ordnung bezeichnen. Die g_n^r sind die Involutionen der Ordnung n und Stufe r, die auf der Kurve liegen. Vgl. u. § 11.

Wenn eine Kurve zwei g_2^1 enthält, ist $p = 0$ oder $p = 1$, je nachdem die beiden Scharen ein Punktepaar gemein haben oder nicht. Ist $p = 0$, so existieren auf der Kurve ∞^2 solche g_2^1, von denen irgend zwei ein Paar gemein haben und irgend eine durch zwei Paare eindeutig bestimmt ist. Ist $p = 1$, so existieren auf der Kurve ∞^1 g_2^1, von denen keine zwei ein Paar gemein haben

und jede durch ein Paar bestimmt ist. In beiden Fällen enthält die Kurve keine spezialen Scharen.

Die hyperelliptischen Kurven sind durch die Existenz einer g_2^1 definiert; jede spezialе, von festen Punkten freie g_n^r ist dann mit dieser g_2^1 zusammengesetzt. Ist die g_n^r eine Vollschar, so hat man noch $n = 2r$. Außerdem ist die einzige nicht spezialе, zusammengesetzte Vollschar von einer Dimension >1 eine mit der g_2^1 zusammengesetzte g_{2p}^p. Umgekehrt ist jede Kurve, die eine zusammengesetzte g_{2r}^r $(r > 1)$ enthält, *hyperelliptisch, elliptisch* $(p = 1)$ oder *rational* $(p = 0)$.

Ist die Kurve hyperelliptisch und von der Ordnnng m, so ist die Einhüllende der die Punktepaare ihrer g_2^1 verbindenden Geraden eine rationale Kurve von der Klasse $m - p - 1$.

Für das Vorstehende vergleiche Bertini, *Geom. ser. lin.*; hier (n. 43ff.) finden sich auch Sätze über solche Kurven vom Geschlecht p, die eine von festen Punkten freie g_i^1 enthalten, wobei $i \leqq p$, insbesondere über die i-gonalen Kurven. Für die Literatur betr. diese letzteren s. Amodeo, *Congrès math. Paris* 1902, p. 313 oder *Period. di mat.* (2) **3**, 69 (1900).

2. *Erweiterungen der Theorie.* Noether, *Math. Ann.* **15**, 507 (1879), hat untersucht, wie sich die Geometrie auf einer Kurve f gestaltet, wenn man ihre Schnitte mit nicht adjungierten Kurven in Betracht zieht, und die Modifikationen des Restsatzes sowie des Riemann-Rochschen Satzes für diesen Fall betrachtet.

Er hat ferner, *Acta math.* **8**, 161 (1886), den Fall einer reduzibeln Kurve f behandelt; dann bleibt der Restsatz bestehen (vgl. dazu *Math. Ann.* **23**, 311 (1884)); auch die Formel des Riemann-Rochschen Satzes $r' = p - n + r - 1$ bleibt gültig, nur bezeichnen jetzt r, r' die Mannigfaltigkeitsstufen der φ-Kurven und nicht der von ihnen ausgeschnittenen Punktgruppen. Zerfällt f in λ irreduzible Kurven, so ist die Zahl der linear unabhängigen φ-Kurven $p + \lambda - 1$, wie schon Christoffel (*Ann. di Mat.* (2), **10**, 81 (1880)) gefunden hat. Daraus resultiert, da man von der Kurvengleichung ausgehend sowohl p wie $p + \lambda - 1$ in rationaler Weise bestimmen kann (Kap. XIII, § 11, Nr. 1, 2), ein Kriterium für das Zerfallen von f und für die Anzahl seiner irreduzibeln Teile.

§ 6. Das Problem der Spezialgruppen und ausgezeichneten Gruppen.

Für eine irreduzible Kurve f vom Geschlecht p *mit allgemeinen Moduln* (§ 8) haben Brill und Noether, vom Riemann-Rochschen Satze ausgehend, die spezialen g_n^r $(n - r < p)$ behan-

delt, indem sie eine Gruppe G_n suchten, durch die $\infty^{r'}\varphi$-Kurven, für $r' = r - (n - p + 1)$, hindurchgehen. Es ergibt sich die Bedingung

$$p \geqq (r+1)(r'+1) \text{ oder } n \geqq \frac{r(r+p+1)}{r+1},$$

die für jedes r die kleinsten Werte von n, d. h. die *Minimalscharen* liefert. Setzt man dann

$$\tau = (r+1)(n-r) - rp = p - (r+1)(r'+1),$$

so lassen sich von der gesuchten $G_n r + \tau$ Punkte willkürlich geben, und die übrigen sind durch diese auf eine endliche Anzahl α von Arten algebraisch bestimmt. Die Dimensionenzahl der spezialen (und auch der nicht-spezialen) g_n beträgt somit τ. Das *Problem der Spezialgruppen* besteht in der Bestimmung der Zahl α. Für $r = 1$ findet man

$$\alpha = \frac{1}{\sigma}\binom{2\sigma}{\sigma-1}, \text{ wenn } p = 2\sigma, \quad \alpha = \frac{2}{\sigma}\binom{2\sigma+1}{\sigma-1}, \text{ wenn } p = 2\sigma+1.$$

Vgl. Brill-Noether, S. 296; Brill, *Math. Ann.* **36**, 321 (1890). Für $\tau = 0$ fand Castelnuovo, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) $\mathbf{5}^2$, 130 (1889), den Wert

$$\alpha = \frac{1!\,2!\,\ldots\,r!\cdot 1!\,2!\,\ldots\,r'!\,p!}{1!\,2!\,\ldots\,(r+r'+1)!}.$$

Brill hat (a. a. O.) auch ein allgemeineres Problem behandelt, indem er f mit einem linearen System von beliebigen Kurven ψ zum Schnitt brachte und auf f die *ausgezeichneten Punktgruppen* von k Punkten bestimmte, die den ψ weniger als k unabhängige Bedingungen auferlegen. Vgl. ebenfalls für die Lösung anderer abzählenden Aufgaben, welche die linearen Scharen betreffen (s. auch § 10, und Kap. XV, § 5), Castelnuovo, *Rend. Circ. M.* **3**, 27 (1888); Zeuthen, *Math. Ann.* **40**, 118 (1892); Tanturri, *Ann. di mat.* (3) **4**, 67 (1900), *Torino Atti* **39**, 483 (1904); Severi, *Torino Mem.* (2) **50**, 81 (1901); Giambelli, *Torino Mem.* (2) **59**, 433 (1909).

§ 7. Normalkurven.

Die Minimalscharen (§ 6) können dazu dienen, eine Kurve f *mit allgemeinen Moduln* (§ 8) in eine *Normalkurve* zu transformieren (Brill-Noether § 13). Für $r = 2$ erhält man die ebenen Normalkurven von der niedrigsten Ordnung, nämlich $p - \pi + 2$,

die $\frac{1}{2}(p-\pi+1)(p-\pi)-p$ Doppelpunkte haben. Hierbei ist $\pi=\left[\frac{p}{3}\right]$.

Die Riemannsche Normalkurve erhält man für $r=1$. Sie ist, wenn p gerade ist, eine c_{p+2} mit zwei $\frac{p+2}{2}$-fachen Punkten, wenn p ungerade ist, eine c_{p+3} mit zwei $\frac{p+3}{2}$-fachen Punkten (die übrigen singulären Punkte sind Doppelpunkte). Die Clebsch-Gordansche Normalkurve ist eine c_{p+1} mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten.

Für $r>2$ erhält man die Normalkurven niedrigster Ordnung in den linearen Räumen R_s von s ($\geqq 3$) Dimensionen. Die kanonische Schar liefert, wenn f nicht hyperelliptisch ist, die Normalkurve von der Ordnung $2p-2$ des R_{p-1}, die sog. *Normalkurve der φ*, die in der Form

$$y_1 : y_2 : \ldots : y_p = \varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p$$

dargestellt wird, wenn die y_i homogene Punktkoordinaten im R_{p-1}, $\varphi_i(x,y)=0$ die Gleichungen von p linear unabhängigen φ-Kurven sind und man sich x, y durch die Gleichung $f(x,y)=0$ der Grundkurve verknüpft denkt. Von linearen Transformationen abgesehen, gibt es nur eine einzige Normalkurve der φ, ihre Projektion liefert alle anderen Normalkurven.

Die Geometrie auf einer algebraischen Kurve vom Geschlecht $p>1$, d.h. die Geometrie der birationalen Transformationen dieser Kurve, ist gleichbedeutend mit der projektiven Geometrie der Normalkurve der φ (*Invarianzsatz*, § 4).

Nur wenn die ebene Kurve hyperelliptisch ist, wird die Normalkurve der φ eine mehrfach gezählte Kurve, und zwar die doppelt gezählte rationale Normalkurve der Ordnung $p-1$ im R_{p-1}.

Eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht p kann man birational auf eine c_{p+2} mit p-fachem Punkte beziehen (Brill-Noether, S. 287). Wie Cremona, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **2**, 566 (1869), gezeigt hat, kann man diese Kurve so wählen, daß sie durch involutorische Kollineation (Homologie) in sich übergeht. Der p-fache Punkt ist das Homologiezentrum, die in ihm berührenden Tangenten haben keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemein, die $p+2$ Tangenten, die weiterhin aus ihm an die Kurve gehen, berühren auf der Homologieachse.

Allgemeiner *läßt sich eine Kurve vom Geschlecht p, die eine $g_i^1 (i \leqq p+2)$ enthält, auf eine c_{p+2} mit einem $(p-i+2)$-fachen*

Punkte reduzieren (Segre, *Math. Ann.* **30**, 220 (1887); Bertini, *Geom. ser. lin.*, n. 43).

Aus den vorstehenden Normalkurven folgt unmittelbar, daß sich die Koordinaten der Punkte einer rationalen Kurve als rationale Funktionen eines Parameters λ, die einer elliptischen oder hyperelliptischen Kurve als rationale Funktion von λ und der Quadratwurzel aus einem Polynom $(2p+1)^{\text{ten}}$ oder $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades von λ darstellen lassen. Vgl. Clebsch-Gordan, S. 63; für $p=2$ auch Clebsch, *Math. Ann.* **1**, 170 (1869); Schwarz, *J. de Math.* (3) **6**, 111 (1880), *Abhdlgn.* II, 292.

Für alles Vorstehende vgl. Clebsch-Lindemann, S. 685, 709; Picard, *Traité*, p. 487; Bertini, *Geom. ser. lin.*, n. 35 und § 8; Segre, *Introd.*, § 16, 17.

§ 8. Die Moduln einer Klasse von algebraischen Kurven.

Eine Klasse (vor. Kap. § 11) von irreduzibeln algebraischen Kurven des Geschlechtes $p\,(>0)$ hängt von einer endlichen Anzahl unabhängiger und kontinuierlich veränderlicher Parameter ab, wenn man zwei birational ineinander transformierbare Kurven nicht als verschieden ansieht. Diese Parameter heißen die *Moduln* der Klasse.

Für $p=0$ existieren keine Moduln, für $p=1$ gibt es einen einzigen und für $p>1$ ist die Zahl der Moduln $3p-3$.

Den Begriff und die Zahl $3p-3$ der Moduln verdankt man Riemann (*Abelsche Funktionen*).

Führt man die Mannigfaltigkeitsstufe ϱ der birationalen Transformationen einer Kurve der Klasse in sich selbst ein, die $=3, 1, 0$ ist, je nachdem $p=0, 1, >1$ (Kap. XV, § 6), so kann man die drei Fälle in eine Aussage vereinigen, indem man sagt: *Die Zahl der Moduln beträgt* $3p-3+\varrho$. Vgl. F. Klein, *Über Riemanns Theorie der alg. Funkt.* 1882, S. 64, der weiter geschlossen hat, daß die Gesamtheit der Klassen von algebraischen Kurven des Geschlechtes p eine einzige zusammenhängende, $(3p-3+\varrho)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bildet. S. auch Picard, *Traité*, p. 531.

Für besondere Kurven kann die Anzahl der Moduln natürlich $<3p-3$ sein. So ist sie für eine hyperelliptische Kurve $2p-1$, und die Moduln selbst sind die unabhängigen Doppelverhältnisse der $2p+2$ Verzweigungspunkte (Paare zusammenfallender Punkte) ihrer g_2^1 (Brill-Noether, § 14).

Ist die Kurve elliptisch $(p=1)$, so sind für ihre unendlich

vielen g_2^1 die Quadrupel der Verzweigungspunkte projektiv und ihr gemeinsames Doppelverhältnis ist der einzige Modul (vgl. § 12). Als besonderer Fall folgt, daß die Quadrupel der an eine c_3 aus einem ihrer Punkte gelegten Tangenten immer dasselbe Doppelverhältnis haben (Satz von Salmon, *J. f. Math.* **42**, 274 (1851)).

§ 9. Anwendungen des Abelschen Theorems. Schnittpunktsätze.

Als *Cramersches Paradoxon* ist die Tatsache bekannt, daß eine c_n nicht immer durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt ist, da für $n>2$ diese Zahl nicht größer ist als die Zahl n^2 der Schnittpunkte der c_n mit einer anderen c_n. Diese schon 1720 von Mac Laurin (*Geom. organica*, p. 137) gemachte Bemerkung wurde von Euler, *Berlin Hist.* **4**, 219 (1748), und Cramer, *Introd.*, p. 78, dahin aufgeklärt, daß die n^2 linearen Gleichungen, denen die Koeffizienten in der Gleichung einer c_n genügen müssen, damit diese durch die Schnittpunkte zweier anderen Kurven von der gleichen Ordnung hindurchgeht, nicht alle voneinander unabhängig sind.

Lamé, *Examen des différ. méth. etc.* 1818 (Neudruck 1903), p. 28, hat bemerkt, daß alle c_n, die durch die Schnittpunkte zweier Kurven von derselben Ordnung, $\varphi=0$, $\psi=0$, hindurchgehen, eine Gleichung von der Form $\varphi+\lambda\psi=0$ haben. Daraus folgerte Gergonne, *Ann. de Math.* **17**, 220 (1827), daß, *wenn* $p(p+q)$ *von den Schnittpunkten zweier* c_{p+q} *auf einer* c_p *liegen, die übrigen* $q(p+q)$ *einer* c_q *angehören.*

Einen wesentlichen Fortschritt in den Schnittpunktsätzen machte Plücker, indem er die eine c_n als fest und die andere als veränderlich ansah (*Ann. de Math.* **19**, 97 (1829), *Abhdlgn.* I, 76). Er erkannte so, daß *alle Kurven, die durch* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ *„in allgemeiner Lage befindliche" Punkte gehen, außerdem noch dieselben* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *Punkte gemein haben.*

Jacobi, *J. f. Math.* **15**, 285 (1836), *Werke* III, 331, und Plücker, *J. f. Math.* **16**, 47 (1837), *Abh.* I, 323, haben auch Kurven von verschiedenen Ordnungen in Betracht gezogen und gezeigt, daß *für* $m>n$ *von den Schnittpunkten einer* c_n *mit einer* c_m $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *durch die übrigen bestimmt sind, wenn diese „in allgemeiner Lage" angenommen werden, während für* $m\leqq n$

$$mn-\tfrac{1}{2}m(m+3)$$

durch die übrigen bestimmt sind. Einen allgemeineren Satz gab Cayley, *Cambr. Math. J.* **3**, 211 (1843), *Papers* I, 25.

Man vgl. Cremona, *Introd.*, n. 41—45; Salmon-Fiedler, S. 23; Clebsch-Lindemann, S. 425, 753. Viele andere Sätze finden sich bei H. Valentiner (*Diss.*), *Acta Math.* **2**, 136 (1882).

Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 189 (1864) hat gezeigt, daß *alle diese Sätze nichts anderes sind als geometrische Folgerungen aus dem Abelschen Theorem und seiner Umkehrung* (vgl. Clebsch-Gordan, S. 34; Clebsch-Lindemann, S. 818). *Dieses Theorem drückt in transzendenter Form die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aus, daß zwei Punktegruppen von f, $q_1, q_2, \dots, q_k$ und $q_1', q_2', \dots, q_k'$, äquivalent sind* (§ 3). Zu dem Zweck werden gebildet die Integrale erster Gattung

$$w_i(q) = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi_i(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}}\, dx,$$

wenn $\varphi_i(x,y) = 0$ die Gleichung einer von p linear unabhängigen φ-Kurven, $f(x,y) = 0$ die Gleichung der Grundkurve, q_0 ein fester Anfangspunkt, q ein variabler Endpunkt ist. Den Integrationsweg muß man sich auf der zu f gehörigen Riemannschen Fläche denken. Die Gleichungen des Abelschen Theorems sagen dann aus, daß

$$w_i(q_1) + w_i(q_2) + \cdots + w_i(q_k) = w_i(q_1') + w_i(q_2') + \cdots + w_i(q_k') \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

wird bis auf ganze Vielfache der Periodizitätsmoduln.

Auf algebraischem Wege erhält man in jedem Falle die genaue Bestimmung der Schnittpunktsätze auf Grund des Noetherschen Fundamentalsatzes und des Restsatzes. Z. B. kann man den Fundamentalsatz für einfache Schnittpunkte in geometrischer Form folgendermaßen aussprechen: *Wenn mp von den Schnittpunkten einer c_m mit einer c_n auf einer c_p liegen, so liegen die übrigen $m(n-p)$ auf einer c_{n-p}.* Dieser Satz gilt *ausnahmslos* und umfaßt für $m = n$ den angeführten Satz von Gergonne, während er für den Fall, daß c_m in m Gerade zerfällt, sich auf einen Satz von Poncelet (*J. f. Math.* 8, 387 (1832), *Traité des propr. project.* II, 211) reduziert.

In ähnlicher Weise lautet der oben erwähnte Cayleysche Satz für den Fall einfacher Schnittpunkte:

Wenn eine c_p gezwungen ist, durch die Schnittpunkte zweier gegebenen Kurven c_m, c_n ($p \geqq m$, $p \geqq n$) zu gehen, so werden hierdurch für $p > m + n - 3$ der c_p mn linear unabhängige Bedin-

gungen auferlegt; ist hingegen $p \leqq m + n - 3$, *so sind von diesen Bedingungen*

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(m+n-p-1)(m+n-p-2)$$

eine Folge der übrigen. Genauer, eine c_p, *die durch* $mn - \alpha$ *der* mn *Schnittpunkte geht, geht auch durch die* α *übrigen, mit Ausnahme des Falles, wo diese letzteren Schnittpunkte auf einer* $c_{m+n-p-3}$ *liegen. Ist* $p = m + n - 3$, *so enthält jede* c_p, *die durch* $mn - 1$ *Schnittpunkte von* c_m *und* c_n *gelegt ist, wie immer diese gewählt seien, auch stets den letzten Schnittpunkt.* Dies ist demnach der einzige Fall, in dem der Cayleysche Satz ausnahmslos gilt.

Vgl. Bacharach, *Diss.* Erlangen 1881, *Math. Ann.* **26**, 275 (1886); Noether, *Acta Math.* **8**, 161 (1886); Cayley, *Math. Ann.* **30**, 85 (1887), *Papers* XII, 500; Zeuthen, *Math. Ann.* **31**, 235 (1888), außerdem für die allgemeine Theorie der Schnittpunkte Macaulay, *Lond. Math. Soc. Proc.* **26**, 495, **29**, 673, **31**, 15, 381, 401, **32**, 418 (1895—1900), *Amer. M. S. Trans.* **5**, 385 (1904), *Verh. d. 3. Math. Kongr.*, Heidelberg 1905, S. 284, und Ch. A. Scott, *Amer. M. S. Trans.* **3**, 216 (1902); Löffler, *Diss.* Tübingen 1907, *Math. Ann.* **65**, 400 (1908).

§ 10. Berührungsaufgaben.

Clebsch hat mit Hilfe des Abelschen Theorems, indem er die Schnittpunkte gruppenweise zusammenfallen ließ, die *Berührungskurven* studiert, d. h. die Kurven, die durch feste Punkte der Grundkurve f hindurchgehen und mit ihr Berührungen derselben Ordnung in allen übrigen gemeinsamen Punkten haben, und die *Systeme* von solchen Kurven gleicher Ordnung, die aus einer gegebenen durch kontinuierliche Veränderung hervorgehen. Z. B. hat, wenn f, von der Ordnung n und dem Geschlecht p, nur d Doppelpunkte und Spitzen besitzt, das Problem, durch $mn - 2d - pr$ Punkte von f eine adjungierte Kurve der Ordnung $m > n - 3$ zu legen, die in p Punkten f zur Ordnung $r - 1$ berührt, im allgemeinen eine endliche Zahl von Lösungen, nämlich r^{2p}, und es ergibt sich, daß wenn eine durch die festen Punkte gelegte adjungierte Kurve von der Ordnung m die Berührungspunkte von $r - 1$ solchen Kurven enthält, sie auch die einer r^{ten} Kurve enthalten muß.

Besonders wichtig ist der Fall, wo $mn - 2d$ durch r teilbar ist; dann gibt es *reine Berührungskurven*, die, abgesehen von den mehrfachen Punkten von f, in jedem Punkte, wo sie f begegnen, mit f eine Berührung von gegebener Ordnung λ haben.

Für $\lambda = 1$ hat die Untersuchung dieser Kurven an den c_3 und c_4 Hesse ausgeführt, *J. f. Math.* **28**, 68, 97 (1844), **36**, 143 (1848), **49**, 243, 279 (1855), **55**, 83 (1858), *Abh.*, S. 89, 123, 155, 319, 345, 469, an einer allgemeinen Kurve Clebsch (a. a. O.), der gefunden hat, *daß* $2^{p-1}(2^p - 1)$ φ*-Kurven die Grundkurve* f *in* $p - 1$ *Punkten berühren.*

Sowie diese Fragen für nicht adjungierte Kurven aufgeworfen werden, sind auch die Integrale dritter Gattung und das erweiterte Umkehrproblem der Abelschen Integrale heranzuziehen. Vgl. Roch, *J. f. Math.* **66**, 97 (1866); Clebsch-Gordan, S. 130; Clebsch-Lindemann, 6. Abt.; H. Stahl, *Abelsche Funktionen*, 1896, 6. u. 7. Abschnitt.

Dieselben Probleme hat Humbert, *J. de Math.* (4) **2**, 239 (1886), behandelt, indem er die von Poincaré und Klein gegebene Darstellung der Koordinaten x, y der Punkte von f als eindeutige (automorphe) Funktionen eines Parameters zum Ausgangspunkt nahm.

Algebraisch haben die nicht adjungierten Berührungskurven behandelt W. Weiss, *Diss.* Erlangen 1887, *Wien. Ber.* **99**, 284 (1890), **102**, 1025 (1893), *Monatsh. f. M.* **7**, 370 (1896), *Prag. Deutsche Math. Ges. Mitt.* 1892, S. 139; A. C. Dixon, *Cambr. Phil. Soc. Proc.* **12**, 458 (1904).

Die Theorie der Berührungskurven hat eine weitere Vertiefung erfahren durch Noether, *Math. Ann.* **17**, 263 (1880), der auf Grund der gegenüber birationalen Transformationen invarianten Darstellung der algebraischen Funktionen die Kurven untersucht hat, die durch das Verschwinden einer ganzen homogenen Funktion der φ dargestellt werden. Die Frage ist abhängig von der Bestimmung der Zahl der linear unabhängigen Relationen irgendeiner Ordnung $\mu > 1$, die zwischen p linear unabhängigen φ bestehen. Noether fand für diese Zahl den Wert

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{\mu!} - (2\mu-1)(p-1),$$

mit Ausnahme des hyperelliptischen Falles, wo sie

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{\mu!} - \mu(p-1) - 1$$

ist. Für $\mu = 2$ war das Problem schon von Riemann behandelt worden (*Werke*, 2. A., S. 487, und *Nachträge*, 1902), darauf von H. Weber, *Math. Ann.* **13**, 35 (1878); Kraus, ebenda **16**, 245 (1880).

Die Galoissche Gruppe der algebraischen Gleichung, von welcher die Bestimmung der φ-Berührungskurven abhängt, haben untersucht C. Jordan, *Traité des substitutions*, 1870, p. 229, 305, 329; L. E. Dickson, *Amer. M. S. Trans.* **3**, 38, 377 (1902).

Die *Realitätsfragen*, welche die Berührungskurven einer reellen Kurve f betreffen, hat Klein behandelt, *Riemannsche Flächen* II, S. 141; *Math. Ann.* **42**, 1 (1893). Ist λ die Anzahl der reellen Züge von f (Kap. XIII, § 12), so ist die Zahl der reellen φ-Berührungskurven für $\lambda = 0$ gleich 0 oder 2^{p-1}, je nachdem p gerade oder ungerade ist, dagegen $2^{p+\lambda-2}$ für den diasymmetrischen Fall (wobei $\lambda > 0$), $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$ für den orthosymmetrischen Fällen. Für $p = 3$ ergeben die Kleinschen Resultate die Sätze von Zeuthen, *Math. Ann.* **7**, 410 (1874), über die Doppeltangenten einer c_4. Vgl. noch Maillet, *Toulouse Ann.* (2) **6**, 277 (1905); L. E. Dickson, *Ann. of Math.* (2) **6**, 141 (1905).

Das allgemeine Problem, die Anzahl der Kurven eines linearen Systems der Stufenzahl r zu bestimmen, die mit einer gegebenen Kurve Berührungen von irgendeiner gegebenen Ordnung haben, wurde von de Jonquières, *J. f. Math.* **66**, 289 (1866) geometrisch behandelt. Für diese Zahl gab Cayley, *Phil. Trans.* **158**, 75 (1867), *Papers* VI, 191 folgenden Ausdruck, dessen Richtigkeit algebraisch von Brill, *Math. Ann.* **6**, 46 (1873), bewiesen wurde:

$$\frac{\nu_1^{\alpha_1}\nu_2^{\alpha_2}\cdots\nu_\varrho^{\alpha_\varrho}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_\varrho!}\{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-k+1)$$
$$+(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-r-k+1)ps_1$$
$$+(n-r-2)(n-r-3)\ldots(n-r-k+1)p(p-1)s_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(n-r-k+1)p(p-1)\ldots(p-k+2)s_{k-1}$$
$$+p(p-1)\ldots(p-k+1)s_k\},$$

wobei p das Geschlecht von f, n die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von f mit einer Kurve des Systems bedeutet, und wobei von den betrachteten Berührungen angenommen wird, daß α_i unter ihnen ν_i-punktig $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ sind, indem die ν_i alle verschieden, > 1 und als Lösungen der Gleichungen

$$\sum\alpha_i\nu_i = r+k,\ \sum\alpha_i = k \qquad (r+k \leq n)$$

vorausgesetzt werden; s_i bezeichnet die Summe aller Produkte von je i unter k Zahlen, von denen α_i gleich $\nu_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ sind.

Brill hat an anderen algebraischen Arbeiten über die Theorie der Berührungskurven und der Spezialscharen geliefert: *Gött.*

Nachr. 1870, S. 525, *Math. Ann.* **2**, 473 (1870), **3**, 459 (1871), **4**, 527 (1871), **36**, 321 (1890). Andere besondere Probleme wurden algebraisch behandelt von Krey, *Math. Ann.* **10**, 221 (1876); Spottiswoode, *C. R.* **83**, 627 (1876), *Lond. M. S. Proc.* **8**, 29 (1876); Lindemann, *Bull. Soc. M.* **10**, 21 (1882).

Die Jonquièressche Formel kann man auch als die Lösung eines abzählenden Problems über lineare Scharen betrachten, nämlich des Problems, die Anzahl der Punktgruppen einer g_n^r, die Punkte von gegebener Multiplizität enthalten, zu bestimmen. Unter diesem Gesichtspunkt ist die Formel aufs neue bewiesen worden von R. Torelli, *Rend. Circ. M.* **21**, 58 (1905).

Insbesondere ist die Anzahl der $(r+1)$-fachen Punkte einer g_n^r gleich $(r+1)(n+rp-r)$, und ist ein Punkt i-fach für die ∞^{r-1} Punktgruppen, die ihn enthalten, i_1-fach für ∞^{r-2} unter ihnen, ..., i_{r-2}-fach für ∞^1 Gruppen, i_{r-1}-fach für eine Gruppe, so zählt er

$$\left(i+i_1+\cdots+i_{r-1}-\frac{r(r+1)}{2}\right)\text{-mal}$$

in der Gruppe der $(r+1)$-fachen Punkte (Segre, *Introd.* § 11). Diese Formel liefert in allen Fällen die Zahl der Punkte, in denen eine gegebene Kurve die stärkste Berührung mit Kurven eines gegebenen linearen Systems besitzt. Z. B. kann man aus ihr die Zahl der *sextaktischen* Punkte ableiten, d. h. der Punkte, in denen f eine Berührung 5. Ordnung mit einem Kegelschnitte hat. Diese Zahl beträgt $n(12n-27)$, wenn f von der Ordnung n und frei von mehrfachen Punkten ist, und die Punkte bilden den vollständigen Schnitt der Kurve mit einer Kurve von der Ordnung $12n-27$. S. Cayley, *Phil. Trans.* **149**, 371 (1859), **155**, 545 (1864), *Papers* IV, 207, V, 221; Spottiswoode, *Phil. Trans.* **155**, 653 (1865); Halphen, *Bull. M.* **4**, 59 (1875); Segre, *Introd.*, n. 45.

Ist die g_n^r die kanonische Schar, so ergibt sich, daß diese $p(p^2-1)$ p-fache Punkte besitzt: sie sind die Weierstraßschen Punkte von f (§ 4). Hurwitz, *Math. Ann.* **41**, 411 (1893), hat gezeigt, daß die Zahl der verschiedenen Punkte unter ihnen nur im hyperelliptischen Falle $= 2p+2$ und sonst größer ist. Höhere untere Grenzen für den allgemeinen Fall fanden Segre, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) $\mathbf{8}^2$, 89 (1899); Cipolla, ebenda $\mathbf{14}^1$, 210 (1905). S. auch Haure, *Ann. Éc. Norm.* (3) **13**, 115 (1896); Cipolla, *Pisa Scuola Norm.* **10** (1905); Hensel-Landsberg S. 490.

§ 11. Rationale Kurven.

1. *Algebraische Darstellungen.* Eine irreduzible Kurve c_n heißt *rational (unikursal* nach Cayley), wenn sich die Koordinaten ihrer Punkte als rationale Funktionen eines Parameters derart darstellen lassen, daß zu jedem Punkte der Kurve ein einziger Wert des Parameters gehört. Die letztere Bedingung ist aber überflüssig, wie z. B. aus der Formel von Zeuthen (Kap. XV, § 1) hervorgeht. Das gleiche Resultat erhielt Lüroth, *Math. Ann.* **9**, 163 (1876), der außerdem zeigte, wie man den Parameter rational in einen anderen transformieren kann derart, daß zwischen dessen Werten und den Kurvenpunkten eine *ein-eindeutige* Korrespondenz besteht. Vgl. auch Bertini, *Introd.* p. 270.

Setzt man für die homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Kurvenpunktes

$$(\alpha) \qquad \varrho x_1 = f_1(\lambda), \quad \varrho x_2 = f_2(\lambda), \quad \varrho x_3 = f_3(\lambda),$$

wo die f ganze Funktionen n^{ter} Ordnung von λ ohne gemeinsamen Teiler bedeuten, so korrespondiere derselbe Kurvenpunkt gewissen $\nu(>1)$ Werten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ des Parameters λ. Die Funktionen von λ

$$f_1(\lambda)f_3(\lambda_1) - f_3(\lambda)f_1(\lambda_1) \text{ und } f_2(\lambda)f_3(\lambda_1) - f_3(\lambda)f_2(\lambda_1)$$

besitzen dann, da sie für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ beide verschwinden, den gemeinsamen Teiler $g = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_\nu)$. Dies ist aber, von einem λ nicht enthaltenden Faktor $\varphi_0(\lambda_1)$ abgesehen, auch ihr größter gemeinschaftlicher Teiler. Schreibt man diesen in der Form

$$\varphi_0(\lambda_1)g = \varphi_0(\lambda_1)\lambda^\nu + \varphi_1(\lambda_1)\lambda^{\nu-1} + \cdots + \varphi_\nu(\lambda_1),$$

so muß unter den φ mindestens eines, etwa φ_i, für λ_1 von der ν^{ten} Ordnung und ein $\varphi_k(\lambda_1)$ zu ihm teilerfremd sein. Nun aber muß $\mu_1 = \varphi_i(\lambda_1)/\varphi_k(\lambda_1)$ eine symmetrische Funktion von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ sein, und somit ist jedem Werte von $\mu = \dfrac{\varphi_i(\lambda)}{\varphi_k(\lambda)}$ ein einziger Kurvenpunkt zugeordnet und umgekehrt, und die Koordinaten des Kurvenpunktes sind auch als rationale Funktionen dieses neuen Parameters darstellbar.

Jede rationale Kurve hat das Geschlecht $p = 0$, und jede Kurve vom Geschlecht 0 ist rational (Clebsch, *J. f. Math.* **64**, 44 (1865)).

Um aus der Parameterdarstellung (α) der Kurve ihre Gleichung herzuleiten, hat man nach Brill, *Math. Ann.* **5**, 401 (1872), λ aus den Gleichungen

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 = 0, \quad v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 = 0$$

zu eliminieren. In der Resultante kommen die u, v nur in den Verbindungen $u_2 v_3 - u_3 v_2$, $u_3 v_1 - u_1 v_3$, $u_1 v_2 - u_2 v_1$ vor und setzt man dafür x_1, x_2, x_3, so erhält man die gesuchte Kurvengleichung $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, wobei F die ν^{te} Potenz einer irreduziblen Form der Ordnung $\frac{n}{\nu}$ ist, wenn jedem Kurvenpunkte ν Werte des Parameters λ korrespondieren. Die Ordnung der durch (α) gegebenen Kurve ist also dann gleich n/ν und *gleich der Ordnung der Funktionen f, wenn die Zuordnung der Kurvenpunkte zum Parameter λ wechselweise eindeutig* $(\nu = 1)$ *ist.* Vgl. Pasch, *Math. Ann.* **18**, 91 (1881); Humbert, *Bull. Soc. M.* **13**, 49, 89 (1885). Im folgenden werden wir immer $\nu = 1$ voraussetzen.

2. *Singularitäten, Schnittpunktsätze und Berührungsaufgaben.* Eine allgemeine rationale Kurve n^{ter} Ordnung c_n hat die Klasse $2(n-1)$ und besitzt $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte, $3(n-2)$ Wendepunkte und $2(n-2)(n-3)$ Doppeltangenten, wie man aus den Formeln des § 7 im vorigen Kapitel leicht folgern kann. Hierüber und über die Gleichungen für die Parameterwerte der singulären Punkte vgl. Clebsch, *J. f. Math.* **64**, 43 (1865). Vgl. dazu Haase, *Math. Ann.* **2**, 515 (1870), wo auch von der projektiven Erzeugung der Kurven die Rede ist, Em. Weyr, *Zschr. f. Math.* **16**, 80 (1871); *Casopis* **8**, 193 (1879); Hermite, *Cours d'analyse* 1873, p. 245; Weltzien, *Math. Ann.* **26**, 516 (1886); Fabry, *Ann. éc. norm.* (3) **13**, 107 (1896).

Clebsch hat in seiner Arbeit auch die Schnittpunktsätze und Berührungsaufgaben (mit adjungierten und nichtadjungierten Kurven) behandelt. Insbesondere hat er die Bedingungen dafür aufgestellt, daß $m \cdot n$ Punkte der Kurve c_n einer Kurve c_m angehören. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{mn}$ die Parameter dieser Punkte, so müssen die $\delta = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Gleichungen

$$\frac{(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2) \cdots (a_i - \lambda_{mn})}{(b_i - \lambda_1)(b_i - \lambda_2) \cdots (b_i - \lambda_{mn})} = c_i^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, \delta)$$

erfüllt sein, wobei (a_i, b_i) die zu den δ Doppelpunkten gehörigen Wertepaare des Parameters und c_i Konstanten bezeichnen.

Wird einer der Doppelpunkte zur Spitze, z. B. $a_i = b_i$, so ergibt sich für die entsprechende Gleichung aus einem Grenzübergang

$$\frac{1}{a_i - \lambda_1} + \frac{1}{a_i - \lambda_2} + \cdots + \frac{1}{a_i - \lambda_{mn}} = m k_i,$$

wo k_i wieder eine Konstante bezeichnet

Die Berührungsaufgaben führen hier auf Kreisteilungsgleichungen. Für alles dies vgl. Clebsch-Lindemann, S. 883ff.

3. *Zusammenhang mit der Theorie der Kombinanten und der Apolarität.* Die Darstellung (α) führt zu interessanten Eigenschaften der rationalen Kurven, wenn man die Theorie der Kombinanten und der Apolarität für binäre Formen zu Hilfe zieht. Hierbei hat man auch *erweiterte Kombinanten* zu berücksichtigen, die zu den in Betracht kommenden Formen oder ganzen Funktionen f_1, f_2, f_3 auch noch Reihen von Punktkoordinaten und zu diesen kontragredienten Linienkoordinaten hinzufügen.

Nach einem Satz von Gordan, *Math. Ann.* **5**, 95 (1872), fallen die binären Kombinanten der Formen f_1, f_2, f_3 mit den In- und Kovarianten einer einzigen *erzeugenden Funktion* mit drei Reihen binärer Veränderlichen λ, μ, ν:

$$G = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \\ f_1(\nu) & f_2(\nu) & f_3(\nu) \end{vmatrix}$$

zusammen. Die erweiterten Kombinanten erhält man als binäre simultane In- und Kovarianten von G, von identischen ternären Kovarianten und von folgenden *erzeugenden Funktionen*:

$$G_1(x^{(\varrho)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \\ x_1^{(\varrho)} & x_2^{(\varrho)} & x_3^{(\varrho)} \end{vmatrix},$$

$$G_2(x^{(\varrho)}, x^{(\sigma)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ x_1^{(\varrho)} & x_2^{(\varrho)} & x_3^{(\varrho)} \\ x_1^{(\sigma)} & x_2^{(\sigma)} & x_3^{(\sigma)} \end{vmatrix},$$

$$G_2(y^{(\varrho)}, z^{(\varrho)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ y_1^{(\varrho)} & y_2^{(\varrho)} & y_3^{(\varrho)} \\ z_1^{(\varrho)} & z_2^{(\varrho)} & z_3^{(\varrho)} \end{vmatrix}$$

$$= G_2(u^{(\varrho)}) = u_1^{(\varrho)} f_1(\lambda) + u_2^{(\varrho)} f_2(\lambda) + u_3^{(\varrho)} f_3(\lambda).$$

G, G_1 sind in folgender Weise reduzierbar:

$$G = (-1)^{n-1}(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)G', \quad G_1 = (\lambda - u)G'_1.$$

Entwickelt man G', G'_1 nach der *Clebsch-Gordanschen Formel* (Clebsch, *Th. d. binären Formen*, 1872, S. 15; Gordan, *Vorl. üb. Invariantentheorie* II, 1887, S. 86) in eine Reihe, die nach

Potenzen von $\mu - \nu$, $\nu - \lambda$, $\lambda - \mu$ aufsteigt, so werden die Koeffizienten dieser Potenzen Polarbildungen von Funktionen mit nur einer Reihe binärer Variablen. Diese letzteren heißen dann die *elementaren Kombinanten* von c_n und *ungerändert* oder *einfach gerändert*, je nachdem sie aus G' oder G'_1 abgeleitet sind. Nimmt man noch die Funktionen G_2 als *zweifach geränderte elementare Kombinanten* und die *identische Kovariante* $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ hinzu, so ergibt sich:

Alle bei einer rationalen ebenen Kurve auftretenden algebraischen Formen, die für die linearen Transformationen des Parameters sowie für die linearen Transformationen der Ebene invariant sind, sind binäre simultane In- oder Kovarianten der elementaren Kombinanten, und umgekehrt.

Zu der Bestimmung der elementaren Kombinanten gelangt man auch, indem man auf Grund des Apolaritätsprinzips andere, *indirekte erzeugende Funktionen* einführt. Als solche ergeben sich die durch die Koeffizienten von f_1, f_2, f_3 ausgedrückten erzeugenden Funktionen für das zu f_1, f_2, f_3 apolare System von Binärformen der Ordnung n, nämlich drei Funktionen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ mit bzw. $n-2$, $n-1$, n Reihen binärer Variabeln, die erste für die rein binären Kombinanten, die zweite für die einfach, die dritte für die zweifach geränderten Kombinanten. Nennt man Γ' und Γ'_1 die durch die in ihnen aufgehenden Differenzen $\lambda - \mu$ usw. geteilten Ausdrücke von Γ und Γ_1, so liefern die Reihenentwicklungen von Γ' und Γ'_1 aufs neue die elementaren Kombinanten von c_n. Hierüber vgl. W. Groß (*Diss.*, Tübingen 1887), *Math. Ann.* **32**, 136 (1888).

Die Gleichung $G' = 0$ drückt die Bedingung dafür aus, daß die drei Punkte λ, μ, ν von c_n in gerader Linie liegen; $G'_1 = 0$ ist die Gleichung der Geraden, welche die Punkte λ, μ verbindet, und $G_2 = 0$ ist in Linienkoordinaten die Gleichung des Punktes λ.

Die geometrische Bedeutung von $\Gamma', \Gamma'_1, \Gamma_2$ schließt sich an gewisse Involutionen auf c_n an, die sich folgendermaßen ergeben.

Fundamentalinvolution von c_n heißt die Involution der Ordnung n und Stufe $n-3$ auf der c_n, deren Punktgruppen zu allen Gruppen von n Punkten auf c_n, die in gerader Linie liegen, apolar sind. Für $n = 3$ reduziert sich die Involution auf eine einzige Punktgruppe: die der Wendepunkte. Die Fundamentalinvolution ist (auch in ihrer Verallgemeinerung auf die rationalen Kurven eines Raumes R_r von beliebig viel Dimensionen) von W. Stahl, *J. f. Math.* **101**, 300 (1887), **104**, 38 (1889), und Berzolari, *Ann. di Mat.* (2) **21**, 1 (1893), untersucht worden;

diese zeigten, daß man zu ihr in mehr geometrischer Weise mit Hilfe der *Oskulanten*, d. h. der rationalen Kurven von den Ordnungen $n-1, n-2, \ldots$, für die die Koordinaten eines laufenden Punktes die reinen oder gemischten Polaren von f_1, f_2, f_3 sind, gelangen kann. Betreffs der Bildung solcher Oskulanten vgl. Study, *Leipz. Ber.* **38**, 3 (1886); Jolles, *Habil.-Schr.*, Aachen 1886.

Berzolari hat a. a. O. auch die (die Fundamentalinvolution enthaltenden) Involutionen von der Ordnung n und der Stufe $n-2$ oder $n-1$ betrachtet, deren Punktgruppen apolar zu den Schnittpunkten der c_n mit den Strahlen eines Büschels oder einer einzelnen Geraden sind; er konstruierte sie mit Hilfe der Oskulanten und zeigte, wie sie und die Fundamentalinvolution selbst sich durch Projizieren und Schneiden von der rationalen Normalkurve eines R_n aus, von dem die ebene Kurve eine Projektion ist, gewinnen lassen. *Diese drei Arten von Involutionen werden dann durch die Gleichungen* $\Gamma' = 0$, $\Gamma'_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$ (vgl. oben) *gegeben*, d. h. diese drücken die Bedingung dafür aus, daß resp. $n-2$, $n-1$ oder n Punkte von c_n zu einer Gruppe der Involution gehören.

Mit den vorstehenden algebraischen Prozessen ist eng verknüpft die Erzeugung einer rationalen c_n als Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten zweier projektiv aufeinander bezogenen rationalen Klassenkurven oder die reziproke Erzeugungsart, somit auch die Aufsuchung der zu einer rationalen Ordnungskurve *perspektiven* Klassenkurven, die auf die ersteren derart eindeutig bezogen sind, daß jeder Punkt der einen Kurve auf der ihm entsprechenden Tangente der anderen Kurve liegt. Hierüber siehe Brill, *Münch. Ber.* 1885 oder *Math. Ann.* **36**, 230 (1890); W. F. Meyer, ebenda **29**, 447 (1887), **30**, 30 (1887), **31**, 96 (1888); W. Stahl, ebenda **38**, 561 (1891). Es ergibt sich z. B., daß *die allgemeine rationale* c_n *sich als Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten von zwei rationalen, eindeutig aufeinander bezogenen Kurven von den Klassen* $\frac{n-1}{2}$ *und* $\frac{n+1}{2}$, *wenn* n *ungerade ist, oder* $\frac{n}{2}$ *und* $\frac{n}{2}$, *wenn* n *gerade ist, linear konstruieren läßt* (Brill).

Es gibt ∞^{n-1} zu c_n perspektive rationale Klassenkurven k_{n-1} von der Klasse $n-1$, die ein lineares System bilden, und es gibt ∞^{n-2r-3} zu c_n perspektive Klassenkurven k_{n-r-2}, wobei $2r \leqq n-3$. Existieren für $2r > n-3$ zu c_n perspektive Klassenkurven von noch niedrigerer Klasse, so ist die c_n nicht mehr allgemein, vielmehr bestehen zwischen den Koeffizienten von f_1, f_2, f_3

besondere Relationen. Hier spielt eine Hauptrolle die Darstellung einer ganzen Funktion $F(\lambda)$ der Ordnung $n-1$ und einer Funktion $F(\lambda)$ der Ordnung $n+r$, deren r^{te} Polaren konjugiert sind zu f_1, f_2, f_3, als Potenzsumme linearer Funktionen von λ (Stahl). Ist nämlich $F(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} a_i(\lambda - \mu_i)^{n+r}$, so kann man durch die k Punkte von c_n mit den Parameterwerten μ_i eine rationale Kurve Γ von der Ordnung $k-r-2$ legen, die so auf c_n projektiv bezogen ist, daß die Punkte μ_i sich selbst entsprechen, und umgekehrt; man erhält dann die perspektiven k_{n-r-2}, indem man die entsprechenden Punkte der Kurven c_n und Γ verbindet. Die perspektiven k_{n-1} erhält man in gleicher Weise, indem man $F(\lambda)$ die Ordnung $n-1$ gibt, die Kurve Γ hat dann die Ordnung $k-1$.

Übrigens hat, vom geometrischen Gesichtspunkte aus, die vorhergehende Frage über die Erzeugung ebener Kurven, für beliebiges Geschlecht p, Segre, *Math. Ann.* **34**, 1 (1889) (vgl. *Introd.* § 22), behandelt.

Aus den zahlreichen Untersuchungen über Punktinvolutionen auf rationalen Kurven heben wir noch hervor: Battaglini, *Napoli Atti* (1) **3**, 1 (1866), *Giorn. di Mat.* **9**, 1, 76 (1871); Em. Weyr, *Wien. Ber.* **79**, 680 (1879), *Beiträge zur Kurvenlehre*, Wien 1880; Castelnuovo, *Ven. Ist. Atti* (6) **4**, 1167, 1559 (1886); F. Deruyts, besonders *Liège Mém.* (2) **17** (1890); Guccia, *Rend. Circ. M.* **7**, 49 (1893), **8**, 227 (1894); W. F. Meyer, *Apolarität u. rationale Kurven*, 1883, S. 363; Tanturri, *Ann. di Mat.* (3) **4**, 67 (1900); Severi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **11**^{1}, 52 (1902), **9**^{1}, 379 (1900) (hier in § 10 die Verallgemeinerung der Jonquièresschen Formel); G. Kohn, *Wien. Ber.* **88**, 424 (1883), der aus der Theorie der Involutionen die Lehre von den harmonischen Mittelpunkten ableitete.

4. *Besondere Fälle.* Unter den *besonderen rationalen Kurven* c_n nennen wir nur die mit einem $(n-1)$-*fachen Punkt* und die mit drei *Hyperoskulationspunkten*, d. h. einfachen Punkten, in denen die Kurve von ihrer Tangente n-punktig berührt wird. Mit den ersteren beschäftigte sich schon Mac Laurin, *Geom. organica* 1720, p. 137, und Braikenridge, *Phil. Trans.* **39**, 25 (1735); später viele andere, z. B. Em. Weyr, *Prag. Ber.* 1874, S. 198; Niewenglowski, *C. R.* **80**, 1067 (1875); Fouret, *C. R.* **80**, 1158 (1875); Mansion, *Nouv. Corr. math.* **2**, 321, 404 (1876). Darboux, *C. R.* **94**, 930, 1108 (1890) oder *Ann. éc. norm.* (3) **7**, 327 (1890), hat die Kurven n^{ter} Klasse mit einer $(n-1)$-fachen Tangente im Unendlichen untersucht, indem er von ihnen

eine geometrische Erzeugung angab und einige Eigenschaften der Parabel auf sie ausdehnte. Ihre anderen Eigenschaften, insbesondere ihre Doppelpunkte und Doppeltangenten, sowie die Gruppe der Kollineationen, welche die Kurven in sich überführen, hat Brusotti, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **37**, 888 (1904), behandelt. Diese Kurven gehören zu den *triangulär-symmetrischen Kurven,* die sich in homogenen Koordinaten durch eine Gleichung von folgender Form darstellen lassen:

$$a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + a_3 x_3^n = 0,$$

für rationales, positives oder negatives n; diese wurden zuerst von de la Gournerie, *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, 1867, p. 195, später von Fouret, Jamet u. a. m. untersucht.

Über diese besonderen Kurven sehe man: Loria, *Spezielle alg. und transzend. ebene Kurven,* 1902, und Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven,* 1908.

§ 12. Elliptische und hyperelliptische Kurven.

Die Koordinaten eines laufenden Punktes auf einer elliptischen Kurve ($p = 1$) lassen sich ausdrücken als rationale Funktionen eines Parameters λ und der Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades in λ oder auch als doppelt periodische Funktionen eines Parameters u, der von Vielfachen der Perioden abgesehen, den Punkten der Kurve in eindeutiger Weise zugeordnet ist.

Was die erstere Darstellungsart betrifft, so läßt sich ihr immer die Form geben:

$$(\beta) \qquad \varrho x_i = f_i(\lambda)\sqrt{M} + \varphi_i(\lambda)\sqrt{N} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wobei die f_i von der Ordnung $k \leqq \frac{n}{2}$, die φ_i von der Ordnung $h \leqq \frac{n}{2}$, M von der Ordnung $n - 2k$, N von der Ordnung $n - 2h$ ist, und $k + h = n - 2$, so daß das Produkt MN immer von der vierten Ordnung wird.

Auf Grund beider Darstellungsarten hat Clebsch, *J. f. Math.* **64**, 210 (1865), die Untersuchung der Kurve durchgeführt, ihre Doppelpunkte bestimmt und mit Hilfe des Abelschen Theorems und des elliptischen Umkehrproblems die Schnittpunkts- und Berührungsaufgaben gelöst. Der einzige Modul (§ 8) der Kurve ist nichts anderes als der Modul der zugehörigen elliptischen Funktionen und erhält nach Clebsch eine geometrische Deutung durch

das folgende Theorem: *In einem Büschel adjungierter c_{n-2}, von dem $n-2$ Basispunkte einfache Punkte der Grundkurve c_n sind, existieren vier Kurven, deren jede die c_n an einer anderen Stelle berührt. Das Doppelverhältnis dieser vier Kurven ist unabhängig von der Auswahl der $n-2$ Punkte und der Modul der Kurve.* Vgl. Cayley, *Lond. Math. Soc. Proc.* **1**, III, 1 (1865), *Papers* VI, 1; Clebsch-Gordan § 20.

Mit Hilfe der Formeln (β) hat Brioschi, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **2**, 559 (1869), *Opere mat.* III, 249, die Gleichung behandelt, welche die Wendepunkte der c_n liefert.

Die Theorie der elliptischen Kurven hat, ausgehend von der Darstellung der Koordinaten durch drei ϑ-Funktionen n^{ten} Grades eines Parameters, in unabhängiger Weise O. Schlesinger entwickelt, *C. R.* **107**, 224 (1889), *Math. Ann.* **33**, 411, 444 (1889), **34**, 463 (1889); er hat daraus die Parameter der Doppelpunkte direkt bestimmt und weiter die Gleichung der Kurve, ihre Spitzen, Wendepunkte und Doppeltangenten abgeleitet.

Auf Grund derselben Darstellung hat Humbert, *C. R.* **97**, 989, 1042, 1136 (1883), *Thèse,* Paris 1885, die Gleichung der Kurve und die der adjungierten Kurve der Ordnung $n-3$ gewonnen und die Berührungsaufgaben von Clebsch gelöst.

Die beiden Autoren haben sich auch mit der Frage beschäftigt, ob eine Kurve, die durch eine Parameterdarstellung mit Hilfe von doppeltperiodischen Funktionen gegeben ist, immer das Geschlecht $p = 1$ hat. Es ergibt sich: *wenn jedem Punkte der Kurve mehrere Werte des Parameters zugeordnet sind, ist die Kurve entweder rational oder läßt sich mit Hilfe von elliptischen Funktionen, die andere Perioden haben, so darstellen, daß jedem Punkte ein einziger Wert des Parameters entspricht, die Kurve ist somit elliptisch.*

Über die elliptischen c_n vgl. auch Clebsch-Lindemann, S. 903; Picard, *Traité* p. 553 und betreffs der Geometrie auf ihr Em. Weyr, *Wien. Ber.* **100**, 589 (1891), **101**, 1457, 1506, 1695 (1892), **103**, 365 (1894).

Setzt man in der Parameterdarstellung (β) $k + h = n - p - 1$ voraus, so gilt sie für *hyperelliptische Kurven* vom Geschlecht p. Ausgehend von der Rosenhainschen Darstellung der hyperelliptischen Funktionen und mit Hilfe des erweiterten Umkehrproblems hat Brill, *J. f. Math.* **65**, 269 (1866), im Falle $p = 2$ dieselben Schnittpunkts- und Berührungsaufgaben gelöst wie Clebsch für $p = 0$ und 1. Vgl. Clebsch-Lindemann S. 915, wo auch für $p = 2$ auf den Zusammenhang zwischen dem Problem der Dreiteilung und dem algebraischen Problem der Reduktion einer

Binärform 6. Ordnung auf die kanonische Gestalt $v^2 - u^3$ (u eine Form zweiter, v eine Form dritter Ordnung) hingewiesen ist.

Algebraisch-geometrische Untersuchungen über hyperelliptische Kurven, in Zusammenhang mit der Einhüllenden der Geraden, die die Punktepaare der g_2^1 (§ 4) verbinden, mit der besonderen Absicht, die Gleichung und die projektiven Erzeugungsarten der Kurve abzuleiten, hat Bobek angestellt, *Wien. Ber.* **93**, 601, **94**, 861, **95**, 31 (1886—87), *Math. Ann.* **29**, 386 (1887).

§ 13. Invariante Eigenschaften der ebenen linearen Kurvensysteme.

Wichtige allgemeine Eigenschaften der linearen Kurvensysteme (vgl. vor. Kap. § 3) erhält man einerseits (Segre, Castelnuovo), indem man die Sätze der Geometrie auf einer algebraischen Kurve anwendet, auf der andern Seite (Castelnuovo), indem man nicht *alle* Basispunkte des Systems, sondern nur einen Teil von ihnen, mit den respektiven Multiplizitäten (*Basisgruppe*), ins Auge faßt, wobei im übrigen die Punkte der Gruppe verschieden oder unendlich benachbart im Sinne des § 10 im vor. Kap. sein können. S. Segre, *Rend. Circ. M.* **1**, 217 (1887) und besonders Castelnuovo, *Torino Mem.* (2) **42**, 3 (1891), von dem einige Sätze bei Bertini, *Geom. ser. lin.* § 9, wiederholt sind.

Das System, dessen Ordnung n sei, heißt *vollständig* oder *unvollständig (partiell)* in bezug auf die Basisgruppe, je nachdem es aus allen Kurven der Ordnung n, die in den Punkten der Basisgruppe die vorgelegten Multiplizitäten besitzen, besteht oder nicht. Ein unvollständiges System $|c_1|$ legt immer ein vollständiges System $|c|$ fest, in dem es *vollständig enthalten* ist, d. h. derart, daß jede Kurve von $|c_1|$ auch zu $|c|$ gehört.

Der Überschuß der Dimension von $|c|$ über die von $|c_1|$ heißt der *Defekt* δ_n von $|c_1|$.

Wenn $|c|$ ein vollständiges System ist und man mit h_n die Anzahl der unabhängigen Bedingungen bezeichnet, denen eine Kurve der Ordnung n genügen muß, damit sie in den Punkten der Basisgruppe die gehörige Multiplizität besitzt, so ist die Dimension k_n von $|c|$ gegeben durch

$$(1) \qquad k_n = \binom{n+2}{2} - 1 - h_n.$$

Hält man die Basispunkte und ihre Multiplizitäten fest, so kann man immer eine ganze positive Zahl l finden derart, daß für

$n \geq l$ die Größe h_n einen festen Wert hat. Nennen wir h diesen Wert, so haben wir

$$k_n = \binom{n+2}{2} - 1 - h \qquad \text{(für } n \geq l\text{)}. \tag{2}$$

Die Größe h heißt die *Postulation* der Basisgruppe und (2) die *Postulationsformel* (Cayley, Noether) oder *charakteristische Formel* (Hilbert) der Systeme $|c|$.

Wird die Dimension k_n von $|c|$ durch die Postulationsformel ausgedrückt ($n \geq l$), so heißt das System *regulär*, im entgegengesetzten Fall ($n < l$) heißt es *überschüssig*. Dann bezeichnet man den durch die Formel (2) gegebenen Wert von k_n als die *virtuelle Dimension* des Systems. Schreibt man ihn zur Unterscheidung k_n', so kann man annehmen:

$$k_n' = \binom{n+2}{2} - 1 - h \qquad \text{(für beliebiges } n\text{)},$$

und die wirkliche Dimension k_n wird die *effektive Dimension* von $|c|$ genannt. Die Differenz $s_n = k_n - k_n'$ heißt der *Überschuß* des Systems (dieser Überschuß ist 0 für die regulären Systeme).

Für die effektive Dimension eines vollständigen Systems findet man sonach

$$k_n = \binom{n+2}{2} - 1 - h + s_n,$$

während für ein unvollständiges System

$$k_n = \binom{n+2}{2} - 1 - h + s_n - \delta_n$$

ist.

Ein nützliches Theorem ist das folgende: *Sind* $|c|$ *und* $|c_1|$ *zwei vollständige, reguläre Systeme der Ordnungen* n *und* $n+1$, *die durch dieselbe Basisgruppe definiert werden, so ist das System von der Ordnung* $n+2$ *und von der niedrigsten Dimension, das alle aus einer Kurve von* $|c_1|$ *und einer Geraden zusammengesetzte Kurven enthält, vollständig* (*und durch dieselbe Basisgruppe bestimmt*). S. Enriques, *Torino Mem.* (2) **44**, 171 (1893), III, n. 2, *Soc. Ital. dei* XL *Mem.* (3) **10**, 1 (1896), n. 36; Castelnuovo, *Ann. di Mat.* (2) **25**, 240 (1897), n. 2. Vgl. auch Bertini, *Introd.*, p. 247.

Ist das vollständige System $|c|$ irreduzibel (vor. Kap. § 3) und die Basisgruppe mit *allen* Basispunkten von $|c|$ zusammengesetzt, so sind die oben betrachteten Zahlen k_n, k_n', s_n (die

wir jetzt der Einfachheit wegen mit k, k', s bezeichnen wollen), ebenso wie der Grad D und das Geschlecht p invariant für alle birationalen Transformationen der Ebene. Zwischen diesen charakteristischen Zahlen des Systems besteht die Relation

$$D = k + p - s - 1.$$

Außer diesen numerischen Invarianten haben für das System zwei invariante Gebilde wesentliche Bedeutung: die *charakteristische Vollschar* g_D^{k-1} der aus einer Kurve des Systems durch die übrigen Kurven ausgeschnittenen Punktgruppen und das *reine adjungierte System* $|c'|$, d. h. das einer allgemeinen Kurve des Systems $|c|$ adjungierte System (§ 4).

Das System $|c|$ *ist überschüssig oder regulär, je nachdem seine charakteristische Schar spezial oder nicht-spezial ist.* Außerdem ist für $s > 0$: $s \leqq p - k + 1$.

Ist $|c'|$ *reduzibel, so ist* $|c|$ *hyperelliptisch; umgekehrt, wenn* $|c|$ *hyperelliptisch und einfach ist und* $p > 2$, *so ist* $|c'|$ *reduzibel; wenn weiter* $|c'|$ *reduzibel und* $|c|$ *einfach ist, so zerfällt die allgemeine Kurve von* $|c'|$ *in* $p - 1$ *rationale Kurven.* Diese Sätze rühren her von Castelnuovo. Vom ersten sind besondere Fälle die zwei Sätze von Segre: *Für* $D > 2p - 2$, *oder* $k > p$, *ist das System regulär; für* $D > 2p$, *oder* $k > p + 1$, *ist das System einfach.*

Fundamentalkurve von $|c|$ ist jede einfache oder zusammengesetzte Kurve, die von einer allgemeinen Kurve des Systems außerhalb der Basisgruppe nicht getroffen wird. Die Anzahl der Fundamentalkurven ist endlich, außer wenn $|c|$ sich aus Kurven eines Büschels zusammensetzt.

Der *„Exzeß der fundamentalen Elemente"*, d. h. die Differenz zwischen der Anzahl der Fundamentalpunkte und der Anzahl der einfachen Fundamentalkurven ist invariant für alle birationalen Transformationen der Ebene: G. Jung, *Ann. di Mat.* (2) **15**, 277 (1887); vgl. auch Bertini, *Rend. Circ. M.* **3**, 5 (1888).

Valenz oder *Postulation* einer Fundamentalkurve bezügl. $|c|$ heißt die Zahl der Bedingungen, die eine Kurve von $|c|$ erfüllen muß, damit sie die Fundamentalkurve als Teil enthält. Castelnuovo hat a. a. O. gezeigt, daß *das Geschlecht einer Fundamentalkurve, deren Valenz* $\leqq k$, *nicht größer als* s *ist.* Ferner bewies Castelnuovo, *daß ein überschüssiges irreduzibles System wenigstens 9 Basispunkte hat; hat es deren gerade 9, so ist es ein Büschel von elliptischen* c_{3r}, *die in jedem Basispunkte einen r-fachen Punkt besitzen.*

Er fand ferner a. a. O. (s. auch *Ann. di Mat.* (2) **18**, 119 (1890)) *für* $k > p + 1$, *so daß das System regulär und einfach ist, die Werte* $3p + 5$ *und* $4p + 4$ *als obere Grenzen (die für jeden Wert von* p *erreicht werden) der Dimension* k *und des Grades* D *eines linearen irreduzibeln vollständigen Systems von gegebenem Geschlecht* $p > 1$ (für $p = 0$ gibt es weder für k noch für D eine Grenze; für $p = 1$ sind sie beide 9, und werden beim System aller c_3 erreicht); weiterhin gab er eine Reihe von Sätzen über lineare Systeme, bei denen k eine gewisse Funktion von p überschreitet. Der allgemeinste dieser Sätze lautet:

Ein lineares System vom Geschlecht p *und der Dimension* k, *für das*

$$k \geqq (\mu + 2)\left(\frac{1}{\mu}p + 2\right),$$

wenn μ *eine ganze positive Zahl bezeichnet, kann man birational in ein anderes, dessen Ordnung* $\leqq 2\mu + 1$ *transformieren, oder in eines von einer gewissen Ordnung* M *mit einem Basispunkt, dessen Multiplizität* $\geqq M - \mu$ *ist.*

§ 14. Reduktion der linearen Kurvensysteme auf bestimmte Typen.

Wenn man die für alle birationalen Transformationen der Ebene invarianten Eigenschaften der linearen Kurvensysteme betrachtet, so hat man zwei Systeme, die durch eine solche Transformation auseinander hervorgehen, als identisch anzusehen. So entsteht das Problem, alle Systeme auf bestimmte *typische Systeme* birational zu transformieren, die in projektivem Sinne die größte Einfachheit besitzen. Als solche Typen wählt man zunächst Systeme von möglichst niedriger Ordnung. Für einige besondere Fälle führte diese Transformation zuerst Bertini aus, *Ann. di Mat.* (2) **8**, 244 (1877); für $p = 0$ allgemein Picard, *J. f. Math.* **100**, 71 (1887); für $p = 0$ und $p = 1$ Guccia, *Rend. Circ. M.* **1**, 139, 169 (1887); für $p = 1$ und $p = 2$ Martinetti, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **20**, 264 (1887); *Rend. Circ. M.* **1**, 205 (1887); für $p = 2$ und $p = 3$ de Franchis, *Rend. Circ. M.* **13**, 1, 130, 200 (1899); für beliebiges p G. Jung, *Ann. di Mat.* (2) **15**, 277 (1887), **16**, 291 (1888). Über eine in der Behandlung des Problems von Segre, *Torino Atti* **36**, 645 (1901), bemerkte Lücke vgl. Ferretti, *Rend. Circ. M.* **16**, 236 (1902).

Die Systeme niedrigster Ordnung sind z. B.

für $p = 0$: 1. Systeme von c_n $(n \geqq 1)$ mit zwei verschiedenen

Basispunkten, der eine $(n-1)$-fach, der andere einfach, 2. Systeme von c_n mit einem $(n-1)$-fachen und μ einfachen dem ersten in μ verschiedenen Richtungen unendlich nahe benachbarten Basispunkten $(n \geqq 1,\ 0 \leqq \mu \leqq n-1)$, 3. Kegelschnittsysteme ohne Basispunkte;
für $p = 1$: 1. Systeme von c_3 mit μ $(0 \leqq \mu \leqq 7)$ einfachen, getrennt oder vereinigt liegenden Basispunkten, 2. Systeme von c_4 mit zwei doppelten, getrennten oder zusammenfallenden Basispunkten, 3. Büschel von c_{3n} mit 9 r-fachen Basispunkten (für diese vgl. Bertini, a. a. O., Halphen, *Bull. Soc. M.* **10**, 162 (1882)).

Eine andere Methode, die aber bloß auf Systeme von mehr als zwei (k) Dimensionen anwendbar ist, besteht darin, das durch die Gleichung $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i(x, y) = 0$ gegebene lineare System vom Geschlecht p und Grade D als Bild einer Fläche F von der Ordnung D in einem Raum R_k von k Dimensionen anzusehen, die durch die Gleichungen $\varrho x_i = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$ gegeben ist, wobei die überebenen Schnitte der Fläche vom Geschlecht p sind. So verwandeln sich die *birational invarianten* Eigenschaften des linearen Kurvensystems in *projektive* Eigenschaften von F und umgekehrt. Diese Methode wurde für $k = 3$ von Caporali (*Coll. math. in mem.* D. Chelini, 1881, p. 144, od. *Mem. di Geom.* 1888, p. 171) für abzählende Fragen angewandt und allgemein von Segre erörtert, *Rend. Circ. M.* **1**, 217 (1887), **4**, 86 (1890). Del Pezzo, *Rend. Circ. M.* **1**, 241 (1887), wandte sie auf die Reduktion der elliptischen Systeme an, Castelnuovo, ebenda **4**, 73 (1890) und *Torino Atti* **25**, 695 (1890), auf die einfachen hyperelliptischen Systeme und den Fall $p = 3$.

Eine rein rationale Äquivalenztheorie hat S. Kantor, *Monatsh. f. Math.* **10**, 18 (1899), für die linearen Systeme rationaler, elliptischer und hyperelliptischer Kurven entwickelt und alle Typen angegeben, auf die ein derartig rational gegebenes lineares Kurvensystem durch rational bestimmbare birationale Transformationen übergeführt werden kann.

§ 15. Büschel, Netze und Komplexe von Kurven.

Von den besonderen Untersuchungen über lineare Systeme von ∞^1, ∞^2, ∞^3 Kurven der Ordnung n, des Geschlechtes p, des Grades D, mit σ Basispunkten, deren Tangenten variabel sind, führen wir nur die folgenden an.

a) *Büschel.* Ein Büschel ($D = 0$) enthält $\sigma + 4p - 1$ Kurven mit einem Doppelpunkt außerhalb der Basispunkte. Vgl. Steiner (*Werke* II, 495); Cremona, *Ann. di Mat.* (1) **6**, 153 (1864); Caporali, a. a. O. (s. § 14); Guccia, *Rend. Circ. M.* **9**, 1 (1894).

Steiner, *J. f. Math.* **47**, 7 (1854), *Werke* II, 501, § 21 hat die Kurve Φ von der Ordnung $2n - 1$ betrachtet, die den Ort der Berührungspunkte der aus einem Punkte P an die Kurven des Büschels gezogenen Tangenten bildet, die sog. *äußere Panpolare* von P bezügl. des Büschels. Sie geht durch P einfach hindurch und läßt sich erzeugen aus dem gegebenen Büschel und dem projektiv darauf bezogenen Büschel der ersten Polaren von P (vgl. Guccia a. a. O.).

Sind für ein zweites Büschel die zu n, p, σ korrespondierenden Zahlen n', p', σ', so ist der Ort der Punkte, in denen sich zwei Kurven der beiden Büschel berühren, eine Kurve der Ordnung $2(n + n') - 3$, außerdem existieren

$$12(nn' + p + p') - 3(\sigma + \sigma') - 9$$

sich oskulierende Kurvenpaare und

$$4[n^2n'^2 + (nn' - 6)(p + p') + pp' - 7nn' + \sigma + \sigma' + 5],$$

die sich doppelt berühren. Vgl. Steiner (*Werke* II, 495); Bischoff, *J. f. Math.* **64**, 185 (1865); Berzolari, *Torino Atti* **31**, 476 (1896); Segre, ebenda **31**, 485. Erweiterungen und Anwendungen bei Bagnera, *Rend. Circ. Mat.* **10**, 81 (1895); de Franchis, ebenda **10**, 118, **11**, 12 (1896).

b) *Netze.* Für ein Netz ohne Fundamentalkurven, das in einer Ebene π liegt, wird die Bildfläche F (§ 14) eine D-blättrige ebene Fläche π', von der jeder Punkt einer Gruppe von D Basispunkten eines Büschels im Netze korrespondiert. Ein Punkt P, durch den eine Kurve des Netzes doppelt hindurchgeht, liegt auf der Jacobischen Kurve des Netzes, der *Doppelkurve* J von π; ihm ist in π' ein Punkt P' der *Übergangskurve* J' von π' zugeordnet. J und J' sind eindeutig aufeinander bezogen, haben also dasselbe Geschlecht, nämlich $9p - \sigma + 1$. Die Kurve J' hat die Ordnung $2(D + p - 1)$ und die Klasse $D + 4p + \sigma - 1$, danach lassen sich aus den Plückerschen Formeln ihre übrigen charakteristischen Zahlen berechnen. Es ergibt sich, daß *im Netze enthalten sind*

$24\,p$ *Kurven mit Spitze,*

$\frac{1}{2}[(D+\sigma+4p-1)^2-3D-\sigma-78p+3]$

Kurven mit zwei Doppelpunkten,

$3(D+6p-\sigma-1)$ *Büschel sich oskulierender Kurven,*

$2[(D+p)^2-17p-5D+2\sigma+4]$

Büschel sich doppelt berührender Kurven.

Jeder *einfache* Grundpunkt des Netzes erniedrigt die Zahl der Kurven mit zwei Doppelpunkten um 1.

Die vorstehenden Formeln rühren von Caporali (a. a. O.) her. Besondere Fälle schon bei Cayley, *Cambr. Trans.* **11**, 21 (1863), *Papers* V, 295; Cremona, *Ann. di Mat.* (1) **6**, 153 (1864); de Jonquières, *C. R.* **67**, 1338 (1868); *Math. Ann.* **1**, 424 (1869). Erweiterungen bei Severi, *Torino Atti* **37**, 625 (1902); Pannelli, *Rend. Circ. M.* **20**, 34 (1905).

c) *Komplexe.* Für ein lineares System von ∞^3 Kurven f ohne Fundamentalkurven liegt die Bildfläche F im dreidimensionalen Raum, ihre Klasse ist gleich der Zahl $D+4p+\sigma-1$ der Doppelpunkte, die ein Büschel von Kurven des Komplexes außerhalb der Basispunkte besitzt. Die ∞^3 Netze des Komplexes (denen die Schnitte der Fläche F mit den durch die einzelnen Punkte des Raumes gehenden Ebenen korrespondieren) liefern ∞^3 Jacobische Kurven J, die wieder einen linearen Kurvenkomplex bilden.

Zwei dieser Kurven J schneiden sich außerhalb der Basispunkte in $3D+12p-\sigma-3$ Punkten; schließt man von diesen die Doppelpunkte des den beiden zugehörigen Netzen gemeinsamen Büschels aus, so bleiben $2(D+4p-\sigma-1)$ Punkte C übrig von der Beschaffenheit, daß die geraden Polaren eines jeden von ihnen für alle Kurven f durch denselben Punkt C' gehen. Diese Punkte C liegen somit auf allen Kurven J. In jedem von ihnen berühren sich (und die Gerade CC') alle Kurven eines Netzes des Komplexes, in ihm haben ferner alle Kurven eines Büschels des Komplexes einen Doppelpunkt (und deshalb zwei Kurven f eine Spitze). Die Bilder der Punkte C sind die Kuspidalpunkte auf der Doppelkurve von F, welche die Ordnung $\frac{1}{2}(D-1)(D-2)-p$ hat. Die Punkte dieser Doppelkurve sind die Bilder der Punktepaare, durch die ∞^2 Kurven des Komplexes gehen. Diese *neutralen Punktepaare* erfüllen eine Kurve Δ von der Ordnung $(D-4)n+3$, die in jedem ν-fachen Basispunkt die Multiplizität $(D-4)\nu+1$ besitzt, durch jeden Punkt C geht und in ihm die Gerade CC' berührt.

Die Doppelkurve von F besitzt

$$t = \tfrac{1}{6}(D-1)(D^2-8D+18) - p(D-8) - \sigma$$

dreifache Punkte, die auch dreifache Punkte von F selbst sind. Dies ist sonach auch die Anzahl der *neutralen Punktetripel*, durch die ∞^2 Kurven des Komplexes gehen. Ihre $3t$ Punkte sind Doppelpunkte von Δ.

Die Jacobische Kurve eines Netzes von Kurven J setzt sich aus einer Kurve des Komplexes und einer festen Kurve zusammen. Diese ist der Ort der Rückkehrpunkte von Kurven f des Komplexes, und ihr Bild ist die *parabolische Kurve* von F. Sie hat die Ordnung $4(2n-3)$ und die Multiplizität $4(2\nu-1)$ in jedem ν-fachen Basispunkt, während sie in jedem Punkte C einen Doppelpunkt besitzt.

Diese Eigenschaften finden sich zum Teil bei Clebsch, *Math. Ann.* **1**, 253 (1869) und Cayley, ebenda **3**, 469 (1871), *Papers* VIII, 388; vollständig bei Caporali (a. a. O.). Vgl. auch Bäcklund, *Stockh. Vet. Akad. Handl.* $\mathbf{9}^2$, Nr. 9 (1870); Pannelli, *Rend. Circ. M.* **20**, 34 (1905).

Kapitel XV.

Die Punktkorrespondenzen zwischen algebraischen Kurven.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

§ 1. Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven. Zeuthensche Formel.

Eine algebraische Korrespondenz (α, β) zwischen den Punkten P, P' zweier algebraischen Kurven c, c', die auch in eine Kurve zusammenfallen können, ist definiert durch ein System von algebraischen Gleichungen zwischen den Koordinaten von P und P', die, wenn man P gibt, β Punkte P', und wenn man P' gibt, α Punkte P bestimmen. So werden mit jedem Punkte P von c β Punkte P' von c' und mit jedem Punkte P' von c' α Punkte P von c in *Korrespondenz* gesetzt; α, β heißen die *Indices* der Korrespondenz.

Eine beliebige Korrespondenz (α, β) läßt sich durch zwei Gleichungen zwischen den Koordinaten korrespondierender Punkte darstellen, aber diese Gleichungen werden im allgemeinen außer durch die Koordinaten der einander korrespondierenden Punkte noch durch die Koordinaten einer endlichen Anzahl anderer fremder Punktepaare befriedigt.

Wenn die Korrespondenz *einseitig eindeutig* ist (α oder $\beta = 1$), so ist sie nach dieser Seite hin *rational.* Ist z. B. $\beta = 1$, so lassen die Koordinaten von P' sich als rationale Funktionen der Koordinaten von P ausdrücken. Ist die Korrespondenz *wechselweise eindeutig* ($\alpha = \beta = 1$), so ist sie *birational,* d. h. auch die Koordinaten von P lassen sich als rationale Funktionen der Koordinaten von P' ausdrücken.

In einer Korrespondenz (α, β) zwischen zwei Kurven entsprechen äquivalenten Punktgruppen (Kap. XIV, § 3) *der einen*

Kurve äquivalente Punktgruppen der anderen (Severi, *Torino Atti* **38**, 185 (1903); *Lezioni,* p. 206).

Bei einer solchen Korrespondenz heißt *Verzweigungspunkt* auf einer der beiden Kurven ein Punkt, für den wenigstens zwei der korrespondierenden Punkte zusammenfallen (in einen *mehrfachen Punkt* der Korrespondenz). Setzt man voraus, daß auf den beiden Kurven nur *einfache* Verzweigungspunkte (für die nur zwei der korrespondierenden Punkte zusammenfallen) existieren, und sind η, η' ihre Anzahlen, p, p' die Geschlechter der beiden Kurven, so hat man die Relation (Zeuthen, *Math. Ann.* **3**, 150 (1871)):

$$\eta - \eta' = 2\alpha(p' - 1) - 2\beta(p - 1), \tag{1}$$

die für $\alpha = \beta = 1$ das Riemannsche Theorem über die Gleichheit des Geschlechtes bei zwei in eindeutiger Korrespondenz stehenden Kurven einschließt.

Eine analoge Formel gilt für eine beliebige Korrespondenz (α, β):

$$\sum(\nu' - \nu) = 2\alpha(p' - 1) - 2\beta(p - 1). \tag{2}$$

Hierin muß die Summe auf der linken Seite erstreckt werden über alle Paare korrespondierender Punkte A, A' von der Beschaffenheit, daß, wenn sich ein Punkt auf einem Zweige von c dem Punkte A unbegrenzt nähert, sich unter den β korrespondierenden Punkten ν' finden, die sich auf einem Zweige von $c'A'$ unbegrenzt nähern; ν ist analog definiert, wenn man die Punkte A und A' vertauscht. Diese Erweiterung rührt von Halphen her, *Bull. Soc. M.* **5**, 7 (1876), vgl. *Étude,* p. 626; außerdem Zeuthen, *Acta Math.* **1**, 171 (1882); Segre, *Ann. di Mat.* (2) **22**, 41 (1894); Bertini, *Introd.,* p. 399. Durch Anwendung der Analysis situs fanden sie Stouff, *Ann. éc. norm.* (3) **5**, 222 (1888); de Paolis, *Soc. ital. dei XL Mem.* (3) **7**, 124 (1890).

Die geometrische Deutung der Zeuthenschen Formel gab für $\beta = 1$ Castelnuovo, *Rom Acc. Linc. Rend.* (4) $\mathbf{7}^2$, 294 (1891), allgemein Severi, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **36**, 495 (1903), vgl. *Lezioni,* p. 208. Eine unmittelbare Folge aus der Formel selbst ist die von H. Weber (*J. f. Math.* **76**, 345 (1873)) gemachte Bemerkung: *Eine Korrespondenz zwischen zwei Kurven von demselben Geschlecht $p > 1$, die einseitig eindeutig ist, ist auch wechselseitig eindeutig (birational).*

§ 2. Korrespondenzen zwischen rationalen Kurven. Chaslessches Korrespondenzprinzip.

Sind die Kurven c, c' rational, so läßt sich jede algebraische Korrespondenz (α, β) zwischen ihren Punkten durch eine einzige Gleichung

$$f(u, v) = 0 \tag{1}$$

von den Graden α, β zwischen den Parametern u, v ihrer korrespondierenden Punkte darstellen. Für $\alpha = \beta = 1$ heißt die Korrespondenz (in Erweiterung eines für gerade Linien geltenden Satzes) *projektiv*.

Die Korrespondenz ist festgelegt, wenn $\alpha\beta + \alpha + \beta$ Paare entsprechender Punkte gegeben sind. Auf c liegen $2\alpha(\beta - 1)$, auf c' $2\beta(\alpha - 1)$ Verzweigungspunkte.

Wenn c' mit c zusammenfällt und man die Parameter u und v in der gleichen Weise bestimmt, so ergeben sich die Koinzidenzelemente, die mit einem ihrer korrespondierenden Elemente zusammenfallen, für $u = v$, somit folgt:

Eine algebraische Korrespondenz (α, β) *auf einer rationalen Kurve besitzt* $\alpha + \beta$ *Koinzidenzpunkte,* wenn nicht jeder Punkt der Kurve ein Koinzidenzpunkt ist.

Dieses *Korrespondenzprinzip* wird gewöhnlich nach Chasles benannt, weil dieser es zuerst formuliert hat, *C. R.* **58**, 1175 (1864), aber schon vorher hatten verschiedene Anwendungen davon gemacht: de Jonquières, *Mélanges de géom. pure* 1856, Chap. 4, *J. de Math.* (2) **6**, 113 (1861) und Cremona, *Introduzione* (1863), n. 83, 87, 98, 106, 116, 117, *Nouv. Ann.* (2) **3**, 26 (1864). Für die Geschichte des Prinzips vgl. Segre, *Bibl. Math.* (2) **6**, 33 (1892).

Die Bedeutung des Prinzips besteht darin, daß es erlaubt, die Anzahl der Koinzidenzen allein aus den Indices abzuleiten. Es besteht aber als einfache Anwendung des *Fundamentalsatzes der Algebra* nur dann, wenn jeder Koinzidenzpunkt mit der gehörigen *Multiplizität* gerechnet wird, und in der Bestimmung dieser Multiplizität besteht die Schwierigkeit seiner Anwendung. Eine *hinreichende* Bedingung dafür, daß ein Punkt wenigstens doppelt zu zählen ist, findet sich darin, daß der Punkt, ob man ihn zur einen oder anderen der zwei übereinanderliegend zu denkenden Kurven rechnet, beidemal mit zwei seiner entsprechenden Punkte zusammenfällt. Die Bedingung ist auch *notwendig,* wenn die Korrespondenz *involutorisch* ist (d. h. die Gleichung (1) sich bei Vertauschung von u und v nicht ändert); es genügt dann aber

auch, zu sagen: *der Punkt muß mit zwei seiner entsprechenden Punkte zusammenfallen*, da ihm dieselben Punkte entsprechen, ob man ihn zur einen oder anderen der beiden übereinanderliegenden Kurven rechnet.

Denkt man sich die Korrespondenz (α, β) auf eine Gerade übertragen, so hat Zeuthen, *Bull. Sc. M.* **5**, 186 (1873), folgende Regel gegeben, die in jedem Falle genau die Multiplizität eines Koinzidenzpunktes U liefert: *diese ist gleich der Summe der Ordnungen des Unendlichkleinen aller Strecken* PP_1', PP_2', ..., *die von einem Punkte* P *der Geraden, dessen Abstand von* U *unendlich klein von der ersten Ordnung ist, und seinen entsprechenden Punkten* P_1', P_2', ... *begrenzt werden.*

Zum Vorstehenden vgl. noch Em. Weyr, *Beiträge zur Kurvenlehre* 1880; R. Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeom.* I, 1892, S. 16; *Die Lehre v. d. geom. Verwandtschaften* I, 1908, 225; Bertini, *Introd.*, p. 202, 391. Über die Korrespondenzen (1, 2) und deren Anwendung auf c_3 mit Doppelpunkte vgl. Em. Weyr, *Th. d. mehrdeutigen geom. Elementargebilde*, 1869, und Pittarelli, *Rom Acc. Linc. Mem.* (4) **3**, 375, 401 (1886). Die Korrespondenzen (α, β) sind formentheoretisch von Peano, *Torino Atti* **17**, 73 (1881), *Giorn. di mat.* **20**, 79 (1882), studiert worden; die (2, 2) von Capelli, *Giorn. di mat.* **17**, 69 (1879).

§ 3. Korrespondenzen zwischen Kurven von beliebigem Geschlecht. Das Cayley-Brillsche Korrespondenzprinzip.

Von den algebraischen Korrespondenzen (α, β) auf einer Kurve c vom Geschlecht p sind insbesondere die untersucht worden, die sich durch eine *einzige* Gleichung zwischen den Koordinaten homologer Punkte P, P' darstellen lassen, wobei die Gleichung, wenn P gegeben ist, nur für die β entsprechenden Punkte P' und außerdem eventuell für gewisse feste Punkte von c und den Punkt P selbst, eine bestimmte Anzahl γ $(\geqq 0)$-mal gezählt, erfüllt ist.

Diese Bedingung läßt sich auch anders ausdrücken. Im allgemeinen bewegt sich, wenn P auf c wandert, die Gruppe der β korrespondierenden Punkte nicht in einer linearen Schar der Ordnung β. Es kann aber geschehen, daß die Gruppen, die sich aus den β dem Punkte P korrespondierenden Punkten P' und dem γ-mal gezählten Punkte P selbst zusammensetzen, innerhalb einer (von P unabhängigen) linearen Schar der Ordnung $\beta + \gamma$ variieren. Das ist aber gerade der oben ins Auge gefaßte Fall.

Das *Cayley-Brillsche Korrespondenzprinzip* sagt dann aus, daß *bei einer solchen Korrespondenz*

$$u = \alpha + \beta + 2\gamma p$$

Koinzidenzelemente existieren.

Diese Formel ist zuerst von Cayley, *C. R.* **62**, 586 (1866), *Lond. Math. Soc. Proc.* **1**, 1 (1866), *Papers* V, 542, VI, 9, gefunden worden, unmittelbar darauf hatte Chasles, *C. R.* **62**, 579 (1866), sein Korrespondenzprinzip auf beliebige rationale Kurven angewandt. Den ersten vollständigen Beweis für die Cayleysche Formel hat Brill, *Math. Ann.* **6**, 33 (1873), auf algebraischem Wege gegeben, mehr geometrisch ibid. **7**, 607 (1874) und mit weiteren Entwicklungen ibid. **31**, 374 (1888), **36**, 321 (1890); s. auch F. Junker, *Diss. Tübingen* 1889. Brill hat die Zahl γ die *Wertigkeit* der Korrespondenz genannt und ihre algebraische Bedeutung festgelegt. Einen anderen analytisch-geometrischen Beweis der Formel gab Bobek, *Wien Ber.* **93**, 899 (1886); einen überräumlichen Segre, *Introd.* § 12; einen transzendenten Lindemann, *J. f. Math.* **84**, 300 (1878) (vgl. Clebsch-Lindemann, S. 441, 678, 720); abzählende Beweise Schubert, *Kalkül* § 18 und Zeuthen, *Math. Ann.* **40**, 99 (1892), der hier seine (am Ende von § 2 angegebene) Regel auf Kurven beliebigen Geschlechts übertragen hat; s. auch Severi, *Torino Mem.* (2) **50**, 82 (1901), wo außerdem die Zahl der zyklischen Gruppen von gegebenem Index bestimmt ist.

In den Anwendungen, besonders auf das *Berührungsproblem* (s. vor. Kap., § 10) bietet sich häufig der Fall dar, daß bei der Korrespondenz (α, β) die Gruppe der β Punkte P', die einem Punkte P zugeordnet sind, aus β_1 λ_1-fachen Punkten besteht, die P in einer Korrespondenz (α_1, β_1) mit u_1 Koinzidenzen zugeordnet sind, aus weiteren β_2 λ_2-fachen Punkten, die P in einer Korrespondenz (α_2, β_2) mit u_2 Koinzidenzen entsprechen usw. Dann erhält man die Formel:

$$\lambda_1(u_1 - \alpha_1 - \beta_1) + \lambda_2(u_2 - \alpha_2 - \beta_2) + \cdots = 2\gamma p,$$

die auch von Cayley (*l. c.*) herrührt. Dieser hat sie auf die Bestimmung der Kurven, die mit einer gegebenen verschiedene Berührungen haben, und der Dreiecke, die gegebenen Kurven ein- und umschrieben sind, angewendet (*Philos. Trans.* **158**, 145 (1868), **161**, 369 (1871), *Papers* VI, 263, VIII, 212). Für das erstere Problem vgl. auch die zitierte Arbeit von Brill, *Math. Ann.* **6**, 46 (1873), dieser hat hier und ebenda **4**, 510 (1871), **7**, 611

(1874) auch die *Zahl der Paare von Punkten* bestimmt, die einander gleichzeitig in zwei Korrespondenzen (α, β), (α', β') von den Wertigkeiten γ, γ' entsprechen: diese Zahl ist $\alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma' p$.

§ 4. Das Hurwitzsche Korrespondenzprinzip.

Die Bestimmung und Untersuchung *aller* algebraischen Korrespondenzen, die auf irgend einer algebraischen Kurve existieren, verdankt man Hurwitz, *Math. Ann.* **28**, 561 (1887), der sich transzendenter Methoden bediente, indem er zum Ausgangspunkte die Darstellung der allgemeinsten Korrespondenzen (α, β) auf einer Kurve c vom Geschlecht $p > 0$ durch das Verschwinden eines Thetaquotienten wählte.

Wenn $o_1, \ldots, o_\alpha$ die α Punkte von c sind, die einem und demselben Punkt o' entsprechen, und $u_1, \ldots, u_p$ linear unabhängige Integrale erster Gattung, die zu c gehören, bedeuten, so hat man die Relationen:

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{\alpha} u_k(o_r) = \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki} u_i(o') + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p);$$

in diesen sind π_{ki}, π_k Konstante, von denen die ersteren für die Korrespondenz charakteristisch sind, während die letzteren unwesentlich, nämlich von der Wahl der additiven Konstanten in den Integralen u abhängig sind.

Setzt man, was erlaubt ist, die Integrale u so normiert voraus, daß die folgende Tabelle der Periodizitätsmoduln gilt:

$$\begin{array}{llllllllll} u_1) & 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \ldots & \tau_{1p} \\ u_2) & 0 & 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \ldots & \tau_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_p) & 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \ldots & \tau_{pp} \end{array} \qquad (\tau_{ik} = \tau_{ki}),$$

dann berechnen sich die π_{ki} mit Hilfe der folgenden, aus (1) abgeleiteten linearen Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_{i=1}^{p} g_{il}\tau_{ki}, \\ \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\tau_{il} = H_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G_{il}\tau_{ki} \end{cases} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p)$$

in denen die h, g, H, G ganze Zahlen bezeichnen. Eliminiert man

daraus π_{kl}, so entstehen die folgenden p^2 *quadratischen Beziehungen zwischen den* τ_{ik}:

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{p} h_{ki}\,\tau_{il} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} g_{ji}\tau_{il}\tau_{kj} = H_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G_{il}\,\tau_{ki} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p).$$

Wenn diese durch die Perioden τ_{ik} identisch erfüllt werden, so daß

$$h_{11} = h_{22} = \cdots = h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \cdots = G_{pp} = -\gamma$$

gesetzt werden kann und alle anderen Zahlen g, h, G, H verschwinden, dann nehmen die Gleichungen (1) die Form an

$$(4)\quad \sum_{r=1}^{\alpha} u_k(o_r) + \gamma \cdot u_k(o') = \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

In diesem Fall spricht man von einer *Wertigkeits-Korrespondenz* mit der *Wertigkeit* $\gamma\,(\gtrless 0)$.

Die geometrische Deutung dieser Gleichungen fließt aus dem Abelschen Theorem und fällt für $\gamma \geq 0$ zusammen mit der, von der wir ausgegangen sind, während sie für $\gamma < 0$, wenn man $-\gamma = \gamma'$ setzt und mit q' und $q_1, \ldots, q_\alpha$ einen von o' verschiedenen Punkt und seine α entsprechenden Punkte bezeichnet, darin besteht, daß die Gruppe, die von dem γ'-mal gezählten Punkte o' und $q_1, \ldots, q_\alpha$ gebildet wird, äquivalent ist zu der, die der γ'-mal gezählte Punkt q' mit $o_1, \ldots, o_\alpha$ bildet.

Wenn hingegen die Gleichungen (3) sich nicht alle auf Identitäten reduzieren, sondern wirkliche Gleichungen zwischen den Perioden darstellen, so heißt die Korrespondenz eine *singuläre*, eine solche ist nur auf einer Kurve mit spezialisierten Moduln (Kap. XIV, § 8), einer sog. *singulären Kurve*, möglich.

Es ergibt sich so, daß *auf einer nicht-singulären Kurve (mit allgemeinen Moduln) nur Wertigkeits-Korrespondenzen möglich sind.*

Hurwitz hat dieses Resultat dahin vervollständigt, daß *auf jeder singulären Kurve auch wirklich, neben gewöhnlichen, immer singuläre Korrespondenzen existieren.*

In jedem Falle erhält man alle auf der Kurve existierenden Korrespondenzen, indem man die Gleichungen (2) auflöst. Hurwitz hat gezeigt, daß man die Gleichung irgend einer Korrespondenz aus den Gleichungen einer gewissen endlichen Anzahl μ von geeignet gewählten Korrespondenzen durch Multiplikation zusammensetzen kann. Je nachdem $\mu = 1$ oder $\mu > 1$, hat man eine Wertigkeits- oder singuläre Korrespondenz.

Für die Anzahl der *Koinzidenzen* hat Hurwitz in jedem Falle die beiden Ausdrücke gefunden

$$\alpha + \beta - \sum_{i=1}^{p}(h_{ii} + G_{ii}),$$

$$\alpha + \beta + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_\mu\lambda_\mu;$$

in dem ersten sind h_{ii}, G_{ii} die oben eingeführten Zahlen, in der zweiten sind $c_1, \ldots, c_\mu$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ ganze Zahlen, von denen die ersteren allein von der Natur der Kurve, die letzteren allein von der Korrespondenz abhängen. Für eine Wertigkeits-Korrespondenz reduzieren sich beide Ausdrücke auf $\alpha + \beta + 2\gamma p$, was (für $\gamma \geqq 0$) der Cayley-Brillsche Ausdruck ist.

Wenn eine Korrespondenz das Produkt mehrerer Wertigkeits-Korrespondenzen (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_k, \beta_k)$ mit den (beliebigen) Wertigkeiten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ ist, so ist die Anzahl ihrer Koinzidenzpunkte

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k + \beta_1\beta_2 \ldots \beta_k + (-1)^{k+1} \cdot 2p\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k.$$

Daraus folgt, daß die Brillsche Formel $\alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma' p$ für die Anzahl der gemeinsamen Punktepaare zweier Korrespondenzen (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ für alle Wertigkeits-Korrespondenzen gilt.

Eine Darstellung des wesentlichen Inhaltes der Hurwitzschen Arbeit findet man bei Klein-Fricke, *Theorie d. ellipt. Modulfunktionen* II, 1892, S. 518; Baker, *Abels theorem and the allied theory,* Cambr. 1897, p. 639.

Die allgemeine Theorie der Korrespondenzen hat auf geometrische Weise Severi aufgebaut, *Torino Mem.* (2) **54**, 1 (1903), *Lezioni,* p. 199, der zuerst Wertigkeits-Korrespondenzen (auf Grund der oben gegebenen geometrischen Definition) betrachtete und für alle Fälle die durch die Gruppe der Koinzidenzpunkte bestimmte lineare Schar ermittelte. Z. B. ergibt sich, daß für ein beliebiges γ die Korrespondenzformel $\alpha + \beta + 2\gamma p$ die zahlmäßige Interpretation des folgenden geometrischen Satzes ist: *Die Gruppe der Koinzidenzpunkte ist äquivalent der Summe der Gruppen, die die einem Punkte P in der gegebenen und in der inversen Korrespondenz entsprechenden Punkte enthalten, zusammen mit γ kanonischen Gruppen* (Kap. XIV, § 4 Anf.) *und dem 2γ-mal gezählten Punkte P.*

§ 5. Algebraische Scharen von Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve. Involutionen.

Die Hurwitzschen Sätze, auf eine einseitig rationale Korrespondenz $(\alpha, 1)$, $\alpha > 1$, zwischen zwei Kurven c, c' angewandt, ergeben, daß, *wenn c nicht singulär und vom Geschlecht $p > 1$ ist, c' rational sein muß.*

Man nennt (vor. Kap. § 2) *Involution von der Ordnung n* und *Stufe* oder *Dimension r* auf einer algebraischen Kurve eine aus Gruppen von n Punkten zusammengesetzte algebraische Schar von der Art, daß r allgemeine Punkte der Kurve einer und nur einer Gruppe angehören. Ist dann eine Korrespondenz $(\alpha, 1)$ zwischen c und c' gegeben, so durchlaufen, wenn ein Punkt auf c' wandert, seine α entsprechenden Punkte auf c die Punktgruppen einer Involution von der Stufe 1 und der Ordnung α, die *rational* heißt, wenn das Geschlecht p' von $c' = 0$ ist, und *irrational, vom Geschlecht p'*, wenn $p' > 0$ sein sollte.

Der voranstehende Lehrsatz läßt sich demnach auch so formulieren: *auf einer nicht singulären Kurve vom Geschlecht $p > 1$ ist jede Involution der Stufe 1 und Ordnung $\alpha > 1$ rational, oder eine lineare Schar g_α^1.*

Ein anderer wichtiger Satz lautet: *Auf einer algebraischen Kurve kann nicht ein unendliches, kontinuierliches System von einstufigen irrationalen Involutionen existieren.*

Hieraus leitet sich eine charakterische Eigenschaft der mehrfach unendlichen $(r > 1)$ linearen Scharen g_n^r ab: *Auf einer algebraischen Kurve ist eine Involution von der Ordnung n und Dimension $r > 1$ entweder eine lineare Schar g_n^r oder man erhält sie (wenn die Kurve vom Geschlecht $p > 0$ ist), indem man auf alle möglichen Arten die Punktgruppen einer einstufigen irrationalen Involution zu r und r zusammenfaßt. Auf einer rationalen Kurve ist jede Involution rational.*

Diese Eigenschaften sind mit Hilfe Abelscher Integrale bewiesen worden von Castelnuovo, *Torino Atti* **28**, 727 (1893); Humbert, *J. de Math.* (4) **10**, 169 (1894) (die vorletzte war aber implizite in einem Satz von Painlevé, *Ann. éc. norm.* (3) **8**, 135 (1891), enthalten); ein anderer transzendenter Beweis bei Castelnuovo und Enriques, *Ann. éc. norm.* (3) **23**, 345 (1906); vgl. Severi, *Lezioni*, p. 340. Algebraische Beweise gaben de Franchis, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{12}^1$, 303 (1903); R. Torelli, *Ven. Ist. Atti* $\mathbf{67}^2$, 831 (1908).

Einige Sätze über einstufige irrationale Involutionen bei

Castelnuovo, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) 7^2, 294 (1891), der u. a. den Riemann-Rochschen Satz auf diese Involutionen ausgedehnt hat; Amodeo, *Ann. di Mat.* (2) **20**, 227 (1892). Für den Fall einer hyperelliptischen Kurve siehe R. Torelli, *Rend. Circ. M.* **19**, 297 (1905).

In den letzten Jahren hat man angefangen, allgemeiner die r-stufigen algebraischen Scharen von der Ordnung n auf einer Kurve f vom Geschlecht p zu untersuchen. Es heißt dann *Index* der Schar die Anzahl ν ihrer (aus n Punkten bestehenden) Punktgruppen, die r allgemein auf f gegebene Punkte enthalten. Für $\nu = 1$ erhält man die Involutionen.

Enriques, *Rend. Circ. M.* **10**, 30 (1895), hat bewiesen, daß, wenn eine solche Schar rational ist (d. h. ihre Punktegruppen sich wechselweise eindeutig auf die Punkte eines linearen Raums von r Dimensionen beziehen lassen), ihre Punktgruppen untereinander äquivalent sind, mit anderen Worten, die Schar ist entweder eine g_n^r oder in einer linearen g_n^s $(s > r)$ enthalten. Vgl. Severi, *Lezioni*, p. 205.

Castelnuovo, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) 15^1, 337 (1906), hat ein Kriterium dafür angegeben, ob eine algebraische irreduzible einstufige Schar von der Ordnung n und dem Index ν aus äquivalenten Gruppen besteht. Es ergibt sich, daß *eine solche Schar höchstens* $2\nu(n + p - 1)$ *Doppelpunkte besitzt und das Maximum dann und nur dann erreicht wird, wenn die Schar in einer linearen Schar (der Ordnung n) enthalten ist.* Dies Kriterium ist auf mehrfach unendliche Scharen ausgedehnt worden von R. Torelli, *Torino Atti* **42**, 86 (1907).

Castelnuovo hat sein Kriterium angewandt, um den folgenden von Severi, *Ann. di Mat.* (3) **12**, 55 (1906), auf transzendentem Wege gefundenen Satz — der eine wesentliche Rolle spielt in den neuesten Untersuchungen über die Geometrie auf einer algebraischen Fläche — geometrisch zu beweisen: *Wenn eine algebraische einstufige irreduzible Schar von der Ordnung n und dem Index ν so beschaffen ist, daß die Gesamtheit ihrer ν Punktgruppen, die einen Punkt P der Kurve enthalten (inkl. den ν-mal gezählten Punkt P), beim Verändern von P sich in einer linearen Schar der Ordnung nν bewegt, dann sind alle Punktegruppen der Schar äquivalent.* Vgl. Severi, *Lezioni* p. 240. Andere Anwendungen des Kriteriums bei Severi, *Ven. Ist. Atti* 65^2, 625 (1906).

Die Beweise der vorstehenden Sätze gründen sich auf eine wichtige Formel von Schubert, die sich bei Segre, *Rom. Acc. L. Rend.* (4) 3^2, 3, 149 (1887), *Introd.* § 13, findet, sie bildet

auch das Fundament für die Behandlung der Geometrie auf einer algebraischen Kurve mit rein geometrischen Hilfsmitteln (den Überräumen). Sind auf einer Kurve vom Geschlecht p eine g_n^r und eine rationale oder irrationale, einstufige Schar γ von der Ordnung m und dem Index ν gegeben und wird vorausgesetzt, daß eine allgemeine Gruppe von γ $k+1 (\leqq r)$ unabhängige Bedingungen den Punktgruppen g_n^r, die sie enthalten sollen, auferlegt, dann liefert die in Rede stehende Formel die Anzahl z der Gruppen von γ, die $k+1$ den Gruppen von g_n^r nur k Bedingungen auferlegende Punkte enthalten, in dem folgenden Ausdruck:

$$(1) \qquad z = n\nu\binom{m-1}{k} - \frac{1}{2}d\binom{m-2}{k-1} - \mu\binom{m}{k+1},$$

wobei d die Zahl der Doppelpunkte von γ bedeutet und μ die Zahl der Gruppen von γ, die in einer (nicht alle Gruppen von γ als einen Teil in sich schließenden) g_n^k von g_n^r enthalten sind. Einen einfachen Beweis, der aus der Korrespondenztheorie genommen ist, findet man bei Severi, *Lezioni*, p. 236, wiederholt in *Padova Atti e Mem.* **24**, 137 (1908). Die Ausdehnung auf ein mehrfach unendliches System γ, mit abzählenden Anwendungen, bei R. Torelli, *Ven. Ist. Atti* **67**^{2}, 1323 (1908). Insbesondere liefert (1) die Anzahl

$$n\nu\binom{m-1}{r} - \frac{1}{2}d\binom{m-2}{r-1}$$

der Gruppen von $r+1$ Punkten, die g_n^r und γ gemein haben.

§ 6. Birationale Transformationen einer Kurve in sich.

Eine irreduzible rationale Kurve gestattet ∞^3 *birationale Transformationen in sich*, die eine kontinuierliche Gruppe mit 3 Parametern bilden. Es sind dies die Projektivitäten, die sich zwischen den Punkten der Kurve aufstellen lassen.

Eine elliptische Kurve gestattet ∞^1 *birationale Transformationen in sich.* Diese bilden eine gemischte Gruppe, in welcher die Transformationen zweiter Art (vgl. u.) eine kontinuierliche Gruppe mit einem einzigen Parameter bilden, während die erster Art, d. h. die g_2^1, keine Gruppe für sich bilden.

Eine Kurve vom Geschlecht $p > 1$ *kann nur eine endliche Anzahl von birationalen Transformationen in sich zulassen.* Für dies Theorem vgl. zunächst H. A. Schwarz, *J. f. Math.* **87**, 139 (1875), *Abhandlgn.* II, 285; Weierstraß, *Werke* II, 285; F. Klein, *Über Riemanns Theorie d. alg. Funkt.* 1882, S. 64 und *Brief an*

Poincaré 1882 (Poincaré, *Acta Math.* **7**, 12 (1885)). Andere Beweise bei Hettner, *Gött. Nachr.* 1880, S. 386; Noether, *Math. Ann.* **20**, 59 (1882), **21**, 138 (1883); Picard, *J. de Math.* (4) **5**, 119 (1889), *Bull. Soc. M.* **21**, 1 (1893), *Traité*, p. 479; Segre, *Introd.* § 21; Severi, *Lezioni*, p. 182.

Das Problem, alle algebraischen Kurven mit eindeutigen Transformationen in sich zu bestimmen, hat Hurwitz behandelt, *Math. Ann.* **32**, 290 (1888), **41**, 403 (1893); er hat bewiesen, daß für $p > 1$ solche Kurven entweder hyperelliptisch oder singulär sind (§ 4), überdies daß die Zahl der Transformationen, wo sie existieren, $\leqq 84\,(p-1)$ und eine jede notwendig periodisch mit einer Periode $\leqq 10\,(p-1)$ sein muß. Wenn sie nicht die Identität ist, hat sie eine Anzahl $\leqq 2p+2$ von Koinzidenzpunkten. Schließlich kann man jede Kurve, die eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n zuläßt, darstellen durch eine Gleichung, in der eine der beiden Veränderlichen nur in Potenzen, deren Exponent durch n teilbar ist, vorkommt. Für den Wert der Periode hat Wiman, *Stockh. Bihang* **21**^{1}, 4 (1895), die obere Grenze $2(2p+1)$ angegeben, die niedriger ist als die Hurwitzsche Zahl.

Man beachte, daß der Schwarz-Kleinsche Satz und der Satz von der Periodizität der Transformationen auseinander folgen; den ersteren hat Hurwitz, *Math. Ann.* **41**, 406 (1893), auch aus der Maximalzahl der Koinzidenzpunkte abgeleitet.

Betrachten wir insbesondere den Fall $p = 1$, d. h. die *birationalen Korrespondenzen auf einer elliptischen Kurve.* Aus den Formeln des § 4 folgt, daß wenn man $u(o) = u$, $u(o') = u'$ setzt, die *gewöhnlichen* birationalen Korrespondenzen durch

$$u' = \pm u + \text{const.} \tag{1}$$

gegeben werden, die *singulären* dagegen durch die Gleichungen

$$u' = \pm iu + \text{const.} \tag{2}$$

und

$$u' = \pm \varepsilon u + \text{const.}, \quad u' = \pm \varepsilon^2 u + \text{const.}, \tag{3}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ und ε eine imaginäre dritte Einheitswurzel bezeichnet.

Man erhält (2) oder (3), wenn sich durch geeignete Wahl der Perioden ihr Verhältnis zu i oder ε machen läßt. Im ersteren Fall heißt die Kurve *harmonisch*, im letzteren *äquianharmonisch.*

An geometrischen Darstellungen der *gewöhnlichen* Korrespondenzen vgl. vor allem Em. Weyr, *Wien. Ber.* **87**, 837 (1883), **88**, 436 (1884) und Segre, *Math. Ann.* **27**, 296 (1886), wo sich viele bibliographische Nachweise finden. Eine geometrische vollständige Untersuchung der birationalen, *gewöhnlichen* und *singulären*, Korrespondenzen gaben Segre, *Torino Atti* **24**, 734 (1889); S. Kantor, *Napoli Atti* (2) **1** (1888), *Torino Atti* **29**, 9 (1894).

Es ergibt sich, daß *zwei willkürliche Punkte der elliptischen Kurve sich als ein Paar entsprechender Punkte für eine birationale Korrespondenz der Kurve in sich annehmen lassen, und solcher Korrespondenzen gibt es zwei, wenn die Kurve nicht singulär ist, vier, wenn sie harmonisch, sechs, wenn sie äquianharmonisch ist.*

Die gewöhnlichen Korrespondenzen sind die g_2^1 *und ihre Produkte.* Je nachdem das Produkt eine ungerade oder gerade Anzahl von Faktoren enthält, heißt die Korrespondenz *von der ersten Art* (und ist eine g_2^1) oder *von der zweiten Art.* Im ersteren Falle hat sie vier Koinzidenzpunkte, im letzteren Falle hat sie keinen oder ist die Identität. Die beiden Fälle bekommt man aus (1) durch Trennung des Vorzeichens von u.

Jede Transformation *zweiter* Art ist das Produkt von zwei solchen *erster* Art, von denen man eine beliebig wählen kann. Während die Transformationen erster Art alle involutorisch sind, sind es unter denen zweiter Art nur *drei*: außer diesen gibt es keine involutorischen Transformationen der Kurve in sich. Die Transformationen erster Art sind *rational*, die zweiter Art *elliptisch*.

Die singulären Korrespondenzen auf einer harmonischen Kurve haben zwei Koinzidenzpunkte und sind zyklisch mit der Periode vier. Diejenigen auf einer äquianharmonischen Kurve haben entweder drei Koinzidenzpunkte und sind zyklisch mit der Periode drei, oder sie haben einen einzigen Koinzidenzpunkt und sind zyklisch mit der Periode sechs.

Die singulären birationalen Korrespondenzen auf einer elliptischen Kurve sind eng verbunden mit der Theorie der komplexen Multiplikation elliptischer Funktionen, wie diejenigen auf einer Kurve vom Geschlecht $p > 1$ mit der gleichen Theorie für die Abelschen Funktionen. Vgl. H. Weber, *Math. Enzykl.* I 2 (C 6, S. 716).

Die Theorie der wechselweise eindeutigen Korrespondenzen zwischen den Punkten einer elliptischen Kurve hat Castelnuovo erweitert, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **25**, 1189 (1892), indem er auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln die eineindeutigen Korrespondenzen zwischen Gruppen von p Punkten be-

trachtete. Diese sind von zwei Arten: die eine Art findet man, indem man auf der Kurve eine der unendlich vielen nicht-speziellen g^p_{2p} festlegt und zwei Gruppen von je p Punkten, die zusammen eine Gruppe der g^p_{2p} bilden, einander entsprechen läßt. Die andere Art findet man, indem man das Produkt einer geraden Anzahl von Korrespondenzen der ersten Art bildet.

Scorza, *Torino Atti* **35**, 443, 765 (1900), **36**, 610 (1901), **42**, 1080 (1907), hat auf einer Kurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln die Korrespondenzen (p, p) untersucht und diese insbesondere auf die ebenen Kurven 4. Ordnung angewendet.

Über hyperelliptische Kurven, die birationale Transformationen in sich zulassen, siehe S. Kantor, *Rend. Circ. M.* **9**, 65 (1895); über dieselben und die vom Geschlecht $p = 3, 4, 5, 6$ vgl. Wiman, *Stockh. Bihang* **21**^{1}, Nr. 1, 3 (1895).

Bolza, *Am. Journ.* **10**, 47 (1888), Auszug *Math. Ann.* **30**, 546 (1887), hat die Kurven vom Geschlecht $p = 2$ mit birationalen Transformationen in sich vollständig untersucht, indem er die Gruppen dieser Transformationen und die projektiven und transzendenten Invarianten der zugehörigen Kurven bestimmte.

Zum Schluß wollen wir noch auf die arithmetischen Untersuchungen von Poincaré, *J. de Math.* (5) **7**, 161 (1901), über ebene algebraische Kurven, die durch eine Gleichung *mit rationalen Koeffizienten* dargestellt werden, hinweisen. Hier sind die birationalen Transformationen mit *rationalen* Koeffizienten, die die Kurve in sich überführen, behandelt. Für die Äquivalenz zweier Kurven treten außer dem Geschlecht bestimmte andere charakteristische Invarianten auf. Der besondere Fall der Kurven 3. Ordnung ist von B. Levi, *Torino Atti* **41**, 739 (1906), **43**, 99, 413, 672 (1908), ausgeführt worden.

Kapitel XVI.

Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei Ebenen.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

§ 1. Rationale und birationale Transformationen.

1. *Allgemeine Bemerkungen über rationale Transformationen.* Wenn x_1, x_2, x_3 und x_1', x_2', x_3' die homogenen projektiven Koordinaten zweier Punkte x und x' in zwei Ebenen ξ und ξ' sind, so wird durch die Formeln

$$\varrho x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

in denen ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet und f_1, f_2, f_3 drei Ternärformen derselben Ordnung n ohne gemeinsame Teiler bedeuten, einem allgemeinen Punkte x von ξ ein und nur ein Punkt x' von ξ' zugeordnet und einem allgemeinen Punkte x' von ξ' eine endliche Anzahl D $(\geqq 1)$ von Punkten x der Ebene ξ. Nur wenn die f_i sich als Binärformen derselben Ordnung von zwei anderen Formen der x_i auffassen lassen, bleibt, wenn man x sich in der Ebene ξ verändern läßt, x' in ξ' auf einer (rationalen) Kurve.

Bei Ausschließung dieses Falles ergibt sich zwischen x und x' eine algebraische Beziehung von den Indizes 1, D, welche eine *rationale Transformation* heißt, da sie in nicht homogenen Koordinaten $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ und $x' = \frac{x_1'}{x_3'}$, $y' = \frac{x_2'}{x_3'}$ sich ausdrückt, indem man x', y' zwei rationalen Funktionen (mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante) von x, y gleichsetzt.

Die Transformation heißt *doppelt, dreifach*, ..., wenn $D = 2, 3, \ldots$; die Ebene ξ heißt die *einfache*, ξ' *D-fache* Ebene der Transformation.

Verändert man x' in ξ', so durchlaufen die D entsprechenden Punkte x in ξ eine Involution vom Grade D (vgl. Kap. XIII,

§ 3), die zu der Transformation *konjugiert* heißt. Ebenso heißen die Punkte einer Punktgruppe der Involution zueinander *konjugiert*.

Den Geraden von ξ' entsprechen in ξ die Kurven des Netzes $|f|$ vom Grade D:

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0.$$

Fundamentalpunkte von ξ heißen die Basispunkte dieses Netzes. Wenn x in einen dieser Punkte, A, fällt, so liefern die Gleichungen (1) keine bestimmten Werte für die Koordinaten x_i' des entsprechenden Punktes, vielmehr ergibt sich, wenn man x sich A kontinuierlich — aber in Richtungen, die nicht mit denen der eventuellen festen Tangenten von $|f|$ in A zusammenfallen, — nähern läßt, daß den Punkten der unmittelbaren Umgebung von A die Punkte einer rationalen Kurve in ξ' entsprechen; diese heißt *Fundamentalkurve*, und ihre Ordnung ist gleich der Anzahl der *veränderlichen* Tangenten, welche die Kurven von $|f|$ in A besitzen. Wenn also alle Tangenten dieser Kurven in A *fest* sind, so entspricht der unmittelbaren Umgebung von A ein einziger Punkt in ξ'.

2. *Allgemeine Eigenschaften der birationalen (Cremonaschen) Transformationen.* Wird $D = 1$ und somit $|f|$ ein *homaloidisches Netz* (s. Kap. XIII, § 3), so heißt die Beziehung zwischen ξ und ξ' *birational,* weil die nicht homogenen Koordinaten eines Punktes in *jeder* der beiden Ebenen sich als rationale Funktionen der Koordinaten der entsprechenden Punkte in der anderen Ebene ausdrücken lassen. Diese Korrespondenzen werden auch nach Cremona benannt, weil Cremona sie zuerst in ihrer vollen Allgemeinheit untersucht hat, *Bologna Mem.* (2) **2**, 621 (1863), **5**, 3 (1864) oder *Giorn. di mat.* **1**, 305 (1863), **3**, 269, 363 (1865).

Den Geraden *jeder* der beiden Ebenen entsprechen in der anderen die Kurven eines *homaloidischen Netzes* und die Beziehung ist projektiv, insofern einem Strahlenbüschel der ersten Ebene stets ein zu ihm projektives Kurvenbüschel in der anderen Ebene zugeordnet ist. Die homaloidischen Kurvennetze in den beiden Ebenen sind von derselben Ordnung; diese Ordnung heißt die *Ordnung der Transformation.*

Um demnach eine birationale Beziehung zwischen zwei Ebenen herzustellen, genügt es, die Geraden der einen Ebene projektiv auf die Kurven eines homaloidischen Netzes in der anderen Ebene zu beziehen; dann entspricht einem allgemeinen Strahlenbüschel

in der ersten Ebene ein Kurvenbüschel in der zweiten Ebene, die Basispunkte desselben sind alle bis auf einen feste Punkte, und der eine veränderliche Punkt ist der dem Büschelscheitel in der anderen Ebene zugeordnete Punkt.

Fundamentalpunkte der Transformation in den beiden Ebenen sind die Basispunkte der homaloidischen Netze, und *Fundamentalkurven* heißen die in der bereits erörterten Weise der unmittelbaren Umgebung eines Fundamentalpunktes der einen Ebene entsprechenden Kurven der anderen Ebene.

Jede Fundamentalkurve ist rational, und ihre Ordnung ist gleich der Multiplizität des zugehörigen (gewöhnlichen) Fundamentalpunktes der anderen Ebene.

Solche Punkte und Kurven existieren immer, wenn es sich nicht um eine Kollineation handelt. Mit anderen Worten:

Die einzigen Cremonaschen Transformationen einer Ebene in eine andere, die für alle Punkte ohne Ausnahme wechselweise eindeutig sind, sind die Kollineationen.

Wenn wir voraussetzen, daß von den beiden homaloidischen Netzen der Ordnung n alle Tangenten in den Fundamentalpunkten variabel sind, und mit r_i die Multiplizitäten der Fundamentalpunkte in ξ bezeichnen, so erhalten wir, indem wir ausdrücken, daß das Kurvennetz in ξ vom Grade 1 und vom Geschlecht 0 ist, die Cremonaschen Fundamentalbeziehungen:

$$(2) \qquad \sum r_i = 3n - 3, \quad \sum r_i^2 = n^2 - 1.$$

Denselben Relationen genügen die Multiplizitäten s_i der Fundamentalpunkte in ξ'.

Umgekehrt, wenn man die ganzzahligen positiven Werte n und r_i so bestimmt, daß sie die Beziehungen (2) erfüllen und zu irreduziblen Kurven gehören, so bilden die letzteren ein homaloidisches Netz und bestimmen demnach eine Cremonasche Verwandtschaft. Für jeden gegebenen Wert n besitzen die Gleichungen (2) eine endliche Anzahl von Lösungen, die paarweise *konjugiert* sind, indem man konjugiert die durch zusammengehörige Werte von r_i und s_i gelieferten Lösungen nennt.

Mit dem so bezeichneten Problem der diophantischen Arithmetik beschäftigte sich zuerst Cremona in der zweiten der zitierten Arbeiten, nach ihm S. Roberts, *Lond. M. S. Proc.* **4**, 121 (1872); F. P. Ruffini, *Bologna Mem.* (3) **8**, 457 (1877), **9**, 199 (1878); de Jonquières, *C. R.* **101**, 720, 857, 921 (1885), *Giorn. di mat.* **24**, 1 (1886), welch letzterer eine allgemeine Regel für die Lösung der Gleichungen bei beliebig ge-

gebenem n gefunden hat. Über die Bestimmung der homaloidischen Netze von gegebener Ordnung sehe man noch Montesano, *Napoli Rend.* (3) **11**, 259 (1905); Larice, *Ven. Ist. Atti* **68**^{2}, 731 (1909).

Eine besonders wichtige Lösung ist die, welche in den beiden Ebenen ein Netz von der Ordnung n mit einem $(n-1)$-fachen und $2(n-1)$ einfachen Fundamentalpunkten liefert. Die Fundamentalkurven in jeder der beiden Ebenen bestehen dann aus den Geraden, welche den vielfachen Fundamentalpunkt mit den einfachen verbinden und der Kurve von der Ordnung $n-1$, welche in dem ersten Punkt die Multiplizität $n-2$ besitzt und durch die übrigen einfach hindurchgeht. Diese Transformation heißt *isologisch* oder *Jonquièressche Transformation*, weil sie von de Jonquières gefunden wurde (s. *C. R.* **49**, 542 (1859), im Auszug *Nouv. Ann.* (2) **3**, 97 (1864), ungekürzt *Giorn. di. mat.* **23**, 48 (1884)).

An die Betrachtung der Fundamentalpunkte und -kurven knüpfen die folgenden, von Cremona gefundenen Sätze an:

Die Anzahl der Fundamentalpunkte ist in beiden Ebenen dieselbe.

Eine Fundamentalkurve ist vollständig bestimmt durch die Multiplizitäten, die sie in den Fundamentalpunkten besitzt, und sie hat keine mehrfachen Punkte außerhalb der letzteren.

Die Schnittpunkte zweier Fundamentalkurven fallen alle in Fundamentalpunkte.

Die Multiplizität, die eine Fundamentalkurve in einem Fundamentalpunkte besitzt, ist gleich der Multiplizität, die in der anderen Ebene die dem Punkte entsprechende Fundamentalkurve in dem der ersten Fundamentalkurve zugeordneten Fundamentalpunkte besitzt.

Die Fundamentalkurven jeder der beiden Ebenen bilden zusammengenommen die Jacobische Kurve des homaloidischen Kurvennetzes in der Ebene.

Die Kurven dieses Netzes werden von einer Fundamentalkurve nur in Fundamentalpunkten geschnitten, umgekehrt ist jede Kurve von dieser Eigenschaft eine Fundamentalkurve.

Zerfällt eine Kurve des homaloidischen Netzes, so sind alle ihre Teile bis auf einen Fundamentalkurven.

Jede Kurve, die einen festen Bestandteil eines Büschels von (zerfallenden) Kurven des Netzes bildet, ist eine Fundamentalkurve, und umgekehrt.

Die letzten Eigenschaften sind von Nutzen für die Bestimmung der konjugierten Lösung zu einer gegebenen Lösung der Gleichungen (2).

Nennen wir $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ die Multiplizität des i^{ten}, r_i-fachen Fundamentalpunktes von ξ für die k^{te} Fundamentalkurve, welche die Ordnung s_k hat (oder, was dasselbe ist, die Multiplizität des k^{ten}, s_k-fachen Fundamentalpunktes von ξ' für die i^{te} Fundamentalkurve dieser Ebene, welche die Ordnung r_i hat), so liefern die vorstehenden Sätze die Formeln:

$$\sum_k \alpha_{ik} = 3r_i - 1, \quad \sum_k \alpha_{ik}^2 = r_i^2 + 1,$$

$$\sum_k s_k \alpha_{ik} = nr_i, \qquad \sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk} = r_i r_j,$$

und die analogen, die sich durch Vertauschung von r und s ergeben. Daraus leitet man unmittelbar das Theorem von Clebsch, *Math. Ann.* **4**, 490 (1871), her, daß *die Determinante* $|\alpha_{ik}|$ *gleich* $\pm n$ *ist.*

Der andere merkwürdige Satz, daß *die Anzahlen der Fundamentalpunkte von den Multiplizitäten* 1, 2, 3, ... *gleich sind den Anzahlen der Fundamentalkurven von den Ordnungen* 1, 2, 3, ..., *in derselben oder einer anderen Reihenfolge genommen,* wurde von Cremona durch Induktion gefunden und bewiesen von Clebsch a. a. O. und von Bertini, *Rend. Circ. M.* **3**, 5 (1889). Diese Beweise gründen sich auf gewisse Eigenschaften der von allen Fundamentalpunkten oder -kurven derselben Ordnung gebildeten Gruppen, welche Eigenschaften zum Teil von Clebsch angegeben und von Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **13**, 5 (1880), ergänzt und dann a. a. O. (*Rend. Circ. M.* **3**) auf beliebige reguläre lineare Systeme (vgl. Kap. XIV, § 13) von ebenen Kurven erweitert wurden.

Wenn ein Punkt in der Ebene ξ *eine Kurve von der Ordnung* m *beschreibt, die durch den* r_i*-fachen Fundamentalpunkt* l_i*-mal hindurchgeht, so beschreibt der entsprechende Punkt in* ξ' *eine Kurve von der Ordnung* $mn - \sum l_i r_i$*, die in dem* s_k*-fachen Fundamentalpunkt die Multiplizität* $ms_k - \sum_i l_i \alpha_{ik}$ *besitzt.*

Wenn die beiden Ebenen zusammenfallen, so sind von besonderer Bedeutung die *isologischen Kurven* der einzelnen Punkte P der Ebene, d. h. die Örter der Punkte in der ersten oder zweiten Figur, die mit den entsprechenden Punkten in einer durch P gehenden geraden Linie liegen. Diese Kurven haben die Ordnung $n + 1$ und in den Fundamentalpunkten dieselbe Multiplizität wie die Kurven der homaloidischen Netze. Weiteres hierüber bei Guccia, *Rend. Circ. M.* **1**, 56, 119 (1886).

Mit Hilfe dieser isologischen Kurven erkennt man, daß im allgemeinen $n+2$ Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Die Zahl dieser Punkte vermindert sich aber um $\sum\sigma_i$, wenn die i^{te} Fundamentalkurve durch den zugehörigen, i^{ten} Fundamentalpunkt σ_i-mal hindurchgeht. Existiert außerdem eine irreduzible Kurve vom Geschlecht p, die keine mehrfachen Punkte außerhalb der Fundamentalpunkte besitzt, und deren sämtliche Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen, so gibt es außerdem noch $n+2p-\sum\sigma_i$ isolierte Punkte von dieser Eigenschaft.

Eine Verwandtschaft zwischen zwei übereinander gelagerten Ebenen besitzt außerdem eine bestimmte Anzahl *zyklischer Punktgruppen* von gegebenem Index N, d. h. Gruppen von N Punkten, die bei Anwendung der Transformation zyklisch ineinander übergehen. Die Anzahl dieser Punktgruppen wurde für quadratische Transformationen ($n=2$) von Hirst bestimmt, *Report Trans. Brit. Assoc. Birmingham* 1865, 9, *Quarterly Journ.* **17**, 301 (1881); sodann von S. Kantor, *Ann. di Mat.* (2) **10**, 64 (1880); allgemein von S. Kantor, *Ann. di Mat.* (2) **10**, 71 (1880). Man findet z. B., daß bei einer Transformation von der Ordnung n $\frac{1}{2}n(n-1)$ involutorische Punktepaare, $\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$ periodische Punktetripel existieren usw. Über den Fall, wo unendlich viele involutorische Punktepaare existieren, s. Doehlemann, *Ztschr. f. M.* **36**, 356 (1891).

Wie zwischen zwei Ebenen kann man auch eine Cremonasche Verwandtschaft zwischen zwei Bündeln betrachten. Sind diese nicht konzentrisch, so ergibt sich im allgemeinen eine Raumkurve von der Ordnung $n+2$ und dem Geschlecht $n-1$, in deren Punkten sich je zwei entsprechende Strahlen der beiden Bündel schneiden.

Eine Cremonasche Verwandtschaft kann auch stattfinden zwischen einem ebenen Punktfeld und einem ebenen Strahlenfeld und heißt dann *birationale Reziprozität. Zwischen zwei übereinander gelagerten Ebenen ist nur eine einzige birationale Reziprozität möglich, bei der jeder Punkt auf seinem entsprechenden Strahle liegt, diese ist quadratisch*: R. Sturm, *Math. Ann.* **19**, 474 (1882); Lazzeri, *Rom Acc. Linc. Rend.* (4) $\mathbf{2}^2$, 61 (1886); Ameseder, *Wien. Ber.* **83**, 385 (1881).

Über die allgemeine Theorie vgl. außer den bereits zitierten Arbeiten: Cayley, *Lond. M. Soc. Proc.* **3**, 127, 196 (1870), *Papers* VII, 189, 253. Die analytische Darstellung einiger besonderer Klassen von Transformationen bei Guccia, *Rend. Circ. M.* **1**, 17, 20, 24, 50 (1885). Eine Wiedergabe der hauptsäch-

lichen Resultate von Cremona und Clebsch bei Dewulf, *Bull. Sc. M.* (1) **5**, 223 (1875), Clebsch-Lindemann, S. 474. Andere Darstellungen der Theorie bei Salmon-Fiedler, S. 383, und Doehlemann, *Geomctrische Transformationen,* Leipzig, I 1902, II 1908.

§ 2. Quadratische Transformationen.

Von besonderer Wichtigkeit sind die *quadratischen Transformationen* ($n = 2$). Bei ihnen existieren in den beiden Ebenen je drei einfache Fundamentalpunkte A, B, C und A', B', C' und drei gerade Fundamentallinien, welche die Seiten der *Fundamentaldreiecke* ABC und $A'B'C'$ bilden. Die homaloidischen Kurvennetze bestehen aus den Kegelschnitten, die den Fundamentaldreiecken umschrieben sind.

Wenn die Fundamentalpunkte einander derart zugeordnet sind, daß die Strahlenbüschel A und A', B und B', C und C' zueinander in projektiver Beziehung stehen (s. u.), so entspricht einer Kurve von der Ordnung m, die in A, B, C die Multiplizitäten l_1, l_2, l_3 besitzt, eine Kurve von der Ordnung $2m - l_1 - l_2 - l_3$, die in A', B', C' die Multiplizitäten $m - l_2 - l_3$, $m - l_3 - l_1$, $m - l_1 - l_2$ besitzt.

Geometrische Konstruktionen der quadratischen Verwandtschaft gaben insbesondere Seydewitz, *Arch. Math. Phys.* (1) **7**, 113 (1846); Steiner, *Systematische Entwicklung* etc. (1832), *Werke* I, 229 (Nr. 59); Reye, *Ztschr. f. M.* **11**, 280 (1866), *Geom. d. Lage* II, 4. Aufl. 1907, S. 209.

Ordnet man zwei Paare nicht konzentrischer Strahlenbüschel A und A', B und B' einander projektiv zu, derart daß dem Strahl AB nicht in beiden Projektivitäten der Strahl $A'B'$ entspricht, so entsteht zwischen den beiden Ebenen eine quadratische Verwandtschaft, bei der jedem Punkt P der Punkt P' zugeordnet wird, in dem sich die den Geraden AP und BP entsprechenden Strahlen schneiden (Seydewitz). Die Büschelscheitel sind Fundamentalpunkte; der dritte Fundamentalpunkt, C oder C', wird gefunden, indem man die zu $A'B'$ in den Büscheln A und B oder die zu AB in den Büscheln A' und B' zugeordneten Strahlen zum Schnitt bringt.

Die Steinersche Konstruktion bezieht sich auf zwei *getrennte* Ebenen ξ, ξ': man legt außerhalb derselben zwei windschiefe Gerade a, b fest und findet zwei entsprechende Punkte in ξ und ξ' als die Schnittpunkte dieser Ebenen mit einem Strahl, der a

und b trifft. Die Fundamentalpunkte z. B. in ξ sind die Schnittpunkte von ξ mit a und b und der Punkt, in dem die Schnittlinie von ξ und ξ' von der Geraden getroffen wird, welche die Schnittpunkte von a und b mit ξ' verbindet.

Die Reyesche Konstruktion ergibt sich, indem man jedem Punkte der einen Ebene den Punkt der anderen Ebene entsprechen läßt, in dem sich die dem ersten in zwei gegebenen Reziprozitäten entsprechenden Geraden schneiden.

In der ersten der zitierten Arbeiten von Reye wird bewiesen, daß *eine quadratische Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen durch sieben Paare entsprechender Punkte festgelegt ist,* und die Beziehung untersucht, die zwischen der Verwandtschaft und dem durch die sieben Paare von konjugierten Punkten festgelegten System von ∞^1 Korrelationen besteht. Über den gleichen Gegenstand vgl. Schroeter, *J. f. Math.* **62**, 215 (1863); Ed. Weyr, *Ztschr. f. Math.* **14**, 445 (1869); Hirst, *Lond. M. Soc. Proc.* **5**, 40 (1874), **8**, 262 (1877) oder *Ann. di Mat.* (2) **6**, 260 (1874), **8**, 287 (1877), *Rom Linc. Trans.* (3) **1**, 8 (1877); R. Sturm, *Math. Ann.* **19**, 461 (1882); London, ibid. **38**, 336 (1891); V. Weiss, *Wien. Ber.* **111**, 1489 (1902).

Die Fundamentalpunkte der quadratischen Verwandtschaft lösen das sog. *Problem der ebenen Projektivität.* Dieses besteht darin, in einer Ebene die Punkte zu suchen, aus denen sieben Paare von Punkten durch sieben Paare entsprechender Strahlen zweier projektiven Büschel projiziert werden. Über dieses Problem vgl. Cremona, *Nouv. Ann.* (1) **20**, 452 (1861); R. Sturm, *Math. Ann.* **1**, 533 (1869), *Die Lehre v. d. geom. Verwandtschaften* I, 1908, S. 348. Über seine Bedeutung für die Photogrammetrie siehe den Bericht von Finsterwalder, *Math.-Ver.* **6** (1899).

Die Beziehungen der quadratischen Verwandtschaft zur *trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme* behandelt Hauck, *J. f. Math.* **98**, 304 (1885).

Bezieht man auf die Fundamentaldreiecke ABC und $A'B'C'$ homogene Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3 und x_1', x_2', x_3', so lassen sich die Formeln für die quadratische Transformation in der Form geben:

$$x_1' : x_2' : x_3' := x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2,$$

woraus umgekehrt

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2' x_3' : x_3' x_1' : x_1' x_2'$$

folgt, oder auch in der symmetrischen Form:

$$x_1 x_1' = x_2 x_2' = x_3 x_3'.$$

In nicht homogenen Koordinaten

$$x' = \frac{x_1'}{x_3'},\ y' = \frac{x_2'}{x_3'} \quad \text{und} \quad x = \frac{x_1}{x_2},\ y = \frac{x_3}{x_2},$$

werden die Transformationsgleichungen

$$y' = y,\ x' = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad y = y',\ x = \frac{y'}{x'}.$$

Von besonderer Art ist die Transformation, die durch die Gleichungen

$$y' = y,\ x' = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad y = y',\ x = x'y'$$

gegeben wird, oder in homogenen Koordinaten, für

$$\frac{x_1'}{x_3'} = y',\ \frac{x_2'}{x_3'} = x' \quad \text{und} \quad \frac{x_1}{x_3} = y,\ \frac{x_2}{x_3} = x,$$

durch die Gleichungen

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^2 : x_2 x_3 : x_1 x_3 \quad \text{und} \quad x_1 : x_2 : x_3 = x_1' x_3' : x_1' x_2' : x_3'^2.$$

Der Punkt $A'(1, 0, 0)$ in ξ' ist ein einfacher Fundamentalpunkt, aber in dem Punkte $B'(0, 1, 0)$ vereinigen sich zwei Fundamentalpunkte, so daß die Kegelschnitte des homaloidischen Netzes durch A' und B' gehen und in B' eine feste Tangente ($x_1' = 0$) haben. Gleiches gilt auch für die andere Ebene ξ. Dem Punkte A' korrespondiert die Gerade $x_3 = 0$, dem Punkte B' die Gerade $x_1 = 0$.

Über die singulären quadratischen (und kubischen) Transformationen vgl. Riess, *Erlanger Dissert.* (Freising 1893).

In der Absicht, die Anzahlen der abzählenden Geometrie für die quadratischen Transformationen zu bestimmen, gab Schubert, *Hamb. Math. Ges. Mitt.* **1**, 31 (1882), die einstufigen Ausartungen (17 an der Zahl) dieser Transformationen an, d. h. diejenigen unter ihnen, deren Konstantenzahl 13, statt wie bei der allgemeinen Transformation 14, beträgt.

Für die organischen Kurvenerzeugungen (Kap. XIII, § 8) wurden die quadratischen Transformationen bereits von Mac Laurin, *Geom. organica* 1720, und Braikenridge, *Exercitatio geom.* 1733, gestreift, weitere Andeutungen finden sich auch in Poncelets *Traité des propriétés proj.* I, Nr. 81, 84, 370, 388, und bei Plücker, *J. f. Math.* **5**, 1 (1830), *Abhdlgn.* I, 124. Sie wurden darauf systematisch untersucht: auf analytischem Wege von Magnus, *J. f. Math.* **8**, 51 (1831), *Sammlung von Aufgaben* usw. I, 229 (1833), auf rein geometrischem Wege von Seyde-

witz, Steiner, Reye und Sturm in den zitierten Arbeiten, später von G. Schiaparelli, *Torino Mem.* (2) **21**, 227 (1861); Aschieri, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **14**, 21 (1881); Duporcq, *C. R.* **126**, 1405 (1898); Timerding, *Math. Ann.* **53**, 193 (1900); Bordiga, *Ac. Belgique Mém.* (2) **2** (1909) u. a. m.

§ 3. Zerlegung einer birationalen Transformation in Faktoren. Gruppen birationaler Transformationen.

Es ist klar, daß *das Produkt mehrerer quadratischen Transformationen eine Cremonasche Transformation ist.*

Aber auch umgekehrt:

Jede birationale Transformation einer Ebene in eine andere läßt sich zusammensetzen aus einer endlichen Anzahl quadratischer Transformationen.

Dieser Satz wurde von Noether, *Math. Ann.* **3**, 164 (1871), und Rosanes, *J. f. Math.* **73**, 106 (1871), aus der Bemerkung hergeleitet, daß in einem homaloidischen Netze die Summe der drei höchsten Multiplizitäten in den Fundamentalpunkten die Ordnung der Transformation immer übersteigt. Derselbe Satz wurde gleichzeitig von Clifford angedeutet (*Math. Papers* p. 538, vgl. auch die am Ende von § 1, Nr. 2 zitierte Arbeit von Cayley, Nr. 68). Noether, *Math. Ann.* **5**, 635 (1872), hat auch den Fall in Betracht gezogen, in welchem Fundamentalpunkte des homaloidischen Netzes einander unendlich nahe rücken. Infolge einer Einwendung von Segre, *Torino Atti* **36**, 645 (1901), wurde der allgemeine Beweis des Satzes in strenger Weise von Castelnuovo, ibid. **36**, 861 (1901), gegeben.

An Stelle dieses *Zerlegungssatzes* bestimmte S. Kantor, *Monatsh. f. Math.* **10**, 54 (1899), für jede *rational* gegebene birationale Transformation einer Ebene in eine andere die Primfaktoren, in die sie ohne jegliche neue Irrationalität zerlegt werden kann.

Wir wollen endlich noch die Arbeiten von Autonne, *J. de Math.* (4) **1**, 431 (1885), **2**, 49 (1886), **4**, 177, 407 (1888), über endliche Gruppen von quadratischen und kubischen Transformationen erwähnen. Alle möglichen Typen, auf welche sich die endlichen Gruppen Cremonascher Transformationen birational reduzieren lassen, findet man angegeben bei S. Kantor, *Theorie der endlichen Gruppen* usw., Berlin 1895, und Wiman, *Math. Ann.* **48**, 195 (1897).

Das analoge Problem für die kontinuierlichen (von einer endlichen Anzahl Parameter abhängenden) Gruppen behandelte Enriques, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{2}^1$, 468 (1893), vgl. auch Fano, *Rend. Circ. M.* **10**, 16 (1896). Es ergibt sich, daß jede solche Gruppe sich durch eine Cremonasche Transformation zurückführen läßt auf eine Gruppe von Kollineationen, eine Gruppe von quadratischen Transformationen mit zwei festen Fundamentalpunkten oder eine Gruppe von Jonquièresschen Transformationen beliebiger Ordnung. Die Zusammensetzung dieser letzteren Gruppe gab Enriques an: *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{2}^1$, 532 (1893).

§ 4. Mehrdeutige Transformationen.

Die Sätze über birationale Transformationen lassen sich zum Teil auf mehrdeutige (oder einseitig rationale) Transformationen ausdehnen, die in § 1, Nr. 1 erwähnt wurden, aber es bieten sich hier doch in manchen Punkten veränderte Verhältnisse dar.

Indem wir ξ die einfache, ξ' die D-fache Ebene nennen, ergibt sich in ξ im allgemeinen eine Kurve Γ, von der jeder Punkt einem seiner konjugierten Punkte in einer bestimmten Richtung unendlich nahe benachbart ist. Diese Richtung ist im allgemeinen von der Richtung der Tangente von Γ in dem betr. Punkte verschieden und heißt *Hauptrichtung*. Die Kurve Γ heißt *Doppelkurve* und die ihr in ξ' entsprechende Kurve Γ' die *Übergangskurve*; beide Kurven sind eindeutig aufeinander bezogen und haben somit dasselbe Geschlecht.

Es können indes außer der Doppelkurve in ξ *isolierte* Doppelpunkte (in endlicher Anzahl) existieren, derart daß *jede* durch einen dieser Punkte gehende Gerade einen ihm unendlich benachbarten konjugierten Punkt enthält.

Den Geraden von ξ entsprechen ∞^2 rationale Kurven φ' von der Ordnung n (die indessen kein Netz bilden), sie haben gewisse gemeinsame Punkte von den Multiplizitäten r_1', r_2', . . ., die die *Fundamentalpunkte* von ξ' heißen. Einem beliebigen unter diesen, der ein gewöhnlicher r_i'-facher Punkt für die φ' sei, entspricht in ξ eine sich selbst konjugierte *Fundamentalkurve* von der Ordnung r_i', die auch zerfallen kann. Die Fundamentalkurven von ξ bilden zusammen mit der Doppelkurve Γ die Jacobische Kurve des in § 1, Nr. 1 erwähnten Netzes $|f|$. Ist demnach ν die Ordnung von Γ, so ergibt sich:

$$\nu = 3(n-1) - \sum r_i'.$$

Die Ordnung der einer Geraden von ξ konjugierten Kurve ist

$$N = n^2 - \sum r_i'^2 - 1,$$

und zwei Kurven φ' schneiden sich in $N+1$ veränderlichen Punkten.

Eine beliebige Kurve φ' hat $\frac{1}{2}(N-\nu)$ veränderliche Doppelpunkte und berührt die Übergangskurve Γ' in ν Punkten.

Nennt man p das Geschlecht der Kurven von $|f|$ (das *Geschlecht der Transformation*), so ist die Ordnung von Γ' gleich $2(D+p-1)$.

Die Untersuchung der *zweideutigen* Transformationen ist von Clebsch begonnen worden, *Math. Ann.* **3**, 45 (1871), und methodisch durchgeführt von de Paolis, *Rom. Acc. Linc. Mem.* (3) **1**, 511 (1877), der davon Anwendungen auf die nichteuklidische Geometrie und die Kurven 4. Ordnung machte in *Rom. Acc. L. Mem.* (3) **2**, 31, 851 (1878). Die Erweiterung auf beliebig vieldeutige Transformationen behandelten: Visalli in zwei Arbeiten, die in Messina 1884 veröffentlicht sind; G. Jung, *Rom Acc. L. Rend.* (4) $\mathbf{2}^2$, 302 (1886); Björling, *Stockh. Akad. Vet. Bihang* **13** (1887); Ch. A. Scott, *Quart. Journ.* **29**, 329 (1898), **32**, 209 (1900).

Eine *Doppelebene* entsteht allgemein, wenn eine eindeutige algebraische Beziehung zwischen den Punkten der Ebene und den Punktepaaren einer algebraischen Fläche besteht, von welcher man dann sagt, daß sie *auf die Doppelebene abgebildet wird.* Die Gleichung der Fläche kann man hierbei in die Form bringen $z^2 = R(x, y)$, indem R eine ganze Funktion von x, y bezeichnet. Wenn R irreduzibel ist, wird die Gleichung der *Übergangskurve* $R = 0$. Im anderen Falle findet man die Gleichung dieser Kurve, indem man das einfache Produkt der Faktoren von R, die in einer Potenz mit ungeradem Exponenten auftreten, gleich Null setzt. Durch eine birationale Transformation kann man immer die Flächengleichung so umformen, daß R nur einfache Faktoren enthält und somit $R = 0$ direkt die Übergangskurve darstellt.

Die von einer zweideutigen Transformation herrührenden Doppelebenen sind *rational*, d. h. sie haben die Eigentümlichkeit, daß die genannte Fläche, die sie abbilden, auch Punkt für Punkt eindeutig auf eine Ebene abgebildet werden kann.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Doppelebene rational ist, hat Noether, *Erlanger phys. med. Soc. Ber.* 1878, dahin formuliert, *daß ihre Übergangskurve sich durch eine birationale Transformation der Ebene auf einen von folgenden*

Typen zurückführen läßt: a) eine Kurve von einer gewissen Ordnung $2n$ $(n \geqq 1)$ *mit einem* $(2n-2)$*-fachen Punkte, b) eine allgemeine Kurve 4. Ordnung, c) eine Kurve 6. Ordnung mit zwei unendlich benachbarten dreifachen Punkten.*

Die beiden ersten Typen von Doppelebenen wurden von Clebsch a. a. O. untersucht, der ihre Rationalität nachwies, der dritte Typus von Noether, *Math. Ann.* **33**, 525 (1889). Das vorstehende Theorem leiteten Castelnuovo und Enriques, *Rend. Circ. M.* **14**, 290 (1900), aus den Rationalitätsbedingungen für eine Doppelebene ab, von der die Übergangskurve beliebig gegeben ist.

Nicht rationale Doppelebenen studierte Enriques, *Soc. Ital. dei XL Mem.* (3) **10**, 201 (1896), *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{7}^1$, 234, 253 (1898); Lacaze, *Toulouse Ann.* (2) **3**, 151 (1901); de Franchis, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) $\mathbf{13}^1$, 688 (1904).

Die entsprechenden Fragen für mehr als zweifache Ebenen sind noch nicht behandelt worden, nur die Rationalität der Flächen $z^n = R(x, y)$, d. h. der zyklischen n-fachen Ebenen $\{x, y, \sqrt[n]{R(x, y)}\}$, ist durch Bottari, *Ann. di Mat.* (3) **2**, 277 (1899), *Giorn. di mat.* **41**, 285 (1903), untersucht worden. Zyklische mehrfache Ebenen, deren Übergangskurve irreduzibel ist, hat Bottasso, *Torino Atti* **44**, 12, 255 (1909), studiert.

§ 5. Zyklische birationale Transformationen. Involutionen.

Eine birationale Verwandtschaft zwischen zwei konjektiven ebenen Feldern kann eine involutorische Verwandtschaft sein (vom zweiten Grade, s. Kap. XIII, § 3). Zwei einander entsprechende Punkte heißen dann auch *konjugiert*. Es können *isolierte* Koinzidenzpunkte existieren und solche, die eine Kurve, die *Koinzidenzkurve*, erfüllen. Die ersteren entsprechen sich selbst nach jeder Richtung hin, die von ihnen ausgeht, die letzteren entsprechen sich selbst in einer bestimmten Richtung, die *Hauptrichtung* heißt und im allgemeinen von der Tangente der Koinzidenzkurve in dem betr. Punkte verschieden ist. Jede Gerade, die durch einen isolierten Koinzidenzpunkt geht, berührt die ihr entsprechende Kurve in diesem Punkte.

Die einzige Involution 1. Ordnung ist die involutorische Homologie (S. 111): v. Staudt, *Geom. d. Lage*, 1847, Nr. 227.

Involutionen 2. Ordnung gibt es nur zwei: 1. die, in welcher sich zwei bezüglich aller Kegelschnitte eines Büschels konjugierte

Punkte entsprechen, und 2. die sog. *projektive Inversion*, bei welcher ein Kegelschnitt γ und ein nicht auf ihm liegender Punkt O fest gegeben wird und einem Punkte P der Schnittpunkt von OP mit der Polaren von P bezüglich γ als entsprechender Punkt zugewiesen wird. Bei der ersteren Verwandtschaft sind die einzigen Koinzidenzpunkte die Basispunkte des Kegelschnittbüschels, bei der letzteren sind es alle Punkte von γ. Ist γ ein Kreis mit dem Mittelpunkt O, so erhält man die *Transformation durch reziproke Radienvektoren* (vgl. Kap. II).

Die erstere Involution findet sich schon bei Poncelet, *Traité des propr. proj.* I (1822), Nr. 81, 84, 370, 388, die letztere wurde zuerst von Bellavitis angegeben, *Nuovi saggi dell' Acc. di Padova* **4**, 243 (1838), und später untersucht von Hirst, *Lond. R. Soc. Proc.* **14**, 91 (1865) od. *Ann. di Mat.* (1) **7**, 49 (1865) od. *Giorn. di Mat.* **4**, 278 (1866), und von Geiser, *Mitt. d. Berner Naturf. Ges.* 1865, S. 97.

Über beliebige Involutionen stellte Caporali, *Napoli Rend.* **18**, 212 (1879), *Mem. di Geom.* 1888, p. 116, Sätze auf, welche den von ihm eingeführten Begriff der *Klasse* betreffen. Hierunter versteht er die Anzahl der Paare konjugierter Punkte, die auf einer beliebigen Geraden liegen. Andere Eigenschaften gab Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **16**, 89, 190 (1883), der außer den Jonquièresschen alle Involutionen der Klassen 0, 1, 2 ermittelte, vgl. ferner Martinetti, *Rend. Circ. M.* **4**, 30, 126 (1890), der in *Ann. di Mat.* (2) **12**, 73 (1883), **13**, 53 (1885) die Involutionen der Klassen 3 und 4 hinzufügte, und Berzolari, *Ann. di Mat.* (2) **16**, 191 (1888), *Rend. Circ. M.* 3, 145 (1889), der in der ersteren Arbeit auch alle Involutionen 5. Klasse ermittelte.

Die Involutionen der Klasse 0 besitzen eine Koinzidenzkurve von der Ordnung n, sind also Jonquièressche Transformationen. Die Jonquièresschen Involutionen, deren Klasse > 0 ist, können keine, eine oder zwei gerade Punktreihen von Koinzidenzpunkten besitzen und mithin von der Klasse $\frac{n}{2}$, $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n-2}{2}$ sein. S. Bertini, *Ann. di Mat.* (2) **8**, 11, 146 (1877), der bewiesen hat, daß *jede Jonquièressche Involution durch eine Cremonasche Transformation ableitbar ist aus der involutorischen Homologie oder einer Jonquièresschen Involution von einer gewissen Ordnung* $p+2$ $(p>0)$, *mit* $2p+2$ *getrennt liegenden einfachen Fundamentalpunkten und einer Koinzidenzkurve von der Ordnung* $p+2$ *und dem Geschlecht* p, *die*

einen einzigen p-fachen Punkt in dem $(p+1)$-fachen Punkte der Transformation besitzt.

Diese Behandlung ist von Bertini, *Ann. di Mat.* (2) **8**, 244 (1877), *Lomb. Ist. Rend.* (2) **13**, 443 (1880), auf alle Involutionen ausgedehnt worden, indem er die Typen suchte, auf die sich eine beliebige Involution (vom Grad 2) durch eine Cremonasche Transformation zurückführen läßt. Für diese Typen fand er, unter der Voraussetzung getrennt liegender Fundamentalpunkte, die folgenden: a) *die involutorische Homologie*, b) *die soeben genannte Jonquièressche Transformation*, c) *eine Involution der Ordnung 8 mit sieben dreifachen Fundamentalpunkten, die eine durch die sieben Fundamentalpunkte doppelt hindurchgehende Koinzidenzkurve 6. Ordnung besitzt*, d) *eine Involution der Ordnung 17 mit acht sechsfachen Fundamentalpunkten, die eine durch die acht Fundamentalpunkte dreimal hindurchgehende Koinzidenzkurve 9. Ordnung besitzt.*

Der Fall c) wird gefunden, wenn man die Paare der letzten Schnittpunkte aller Kurven 3. Ordnung ermittelt, die durch sieben feste Punkte gehen (Geiser, *J. f. Math.* **67**, 78 (1867), vgl. auch Milinowski, ebenda **77**, 263 (1874)), der Fall d), indem man die Punktepaare sucht, die den Kurven 6. Ordnung mit acht festen Doppelpunkten eine einzige Bedingung auferlegen.

Daß jede der vorstehenden Involutionen rational ist, d. h. daß jede eine zweideutige ebene Transformation im Gefolge hat, ergibt sich aus den im vorigen Paragraphen zitierten Arbeiten, Noether, *Erlanger phys. med. Soc. Ber.* 1878, Castelnuovo-Enriques, *Rend. Circ. M.* **14**, 290 (1900). Einen algebraischen Beweis gab auch Lüroth, *Rationale Flächen und invol. Transf.*, Freiburg 1889, einen geometrischen Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **22**, 771 (1889).

Der allgemeine und vollständige Beweis für den Satz, daß *jede ebene Involution von beliebigem Grade D rational ist*, d. h. daß ihre Gruppen von D Punkten sich eindeutig auf die einzelnen Punkte einer Ebene beziehen lassen, wurde von Castelnuovo gegeben, *Math. Ann.* **44**, 125 (1894). Es sind indessen für $D > 2$ die irreduziblen Typen, auf die sich diese Involutionen durch eine Cremonasche Transformation zurückführen lassen, noch nicht angegeben worden.

Einige Eigenschaften der Involutionen von beliebigem Grade hat Chizzoni gefunden, *Rom Acc. Linc. Mem.* (3) **19**, 301 (1884); die Involutionen der Klassen 0 und 1 ermittelte Ferretti, *Rend. Circ. M.* **17**, 311 (1903).

Die Involutionen sind ein besonderer Fall der *zyklischen Cremonaschen Transformationen* vom Index μ, die μmal nacheinander ausgeführt jeden Punkt in seine ursprüngliche Lage zurückbringen. Diese behandelte S. Kantor, zuerst *Wien. Ber.* **82**, 237 (1880) für die Ordnung 2 und allgemein *C. R.* **100**, 343 (1885), *Napoli Atti* (2) **1** (1888), **4** (1891) (im Auszug *J. f. Math.* **114**, 50 (1895)), *Acta Math.* **19**, 115 (1894).

Doehlemann, *Math. Ann.* **39**, 567 (1891), und Castelnuovo, *Rom Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{1}^1$, 47 (1892), haben die Cremonaschen Transformationen einer Ebene in sich, die eine gegebene irreduzible Koinzidenzkurve γ besitzen, untersucht, und der letztere hat nachgewiesen, daß, wenn das Geschlecht von $\gamma > 1$ ist, die Transformation durch eine Cremonasche Transformation auf eine Jonquièressche zurückgeführt werden kann oder eine zyklische Transformation vom Index 2, 3 oder 4 ist.

§ 6. Algebraische Korrespondenzen (α, β) zwischen zwei Ebenen.

Von den allgemeinen algebraischen Korrespondenzen (α, β) weiß man noch sehr wenig. Untersucht sind nur von Ch. Wiener, *Math. Ann.* **3**, 11 (1871), die besonderen Transformationen, die aus der Seydewitzschen Konstruktion für die quadratischen Verwandtschaften (s. § 2) hervorgehen, wenn man die Strahlenbüschel durch Büschel von Kurven beliebiger Ordnung ersetzt; ferner von Marletta, *Rend. Circ. M.* **17**, 173, 371 (1903), die quadratischen und kubischen Transformationen (2, 2), die den Geraden der Ebene Kegelschnitte und Kurven 3. Ordnung zuweisen, und von Visalli, *Rend. Circ. M.* **3**, 165 (1889), und Burali-Forti, ibid. **5**, 91 (1891), einige besondere Fälle von solchen zwei-zweideutigen quadratischen Transformationen.

Wenn die beiden Ebenen zusammenfallen, so gilt das folgende *Korrespondenzprinzip in der Ebene*, das von Salmon (s. Salmon-Fiedler, *Raumgeometrie* II, 3. Aufl. 1880, S. 615) für Korrespondenzen mit nur isolierten Koinzidenzpunkten und vollständig von Zeuthen, *C. R.* **78**, 1553 (1874), gegeben wurde:

Wenn in einer Ebene zwei veränderliche Punkte x, y in einer algebraischen Korrespondenz (α, β) einander derart entsprechen, daß während x eine Gerade durchläuft, die β entsprechenden Punkte y eine Kurve von der Ordnung γ beschreiben, und wenn man mit δ die Ordnung der Koinzidenzkurve, mit ε die Klasse der Enve-

loppe aller Geraden, welche die Punkte der Koinzidenzkurve mit ihren unendlich benachbarten entsprechenden Punkten verbinden, bezeichnet, so ist die Zahl der isolierten Koinzidenzpunkte gleich

$$\alpha + \beta + \gamma - \delta - \varepsilon.$$

Vgl. hierüber auch Schubert, *Math. Ann.* **10**, 50 (1876) und *Kalkül*, S. 45.

Severi, *Torino Mem.* (2) **50**, 90 (1901), hat die Formel von Kantor, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **27**, 713 (1894), für die Anzahl der zyklischen Gruppen einer birationalen Korrespondenz, auf beliebige Korrespondenzen (α, β) ausgedehnt.

Kapitel XVII.

Allgemeine Theorie der Kurven dritter Ordnung.

Von *G. Giraud* in Turin.

§ 1. Grundeigenschaften. Steinersche Polygone.

Eine Kurve 3. Ordnung c_3 kann, wie aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven hervorgeht, höchstens einen Doppelpunkt haben, ohne zu zerfallen. Wir wollen uns in diesem Kapitel nur mit den Kurven 3. Ordnung *ohne* Doppelpunkt befassen, obwohl manche der ausgesprochenen Sätze auch für solche Kurven gültig bleiben, die einen singulären Punkt besitzen.

Wir wollen als grundlegend für die Theorie der Kurven 3. Ordnung sofort die folgenden Lehrbücher anführen, die im Verlauf des Kapitels mit einfacher Nennung des Verfassers zitiert werden sollen:

Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*,

Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über analytische Geometrie*, 1. Teil: *Ebene Geometrie*, 1876.

Durège, *Die ebenen Kurven dritter Ordnung*, 1871. (Einfach analytisch.)

Schröter, *Die Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung*, 1888. (Rein synthetisch.)

Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, 1861, deutsch von Curtze.

Unter den neueren Werken seien die elementaren Lehrbücher genannt:

Basset, *An elementary treatise on cubic and quartic curves*, 1901,

Dumont, *Introduction à la géométrie des courbes du troisième ordre*, 1904.

Eine allgemeine c_3 ist von der 6. Klasse, vom Geschlecht 1 und hat neun Wendepunkte. Die allgemeine Gleichung einer c_3

enthält zehn Koeffizienten, sie hängt sonach von neun unabhängigen Parametern ab, und *eine c_3 ist durch neun beliebig angenommene Punkte bestimmt.* Hierbei ist aber ein Ausnahmefall auszuschließen.

Durch acht Punkte gehen nämlich unendlich viele c_3 hindurch, diese bilden ein Büschel und haben alle einen und denselben neunten Punkt miteinander gemein. Die neun Grundpunkte eines Büschels heißen *assoziierte* Punkte. Eine c_3, die durch acht beliebige von neun assoziierten Punkte geht, geht von selbst auch durch den neunten und ist erst nach Hinzunahme eines zehnten Punktes eindeutig bestimmt. Hieraus folgt, daß *wenn die drei Seiten eines Dreiseits eine c_3 in neun Punkten schneiden, von denen sechs auf einem Kegelschnitt liegen, die übrigen drei auf einer Geraden enthalten sind, und umgekehrt.* Weiter folgt, daß *wenn A, B, C drei Punkte der c_3 sind, die in gerader Linie liegen, und A', B', C' drei weitere ebensolche Punkte, die Verbindungslinien AA', BB', CC' die Kurve wieder in drei Punkten einer Geraden schneiden.*

Auf einer Geraden durch einen der Grundpunkte eines c_3-Büschels bilden die weiteren Schnittpunkte mit den Kurven des Büschels die Punktepaare einer Involution (Schröter, S. 89).

Wenn man von einem Punkte P einer c_3 die vier anderswo berührenden Tangenten an die Kurve legt und das vollständige Viereck betrachtet, das diese Punkte zu Ecken hat, so liegen auch die Diagonalpunkte dieses Vierecks auf der Kurve und die Tangenten, die in ihnen und im Punkte P die c_3 berühren, treffen sich wieder in einem Punkte der Kurve (Cremona, Art. 146). *Wenn man wieder von einer der Ecken des vollständigen Vierecks die vier anderswo berührenden Tangenten an die c_3 legt, so hat das Viereck der vier neuen Berührungspunkte die drei übrigen Ecken des ursprünglichen Vierecks zu Diagonalpunkten* (Schröter, S. 108). *Die anderswo berührenden Tangenten, die man an die c_3 aus den Punkten der Kurve selbst legt, haben immer dasselbe Doppelverhältnis, wenn man bei den Wendepunkten die Wendetangente mit zu den anderswo berührenden Tangenten rechnet. Dies ist der Salmonsche Satz* (*J. f. Math.* **42**, 274 (1851)). Einen neuen Beweis dafür gab Dixon, *Messenger of Math.* (2) **26**, 53 (1896). Das konstante Doppelverhältnis ist eine Invariante der c_3 und heißt ihr Doppelverhältnis.

Zwei c_3, denen dasselbe Doppelverhältnis zukommt, lassen sich kollinear ineinander transformieren, und umgekehrt.

Für eine reelle c_3 ist das Doppelverhältnis reell, wenn die vier Tangenten alle reell oder alle (paarweise konjugiert) imaginär sind; es wird eine komplexe Zahl vom Modul 1 oder die reelle Zahl -1,

wenn von den vier Tangenten zwei reell und zwei konjugiert imaginär sind, und danach zerfallen die c_3 in zwei Kategorien, von denen die eine aus zweizügigen, die andere aus einzügigen Kurven besteht. Ist das Doppelverhältnis gleich -1, so heißt die c_3 *harmonisch*. Es gibt zwei Arten harmonischer Kurven: die der einen Art bestehen aus einem Ast, die der anderen aus zwei Ästen. Ist das Doppelverhältnis gleich einer imaginären dritten Wurzel der negativen Einheit, so heißt die Kurve *äquianharmonisch*.

Die 16 Schnittpunkte der zwei Quadrupel von Tangenten, die sich aus zwei Punkten der c_3 an sie legen lassen, liegen zu vier und vier auf vier Kegelschnitten, die durch jene beiden Kurvenpunkte hindurchgehen (*Hartscher Satz*, vgl. Salmon, *J. f. Math.* **42**, 275 (1851)).

Der Punkt, in dem die an die c_3 in einem Punkte P gelegte Tangente außerdem schneidet, heißt der *Tangentialpunkt* von P. *Wenn man von einem Punkte P der Kurve die vier anderswo berührenden Tangenten an sie legt, so schneidet jeder Kegelschnitt, der durch die vier Berührungspunkte dieser Tangenten geht, die c_3 außerdem noch in zwei Punkten, die mit dem Tangentialpunkte von P in gerader Linie liegen* (Schröter, S. 108). *Der Punkt P, sein Tangentialpunkt, die Berührungspunkte der vier durch P gelegten Tangenten und die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, das die vier Berührungspunkte bestimmen, bilden zusammen neun assoziierte Punkte.*

Die Tangentialpunkte der Punkte, in denen die c_3 von einer Geraden getroffen wird, liegen wieder auf einer Geraden, der *begleitenden Geraden* der ersteren. Dieser Satz rührt von Maclaurin her, vgl. Jonquières, *Mélanges de géom.* 1856, p. 223. Insbesondere schneiden die drei Asymptoten (Tangenten in den unendlich fernen Punkten) die Kurve außerdem in drei Punkten einer Geraden, wie es schon *Poncelet* bewiesen hat, *J. f. Math.* **8**, 130 (1832).

Diese Gerade hat die Eigenschaft, daß *die Entfernung irgendeines Kurvenpunktes von ihr zu dem Produkt der Abstände dieses Punktes von den drei Asymptoten in einem konstanten Verhältnis steht* (Salmon-Fiedler, S. 167).

Der Schnittpunkt einer Geraden mit ihrer begleitenden Geraden heißt der *begleitende Punkt* der ersteren Geraden.

Eine beliebige Gerade der Ebene ist begleitende Gerade von 16 Geraden (Dumont, p. 73).

Die Tangentialpunkte von drei Punkten, in denen ein dreifach

berührender Kegelschnitt die c_3 berührt, liegen in gerader Linie (Durège, S. 136).

Wenn bei einem der c_3 einbeschriebenen Dreieck die Tangentialpunkte zweier Ecken den gegenüberliegenden Seiten angehören, so gilt das gleiche auch für die dritte Ecke (Durège, S. 289).

Die Tangentialpunkte von sechs Punkten eines Kegelschnittes liegen wieder auf einem Kegelschnitt (Cremona, Art. 145).

Ist ein vollständiges Vierseit einer c_3 einbeschrieben, so besitzen je zwei gegenüberliegende Ecken denselben Tangentialpunkt, d. h. die Paare der Tangenten in den Gegenecken schneiden sich in drei Punkten der Kurve selbst. Umgekehrt *wenn eine c_3 durch fünf Ecken eines vollständigen Vierseits geht und zwei Gegenecken des letzteren denselben Tangentialpunkt besitzen, so geht sie auch durch die sechste Ecke, und auch die anderen beiden Paare von Gegenecken besitzen denselben Tangentialpunkt* (Cayley, *J. de Math.* (1) **9**, 286 (1844)).

Wenn man von drei in gerader Linie liegenden Punkten einer c_3 je eine anderswo berührende Tangente an die Kurve legt, so schneiden die Geraden, welche die drei Berührungspunkte dieser Tangenten paarweise verbinden, die Kurve außerdem in drei Punkten einer geraden Linie, oder die drei Berührungspunkte liegen selbst in gerader Linie.

Die Berührungspunkte der dreimal vier Tangenten, die von drei in gerader Linie angenommenen Kurvenpunkten ausgehen, lassen sich auf 16 verschiedene Arten zu Tripeln in gerader Linie liegender Punkte zusammenfassen, *es entsteht so eine Konfiguration von 12 Punkten und 16 Geraden,* von welch letzteren vier durch jeden der Punkte gehen und jede drei der Punkte enthält. Vgl. Hesse, *J. f. Math.* **36**, 143 (1848), *Werke*, S. 155. Andere Eigenschaften der Tangenten einer c_3, die an drei in gerader Linie liegende Kurvenpunkte anknüpfen, findet man man bei Caporali, *Memorie di Geometria* 1888, p. 338, und Mangeot, *Bull. Soc. Math.* **21**, 44 (1893).

Man nehme auf der c_3 zwei Punkte P, P' fest an, verbinde einen dritten Kurvenpunkt A_1 mit P und nenne A_2 den dritten Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit der Kurve, ferner A_3 den dritten Schnittpunkt für die Linie A_2P', A_4 für A_3P usw., so sind zwei Fälle möglich, die ein Satz von Steiner, *J. f. Math.* **32**, 182 (1846), *Werke* II, 369, sondert: *entweder schließt die Reihe sich nie, wie man auch den Punkt A_1 auf der Kurve wählt, oder sie schließt sich immer nach derselben Zahl $2n$ von*

Verbindungslinien. Das dann entstehende Polygon heißt ein *Steinersches Polygon*, und von den Punkten P, P' sagt man, sie bilden ein *Steinersches Paar der Ordnung n.* Über die Steinerschen Polygone s. Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 94 (1864), Schoute, *J. f. Math.* **95**, 105, 317 (1883), Küpper, *Math. Ann.* **24**, 1 (1884), Czuber, *J. f. Math.* **114**, 312 (1894).

Ein verwandtes Theorem gab Steiner, l. c. (*Werke* II, 369), das sog. *Verdoppelungstheorem: Wenn P, Q die Punkte eines Steinerschen Paares von der Ordnung n sind und R der dritte Schnittpunkt der Linie PQ mit der Kurve ist, ferner S der Berührungspunkt einer von R an die Kurve gelegten Tangente, so bilden PS und QS Steinersche Paare von der Ordnung 2n.*

Bilden die Tangentialpunkte zweier Kurvenpunkte ein Steinersches Paar n^{ter} Ordnung, so bilden die letzteren Punkte selbst ein Paar $2n^{ter}$ Ordnung (Schröter, § 31).

Wenn PP', $P'P_1$ zwei eigentliche Steinersche Paare von den Ordnungen m und n sind, d. h. zwei Paare, die nicht gleichzeitig Paare von niedrigerer Ordnung sind, so bilden P, P_1 im allgemeinen ein eigentliches Steinersches Paar, dessen Ordnung das kleinste Vielfache von m und n ist. Umgekehrt, wenn P, P_1 ein eigentliches Steinersches Paar von der Ordnung $m \cdot n$ bilden und m, n relativ prim sind, so läßt sich ein Kurvenpunkt P' finden derart, daß PP' und $P'P_1$ eigentliche Paare von den Ordnungen m und n bilden. Diese und andere Sätze über Steinersche Polygone gab Martinetti, *Rendic. Circ. Mat. Pal.* **5**, 109 (1891).

Wenn man ein Steinersches Paar aus einem Kurvenpunkt projiziert, so erhält man auf der Kurve ein zweites Steinersches Paar von der gleichen Ordnung.

Zwei Punkte, die denselben Tangentialpunkt besitzen, liefern immer ein Steinersches Viereck.

Sind P_1, Q_1 die Tangentialpunkte von P, Q und der Schnittpunkt S der Geraden PQ_1 und QP_1 liegt auf der Kurve, so liefern die Punkte P, Q ein Steinersches Sechseck.

Andere Fragen, welche die ein- und umschriebenen Polygone einer c_3 betreffen, sind behandelt von Picquet, *J. éc. polyt.* **54**, 31 (1884), de Vries, *Arch. néerl.* **25**, 1 (1892), H. S. White, *Ann. of Math.* (2) **7**, 172 (1906), Oppenheimer, *Monatsh. f. M.* **18**, 71 (1907).

§ 2. Polarentheorie. Hessesche und Cayleysche Kurve. Mehrfache Berührungen.

Jeder Punkt der Ebene besitzt bezüglich einer c_3 einen *Polarkegelschnitt* als erste Polare. *Liegt der Punkt auf der c_3, so geht der Polarkegelschnitt durch ihn hindurch und berührt in ihm die c_3, der Kegelschnitt geht ferner durch die Berührungspunkte der vier anderswo berührenden Tangenten, die sich durch den Punkt legen lassen.* Allgemein liegen die Berührungspunkte der sechs Tangenten, die durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen, auf dem Polarkegelschnitte dieses Punktes.

Die Polare des Punktes bezüglich dieses Kegelschnittes heißt die *zweite Polare* oder *gerade Polare* des Punktes bezüglich der c_3.

Satz von Cotes. Ist P der Punkt und nennt man A, B, C die Schnittpunkte einer Geraden durch P mit der c_3, so ist die zweite Polare der Ort der Punkte Q, welche der Relation genügen:

$$\frac{3}{PQ} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$$

(Schröter, S. 216).

Nimmt man auf der zweiten Polaren eines Punktes P einen Punkt O an, so geht die erste Polare von O durch P, nimmt man umgekehrt auf der ersten Polare von P einen Punkt Q an, so geht die zweite Polare von Q durch P (Schröter, S. 188).

Sind A und B zwei Punkte einer c_3, so liegen die Pole der Geraden AB bezüglich der vier durch A und B gehenden Kegelschnitte, die aus dem Hartschen Satz folgen (vgl. § 1), auf der c_3, die in ihnen von vier durch *einen* Punkt C gehenden Geraden berührt wird. Dieser Punkt C ist der dritte Schnittpunkt der Geraden AB mit der Kurve. Die Pole der Geraden AB bezüglich irgenddrei dieser Kegelschnitte sind die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, dessen Ecken die vier Punkte auf dem vierten Kegelschnitte sind (Salmon, *J. f. Math.* **42**, 276 (1851)).

Die sechs Tangentialpunkte der Berührungspunkte von sechs aus einem Punkte P an die c_3 gelegten Tangenten liegen ebenso wie die Berührungspunkte selbst auf einem Kegelschnitte, der der begleitende oder beigeordnete Kegelschnitt des Punktes P bezüglich der c_3 heißt.

Der begleitende Kegelschnitt berührt den Polarkegelschnitt, auf dem die Berührungspunkte der sechs Tangenten liegen, in den beiden Punkten, in denen dieser von der geraden Polaren getroffen wird (Slawyk, *Diss.* Breslau 1872, Milinowski, *J. f. Math.* **89**, 145 (1880)).

Wenn man von einem Punkte O die Tangenten an den Polarkegelschnitt eines Punktes O' legt und von O' die Tangenten an den Polarkegelschnitt von O, so liegen die vier Berührungspunkte auf einer Geraden, der *gemischten Polaren* der Punkte O, O' (Cremona, Art. 130).

Die geraden Polaren der Punkte einer Geraden g umhüllen einen Kegelschnitt, der die *Polokonik* (Cremona), *konische Polare* (Salmon) oder *Lineopolar-Enveloppe* (Cayley) der Geraden g heißt.

Wenn Q und Q' die Schnittpunkte der Geraden g mit ihrer Polokonik sind, so berührt der Polarkegelschnitt von Q die Gerade g in Q', und umgekehrt. *Die Polokonik einer Geraden ist der Ort aller Punkte, deren Polarkegelschnitte die Gerade berühren* (Schröter, S. 202).

Gemischte Polokonik zweier Geraden g und g' heißt der Ort der Punkte, für deren Polarkegelschnitt g und g' konjugierte Gerade sind (Cremona, Art. 136).

Die Polarkegelschnitte aller Punkte der Ebene bilden ein *Kegelschnittnetz*. Zwei Kegelschnittbüschel des Netzes haben einen Kegelschnitt gemein, dieser ist die Polare des Schnittpunktes der beiden Geraden, deren Punkte die Kegelschnitte der beiden Büschel zu Polaren haben. Die *Jacobische Kurve* und die *Steinersche Kurve* dieses Netzes fallen in eine einzige Kurve 3. Ordnung zusammen, welche die *Hessesche Kurve* der c_3 heißt, nach Hesse, *J. f. Math.* **28**, 97 (1844), *Werke*, S. 123.

Konjugierte Pole dieser Hesseschen Kurve heißen zwei Punkte P, P', die bezüglich aller Kegelschnitte des Netzes konjugiert sind. *Zwei konjugierte Pole besitzen immer denselben Tangentialpunkt, und dieser ist der konjugierte Pol zu dem dritten Schnittpunkt der Linie PP' mit der Kurve* (Cremona, Art. 133).

Der Polarkegelschnitt eines Punktes P der Hesseschen Kurve bezüglich der ursprünglichen c_3 zerfällt in zwei Gerade, die sich in dem konjugierten Pole P' von P schneiden.

Greift man aus dem Kegelschnittnetz drei beliebige Kurven, die keinem Büschel angehören, heraus, so haben je zwei von ihnen vier gemeinsame Tangenten, die ein vollständiges Vierseit bestimmen; *die 18 Eckpunkte der drei Vierseite, die man so erhält, liegen alle auf einer Kurve 3. Ordnung und bilden auf ihr neun Paare konjugierter Punkte* (Schröter, S. 35).

Die Verbindungslinien der Paare konjugierter Punkte umhüllen eine Kurve 3. Klasse 6. Ordnung, welche die *Cayleysche Kurve* heißt nach Cayley, *J. de Math.* (1) **9**, 290 (1844), *Papers*

I, 187, *sie ist mit der Enveloppe der Geraden, in die die Polarkegelschnitte der Punkte auf der Hesseschen Kurve zerfallen, identisch.*

Zwei konjugierte Pole werden harmonisch getrennt von dem Punkte, in dem ihre Verbindungslinie die Hessesche Kurve zum drittenmal trifft, und dem Punkte, in dem diese Gerade die Cayleysche Kurve berührt (Cayley, *Phil. Trans.* **147**, 425 (1857), *Papers* II, 390).

Die drei Tangenten, die man von einem Punkte P der Hesseschen Kurve an die Cayleysche Kurve legen kann, bestehen aus der Geraden, die den Punkt P mit seinem konjugierten Pole P′ verbindet, und den beiden Geraden, in die der Polarkegelschnitt von P′ zerfällt (Cremona, Art. 133).

Auf der Hesseschen Kurve liegen die Diagonalpunkte und die Cayleysche Kurve berühren die Seiten der vollständigen Vierecke, in deren Ecken sich die Polarkegelschnitte der Punkte einer Geraden schneiden (Cremona, Art. 133).

Die Hessesche Kurve ist der Ort der Punkte, in denen sich die Geraden der zerfallenden Polokoniken schneiden, und wird gleichzeitig von diesen selben Geraden umhüllt, während die Cayleysche Kurve von den Geraden umhüllt wird, auf die sich diese Polokoniken beziehen (Cayley, *Phil. Trans.* **147**, 432). Die Hessesche Kurve ist der Ort der begleitenden Punkte dieser die Cayleysche Kurve berührenden Geraden (Cremona, Art. 138).

Man kann die Cayleysche Kurve auch definieren als die Enveloppe der gemischten Polare zweier Punkte auf der Hesseschen Kurve, von denen der eine der Tangentialpunkt des anderen ist (Cayley, *Phil. Trans.* **147**, 439).

Die Hessesche und die Cayleysche Kurve entsprechen einander reziprok, worüber zu vergleichen Cremona, Art. 141 und Schröter, S. 43. Über ihre Theorie und verwandte Fragen s. auch Scott, *Phil. Trans.* **185**, 247 (1894), Gordan, *Am. Math. S. Trans.* **1**, 402 (1900), Oppenheimer, *Monatsh. f. M.* **12**, 219 (1901).

Andere Eigenschaften der c_3, die in gewissem Sinne mit der Polarität in Beziehung stehen, fanden London, *Math. Ann.* **36**, 535 (1890), Gußfeldt, *Math. Ann.* **2**, 65 (1870), Caporali, *Memorie de geometria,* 1888, p. 47.

Im allgemeinen gehen durch $3m-1$ Punkte einer c_3 unendlich viele Kurven m^{ter} Ordnung, nur in den Fällen $m=1$, $m=2$ existiert eine einzige solche Linie. Dies bleibt gültig, wenn die $3m-1$ Punkte sich in einem einzigen vereinigen, *in diesem Falle*

ist der weitere Schnitt der Kurve m^{ter} Ordnung mit der c_3 bestimmt. Für $m = 1$ findet man die Tangente, und der weitere Schnitt wird durch den Tangentialpunkt gebildet.

Für $m = 2$ ergibt sich das *Theorem von Steiner*, *J. f. Math.* **32**, 303 (1846), *Werke* II, 379: *In jedem ihrer Punkte wird eine c_3 von einem Kegelschnitt fünfpunktig berührt, dessen letzter Schnittpunkt mit der Kurve der dritte Schnittpunkt der Geraden ist, die den Schmiegungspunkt mit dem Tangentialpunkt seines Tangentialpunktes verbindet.* Dieser Satz ist schon von Poncelet gegeben worden, *J. f. Math.* **8**, (1832) 135.

Wenn ein Kegelschnitt eine c_3 in drei getrennten Punkten berührt und in diesen die fünfpunktig berührenden Kegelschnitte konstruiert werden, so liegen die drei sechsten Schnittpunkte dieser Kegelschnitte auf einer Geraden (Schröter, S. 273).

Für $m = 3$ findet man: *Konstruiert man alle Kurven 3. Ordnung, die die gegebene c_3 in einem und demselben Punkte P achtpunktig berühren, so gehen sie alle durch den Punkt hindurch, den man findet, indem man zu P den Tangentialpunkt, von diesem wieder den Tangentialpunkt und von dem gefundenen Punkte zum drittenmal den Tangentialpunkt konstruiert* (Salmon, *Phil. Trans.* **148**, 535 (1859)).

Halphen beschäftigt sich in den *Math. Ann.* **15**, 359 (1879) mit den Punkten, in denen alle $3m$ Schnittpunkte einer Kurve m^{ter} Ordnung mit der c_3 zusammenfallen können, also eine $3m$-punktige Berührung stattfindet. Für $m = 1$ ergeben sich die neun *Wendepunkte*, für $m = 2$ die *sextaktischen Punkte*, deren es 27 gibt, für $m = 3$ die Punkte, die Halphen *Koinzidenzpunkte* nennt. Man vgl. auch Kötter, *Diss.* Berlin 1884, der von Wendepunkten zweiter, dritter usw. Stufe spricht.

Von den Wendepunkten sind drei reell, sechs imaginär. Die 27 sextaktischen Punkte sind die Schnittpunkte der geraden Polaren der Wendepunkte mit der c_3; von ihnen sind neun reell und 18 imaginär. Die Gleichung 27. Grades, von denen ihre Bestimmung abhängt, ist ebenso wie die Gleichung 9. Grades, welche die Wendepunkte liefert, algebraisch auflösbar und auch vom rein algebraischen Standpunkte aus bemerkenswert. Vgl. Steiner, *J. f. Math.* **32**, 182, 300 (1846), *Werke* II, 369, 375, Plücker, ebenda **34**, 332 (1847), *Abhdlgn.* I, 404. Vieles über diese Punkte findet man bei Schröter in § 32.

§ 3. Erzeugung und Konstruktion der Kurven dritter Ordnung.

Bezieht man ein Strahlenbüschel und ein Kegelschnittbüschel projektiv aufeinander, so erfüllen die Schnittpunkte der Strahlen des Büschels mit den homologen Kegelschnitten, wie aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven hervorgeht, eine Kurve 3. Ordnung.

Wenn eine c_3 durch neun Punkte bestimmt ist, so läßt sich nur für den Mittelpunkt des Strahlenbüschels irgendeiner dieser Punkte wählen, nicht aber für die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels irgendvier der übrigen Punkte. Sind aber vier von diesen fünf Punkten gegeben, so bestimmt sich der fünfte aus den folgenden Theoremen (Cremona, Art. 65):

Sind auf einer c_3 irgendwie vier Punkte A, B, C, D festgelegt, so schneidet jeder Kegelschnitt, der durch sie hindurchgeht, die c_3 außerdem in zwei Punkten, die mit einem festen Punkte O der Kurve in gerader Linie liegen. Dieser Punkt heißt der den vier Punkten gegenüberliegende Punkt. Die Kegelschnitte durch A, B, C, D und die Strahlen durch O bilden dann zwei projektive Büschel, welche die c_3 erzeugen.

Legt man auf einer c_3 willkürlich drei Punkte A, B, C und einen vierten Punkt O fest, so schneidet jede Gerade durch O die c_3 in zwei anderen Punkten derart, daß der Kegelschnitt, der durch sie und die Punkte A, B, C geht, noch einen festen Kurvenpunkt D enthält. Die Kegelschnitte durch A, B, C, D und die Strahlen durch O bilden dann zwei projektive Büschel, die die c_3 erzeugen.

Auf Grund dieser Sätze kann man die c_3 konstruieren, die durch neun gegebene Punkte geht (Chasles, *C. R.* **36**, 943 (1853)) und kann auch zu acht bekannten Schnittpunkten zweier c_3 den neunten konstruieren, indem man den Satz benutzt, daß *ein Kegelschnitt, der durch fünf unter den neun Schnittpunkten zweier c_3 geht, auch durch den Punkt geht, der den übrigen vier Punkten auf beiden Kurven gegenüberliegt.* Vgl. hierüber Plücker, *Theorie d. alg. Kurven,* 1839, S. 56 und Hart, *Cambr. Dubl. Math. J.* **6**, 181 (1851). Verschiedene Konstruktionen dieses neunten Punktes, die bloß das Lineal erfordern, sind von London angegeben, *Math. Ann.* **36**, 585 (1890). Besondere Fälle der Chaslesschen Konstruktion und ihre Anwendungen sind behandelt bei Durège, p. 156, und Jonquières, *Mél. de géom. pure*, p. 182.

Eine andere Konstruktion gab Chasles (*C. R.* **37**, 275 (1853)) auf Grund des Satzes: *Wenn zwei Kegelschnittbüschel aus einer Geraden die Punktepaare derselben Involution ausschneiden und dadurch projektiv aufeinander bezogen sind, so erfüllen die übrigen Schnittpunktepaare entsprechender Kegelschnitte eine Kurve 3. Ordnung.*

Die *Graßmannsche Erzeugungsart* der c_3 ist gegeben durch den Satz: *Ein Punkt beschreibt eine c_3, wenn die Geraden, die ihn mit drei festen Punkten A, B, C verbinden, drei feste Geraden a, b, c in drei Punkten einer geraden Linie treffen.* Die Umkehrung des Satzes, daß *jede* c_3 sich auf diese Weise konstruieren läßt, und zwar, wenn *A*, *B*, *C* gegeben sind, die Geraden *a*, *b*, *c* auf 12 verschiedene Arten angenommen werden können, hat Clebsch bewiesen, *Math. Ann.* **5**, 425 (1872). Graßmanns Schriften finden sich im *J. f. Math.* **31**, 111 (1846), **36**, 117 (1848), **42**, 187 (1851), **52**, 254 (1856), vereinigt in seinen Werken, Bd. II[1].

Von Cayley (*J. de Math.* (1), **9**, 287 (1844), *Papers* I, 185) rührt die Konstruktion her, die auch Graßmann angibt und die aussagt: *Wenn ein Punkt sich so bewegt, daß die Geraden, die ihn mit drei Punktepaaren verbinden, einer Involution angehören, so beschreibt er eine Kurve 3. Ordnung.*

Vgl. über diese Konstruktionen Kölmel, *Diss.*, Tübingen 1886, und Whitehead, *A treatise on universal algebra* I, 1898, p. 333.

Eine andere Konstruktion verdankt man Schröter, *Math. Ann.* **5**, 50 (1872). Sie beruht auf dem Satz von Hesse: *Verbindet man zwei Paare konjugierter Pole der c_3 auf doppelte Art über Kreuz, so durchschneiden sich die Verbindungslinien jedesmal auf der Kurve, und die beiden Schnittpunkte bilden ein neues Paar konjugierter Pole.* Gibt man also nach Willkür drei Punktepaare als Paare konjugierter Pole, so ist die Kurve bestimmt, und es lassen sich beliebig viele Punkte auf ihr linear konstruieren. Betreffs dieser Konstruktion vgl. auch Hurwitz, *J. f. Math.* **107**, 141 (1891), Oppenheimer, *Monatsh. f. Math.* **16**, 193 (1905).

Eine weitere Konstruktion gründete Chasles (*J. de Math.* (1) **19**, 366 (1854)) auf den folgenden Satz, der von Jonquières herrührt (*C. R.* **45**, 326 (1857)): *Nimmt man auf einer der vier gemeinsamen Tangenten einer Kegelschnittschar einen Punkt O beliebig an, legt von ihm die zweiten Tangenten an die Kegelschnitte der Schar und nimmt zu dem Büschel dieser Tangenten eine projektive gerade Punktreihe an, bringt man dann jede der Tangenten*

zum Schnitt mit den Tangenten desselben Kegelschnittes der Schar, die durch den der ersten Tangente in der Punktreihe entsprechenden Punkt gehen, so erfüllen die Schnittpunktepaare, die man so erhält, eine c_3. Diese geht durch O und die Schnittpunkte der drei gemeinsamen Tangenten, auf denen O nicht liegt, hindurch.

Legt man aus zwei festen Punkten die Tangentenpaare an die Kegelschnitte der Schar, so schneiden diese sich in je zwei Punktepaaren, deren Ort eine c_3 ist (Schröter, S. 16).

Ebenso wird eine c_3 erfüllt von den Punkten, von denen aus an drei beliebig gegebene Kegelschnitte solche Tangentenpaare gehen, die einer Strahleninvolution angehören. Gehören die drei Kegelschnitte zu einer Kegelschnittschar, so ist diese Bedingung für alle Punkte der Ebene erfüllt (Schröter, S. 28).

Über die angeführten und noch andere Konstruktionen findet man weiteres bei Kötter, *Math. Ann.* **38**, 287 (1891), Rohn, *Math. Ver.* **16**, 265 (1907).

§ 4. Die Konfiguration der Wendepunkte. Syzygetische Büschel. Kanonische Gleichung.

Wie schon Mac Laurin fand, *haben die neun Wendepunkte einer c_3 eine solche Lage, daß jede Gerade, die zwei von ihnen verbindet, noch einen dritten enthält.* Vgl. Jonquières, *Mél. de géom. pure*, p. 231.

Auf diese Weise entstehen 12 Geraden, die *Wendepunktslinien*, von denen jede drei Wendepunkte enthält und vier durch jeden Wendepunkt gehen. Diese Konfiguration wird die *Hessesche Konfiguration* genannt, da sie Hesse zuerst studiert hat.

Die 12 Wendepunktslinien lassen sich derart in vier Tripel teilen, daß die Linien eines Tripels jedesmal zusammen *alle* Wendepunkte enthalten. Diese Tripel bilden die *syzygetischen Dreiseite. Die Ecken dieser letzteren bilden die Doppelpunkte der zyklischen Projektivitäten, welche auf den Wendepunktslinien die drei auf ihnen enthaltenen Wendepunkte begründen* (Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 120 (1864)). Die Doppelpunkte sind reell, wenn von den Wendepunkten einer reell und die anderen beiden konjugiert imaginär sind, sie sind auf einer reellen Wendepunktslinie imaginär, wenn die drei Wendepunkte reell sind.

Eine reelle, singularitätsfreie c_3 hat drei in gerader Linie liegende reelle Wendepunkte, und außer dieser Wendepunktslinie geht durch jeden reellen Wendepunkt nur noch eine reelle Wendepunktslinie, die außer dem reellen zwei konjugiert ima-

ginäre Wendepunkte enthält. Die zwei weiteren Wendepunktslinien, die durch jeden reellen Wendepunkt gehen, sind konjugiert imaginär.

Legt man von einem Wendepunkte die drei von der Wendetangente dieses Punktes verschiedenen Tangenten an die Kurve, so liegen deren Berührungspunkte auf einer Geraden, welche die harmonische Gerade des Wendepunktes heißt und erfüllt wird von den Punkten auf den Geraden durch den Wendepunkt, die zu diesem letzteren und den beiden weiteren Schnittpunkten der Geraden mit der Kurve den vierten harmonischen Punkt bilden (Mac Laurin, vgl. Jonquières, l. c. p. 228).

Eine c_3 wird in sich transformiert durch eine involutorische Homologie (perspektive Kollineation), die zum Zentrum einen Wendepunkt und zur Achse die zugehörige harmonische Gerade hat. Wird umgekehrt eine c_3 durch eine solche Kollineation in sich transformiert, so ist deren Zentrum ein Wendepunkt der Kurve.

Der Polarkegelschnitt eines Wendepunktes zerfällt in die Wendetangente und die harmonische Gerade dieses Punktes (Cremona, Art. 140).

Die neun Wendepunkte werden durch die Hessesche Kurve ausgeschnitten und ihre harmonischen Geraden bilden die Rückkehrtangenten der Cayleyschen Kurve in den neun Spitzen, dabei sind die letzteren selbst die Schnittpunkte der harmonischen Geraden mit der zugehörigen Wendetangente (Cremona, Art. 141, Salmon, S. 200).

Drei Wendepunkte, die in gerader Linie liegen, werden aus einem beliebigen Punkte der Kurve auf die Kurve wieder in drei Punkte einer geraden Linie projiziert (dieser Satz rührt von Küpper her, vgl. Durège, p. 288).

Die harmonischen Geraden von drei in gerader Linie liegenden Wendepunkten gehen durch einen Punkt, dieser und die Ecken des Dreiseits, das die Tangenten in den drei Wendepunkten bilden, sind die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels, das die ersten Polaren der Punkte der Wendepunktslinie bilden (Plücker, *System der anal. Geom.*, S. 288).

Die Punkte, in denen sich die harmonischen Geraden zu je dreien begegnen, sind die Ecken der vier syzygetischen Dreiseite. Somit verteilen sich die 12 Ecken dieser vier Dreiseite zu je vieren auf die neun harmonischen Geraden der Wendepunkte. Über die Eigenschaften dieser Konfiguration vgl. Hesse, *J. f. Math.* **28**, 97, **38**, 257.

Wenn man durch einen Wendepunkt W drei Geraden beliebig zieht, so liegen die sechs weiteren Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve auf einem Kegelschnitt. Jede c_3, die durch diese sechs Punkte und den Punkt W geht, hat den letzteren Punkt zum Wendepunkt (Salmon, *J. f. Math.* **39**, (1850) 365).

Läßt man die drei Geraden zusammenfallen, so ergibt sich insbesondere: *In den weiteren Schnittpunkten einer Geraden durch einen Wendepunkt wird die c_3 von einem und demselben Kegelschnitt dreipunktig berührt* (Poncelet, *J. f. Math.* **8**, 134 (1832)).

Wenn man durch eine Ecke eines syzygetischen Dreiseits eine beliebige Transversale legt, so schneidet sie die sechs harmonischen Geraden, die *nicht* durch diese Ecke gehen, in sechs Punkten, die sich auf drei verschiedene Arten als Punktepaare einer Involution auffassen lassen (Servais, *Brux. Bullet.* (3) **20**, 456 (1890)).

Die sechs Tangenten, die von einer Ecke des vollständig reellen syzygetischen Dreiseits ausgehen, lassen sich auf drei verschiedene Arten als Strahlenpaare einer Involution auffassen. Die Doppelstrahlen dieser drei Involutionen bilden aufs neue Strahlenpaare einer Involution, die zu Doppelstrahlen die durch die angenommene Ecke gehenden Seiten des Dreiseits hat (Cremona, *Giorn. di mat.* (1) **2**, 85 (1864)).

Die neun Wendepunkte bestimmen eine c_3 nicht, vielmehr gehen durch sie die Kurven eines ganzen Büschels hindurch, und *alle diese Kurven haben ihre neun gemeinsamen Punkte zu Wendepunkten* (Hesse, *J. f. Math.* **28**, 107). Das Büschel heißt ein *syzygetisches Büschel*. In ihm sind vier in drei Gerade zerfallende c_3 enthalten: die vier syzygetischen Dreiseite. *Jede Seite eines solchen Dreiseits ist die zweite Polare der gegenüberliegenden Ecke für alle Kurven des syzygetischen Büschels.*

Die Hessesche Kurve einer Kurve des syzygetischen Büschels gehört wieder dem Büschel an, und jede Kurve des Büschels ist Hessesche Kurve von drei Kurven des Büschels (Hesse, *J. f. Math.* **28**, 89). Somit kann (vgl. § 2) jede c_3 als Hessesche (Jacobische) Kurve von *drei* Kegelschnittnetzen aufgefaßt werden.

In einem syzygetischen Büschel sind vier (äquianharmonische) Kurven enthalten, deren Hessesche Kurven die vier syzygetischen Dreiseite sind, und sechs (harmonische) Kurven, deren jede die Hessesche ihrer eigenen Hesseschen Kurve ist (Aronhold, *J. f. Math.* **39**, 153 (1850)).

Die Polarkegelschnitte eines Punktes P der Ebene bezüglich aller Kurven des syzygetischen Büschels bilden ein Kegelschnittbüschel, dessen Grundpunkte die Berührungspunkte der vier aus P an die durch P gehende Kurve des syzygetischen Büschels gelegten anderen Tangenten sind (Cayley, *Phil. Trans.* **147**, 443 (1857), *Papers* II, 412).

Die geraden Polaren eines Punktes P bezüglich aller Kurven des syzygetischen Büschels bilden ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Tangentialpunkt von P für die durch P gehende Kurve des Büschels ist (Salmon, *Phil. Trans.* **148**, 535 (1859)).

Die Cayleyschen Kurven der c_3 eines syzygetischen Büschels bilden eine *syzygetische Schar* von Kurven 3. Klasse, die zu gemeinsamen Rückkehrtangenten die für alle Kurven des syzygetischen Büschels identischen harmonischen Geraden der Wendepunkte haben.

Es gibt eine Gruppe von 216 Kollineationen, welche die Konfiguration der neun Wendepunkte, d. h. auch das syzygetische Kurvenbüschel, in sich transformieren.

Es gibt eine Gruppe von 18 Kollineationen (außer der Identität die neun bereits besprochenen involutorischen perspektiven Kollineationen, ferner die acht ternär zyklischen Kollineationen, welche zu Doppelpunkten die drei Ecken eines syzygetischen Dreiseits haben und die Wendepunkte auf dessen Seiten zyklisch ineinander transformieren), *die jede Kurve des syzygetischen Büschels in sich transformieren. Zu dieser Gruppe gehört jede Kollineation, welche eine nicht zerfallende Kurve des Büschels in sich transformiert.*

Bezieht man die Gleichung einer c_3 in inhomogenen projektiven Koordinaten x, y auf ein Grunddreieck, von dem eine Ecke ein Wendepunkt und die gegenüberliegende Seite die harmonische Gerade dieses Wendepunktes ist, so nimmt sie die Form an:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Deutet man in dieser Gleichung x, y als affine (cartesische) Koordinaten, so stellt sie eine *divergente Parabel* dar. Somit *geht jede Kurve 3. Ordnung aus einer divergenten Parabel durch Projektion aus einer Ebene auf eine andere hervor.* Dies ist der Satz, von dem Newton (*Genesis curvarum per umbras*) ausging.

Schreibt man die Gleichung der c_3 in homogenen Koordinaten, die auf das reelle syzygetische Dreiseit bezogen sind, so

nimmt sie die *kanonische Form* an:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\lambda x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Die Hessesche Kurve hat dann die Gleichung

$$\lambda^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (1 + 2\lambda^2)x_1 x_2 x_3 = 0.$$

So zeigt sich, daß beide Kurven zu dem durch die Kurven

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0, \quad x_1 x_2 x_3 = 0$$

bestimmten Büschel gehören. *Gibt man λ alle möglichen Werte, so erhält man alle Kurven des syzygetischen Büschels*, dessen Grundpunkte nach dem Vorstehenden durch die drei Gleichungspaare

$$x_1 = 0,\ x_2^3 + x_3^3 = 0;\ x_2 = 0,\ x_3^3 + x_1^3 = 0;\ x_3 = 0,\ x_1^3 + x_2^3 = 0$$

bestimmt werden. So erkennt man, daß, wenn ε eine imaginäre dritte Einheitswurzel bezeichnet, die Koordinaten der Wendepunkte einer c_3, bezogen auf das syzygetische Dreiseit, durch die folgenden Werte gegeben werden:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0, & 1, & -1; & 0, & 1, & -\varepsilon; & 0, & 1, & -\varepsilon^2; \\ -\varepsilon^2, & 0, & 1; & -1, & 0, & 1; & -\varepsilon, & 0, & 1; \\ 1, & -\varepsilon, & 0; & 1, & -\varepsilon^2, & 0; & 1, & -1, & 0. \end{array}$$

(Vgl. Clebsch-Lindemann I, S. 511.)

§ 5. Gestalt und Klassifikation der Kurven dritter Ordnung.

Bringt man die Gleichung einer c_3 durch Transformation der zugrunde liegenden projektiven Koordinaten x, y in die Form der *divergenten Parabeln*

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so *besteht die Kurve aus zwei Ästen, wenn die Wurzeln der kubischen Gleichung, die sich durch Nullsetzen der rechten Seite in der vorstehenden Gleichung ergibt, alle reell sind; sind zwei Wurzeln der Gleichung konjugiert komplex und nur eine Wurzel reell, so besteht die Kurve aus einem einzigen Ast.*

Von den beiden Ästen der Kurve wird der eine von allen Geraden der Ebene in einem oder drei Punkten geschnitten (*un-*

paarer Ast oder *Serpentine*), der andere in zwei oder keinem Punkte (*paarer Ast* oder *Oval*).

Bei einästigen Kurven fehlt der paare Ast, von jedem Punkte dieser Kurven gehen *zwei* reelle anderswo berührende Tangenten aus. Bei den zweiästigen Kurven lassen sich von den Punkten des unpaaren Astes *vier* reelle anderswo berührende Tangenten an die Kurve legen, zwei an den unpaaren und zwei an den paaren Ast; von den Punkten des paaren Astes läßt sich *keine* anderswo berührende Tangente an die Kurve legen. Vgl. Durège, *J. f. Math.* **75**, 153 (1873).

Bei den einästigen Kurven zerlegen zwei Punkte mit gemeinsamem Tangentialpunkt den Ast in zwei Teile, von denen der eine durch den Tangentialpunkt aufs neue in zwei Teile zerlegt wird; *von den drei Teilen der Kurve, die man so erhält, enthält jeder einen reellen Wendepunkt* (Schröter, S. 254).

Bei einer zweiästigen Kurve liegen die drei reellen Wendepunkte auf dem unpaaren Ast, und für den letzteren bleibt der soeben gegebene Satz unverändert gültig. Ähnliche Fragen behandelten Sturm, *J. f. Math.* **90**, 85 (1880), Kötter, *J. f. Math.* **114**, 170 (1895).

Newton (*Enumeratio linearum tertii ordinis*) hat zuerst eine Klassifikation der c_3 gegeben in Analogie zu der affinen Klassifikation der Kegelschnitte, indem er von der Gleichungsform der divergenten Parabeln ausging. Er rechnete 72 Arten von Kurven 3. Ordnung. Weitere Aufklärung über diese Arten findet man bei Cremona, *Giorn. di Mat.* (1) **2**, 78 (1864), und Rouse Ball, *Lond. M. S. Proc.* **22**, 140 (1891). Plücker rechnete, von ähnlichen Gesichtspunkten ausgehend, 219 Arten.

Möbius (*Leipz. Abh.* **1**, 1 (1852), *Werke* II, 89) versuchte zuerst eine *projektive* Klassifikation der c_3, die weit weniger Arten liefert. Er ersetzte zu dem Zweck die c_3 durch den Kegel 3. Grades, der sie aus einem Punkte außerhalb ihrer Ebene projiziert, und diesen Kegel wieder durch die sphärische Kurve, in der er von einer Kugel um seine Spitze geschnitten wird. So kam er dazu, sieben Typen von c_3 zu unterscheiden. Ebenfalls von den Kegeln 3. Grades ausgehend, gelangte Wiener (*Die Einteilung der eb. Kurven u. Kegel 3. Ordnung, Abhdlgn. aus d. Verlage math. Modelle von M. Schilling in Halle*, 1901, dort auch bibliographische Nachweise) zu 13 Gattungen von c_3. Um sie zu finden, gehen wir von dem syzygetischen Büschel aus:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\lambda x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Für $\lambda = -\frac{1}{2}$ ergibt sich ein Dreiseit mit einer reellen und zwei konjugiert imaginären Seiten, für $\lambda = \infty$ ergibt sich ein Dreiseit mit lauter reellen Seiten. Ist $\lambda < -\frac{1}{2}$, so gehört zu λ eine zweiästige Kurve, insbesondere zu

$$\lambda_1 = -\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}+5}{4}}$$

eine zweiästige harmonische Kurve. Ist $\lambda > -\frac{1}{2}$, so ergibt sich eine einästige Kurve, insbesondere für $\lambda = 0$ die äquianharmonische Kurve, die zur Hesseschen Kurve das für $\lambda = \infty$ resultierende reelle Dreiseit hat, für $\lambda = 1$ die äquianharmonische Kurve, deren Hessesche Kurve das für $\lambda = -\frac{1}{2}$ entstehende Dreiseit ist, für

$$\lambda_2 = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-5}{4}}$$

ergibt sich eine einästige harmonische Kurve. So erhalten wir die Wienerschen Typen:

I. Zweiästige Kurven $(-\frac{1}{2} > \lambda > \lambda_1)$.
II. Zweiästige harmonische Kurve $(\lambda = \lambda_1)$.
III. Zweiästige Kurven $(\lambda_1 > \lambda)$.
IV. Einästige Kurven $(\lambda > 1)$.
V. Äquianharmonische Kurven, deren (in ein Dreiseit zerfallende) Hessesche Kurve nur *eine* reelle Seite hat $(\lambda = 1)$.
VI. Einästige Kurven $(1 > \lambda > \lambda_2)$.
VII. Einästige harmonische Kurve $(\lambda = \lambda_2)$.
VIII. Einästige Kurven $(\lambda_2 > \lambda > 0)$.
IX. Äquianharmonische Kurven, deren Hessesche Kurve aus drei reellen Graden besteht $(\lambda = 0)$.
X. Einästige Kurven $(0 > \lambda > -\frac{1}{2})$.

Zu diesen zehn Gattungen *singularitätenfreier* Kurven kommen drei Gattungen von c_3 mit *singulärem Punkte,* nämlich

XI. Kurven mit Knoten (reelle Doppelpunktstangenten).
XII. Kurven mit Spitze (zusammenfallende Doppelpunktstangenten).
XIII. Kurven mit isoliertem Punkt (imaginäre Doppelpunktstangenten).

§ 6. Anwendung der elliptischen Funktionen. Die kubischen Ternärformen.

Führt man die Gleichung der c_3 in inhomogenen projektiven Koordinaten auf die Gleichungsform der divergenten Parabeln zurück

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so läßt sich leicht durch eine Verschiebung des Ursprunges ($x = 0$, $y = 0$) auf der Linie $y = 0$ und eine Veränderung des Einheitspunktes ($x = 1$, $y = 1$) die Gleichung weiter reduzieren auf

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

An diese Gleichung läßt sich sofort die Einführung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion knüpfen, indem man setzt

$$x = \wp u, \quad y = \wp' u,$$

so daß u einen den Punkten der Kurve in eindeutiger Weise zugeordneten Parameter bezeichnet. In der Tat besteht zwischen $\wp u$ und seiner Derivierten $\wp' u$ die Relation

$$\wp' u^2 = 4\wp u^3 - g_2 \wp u - g_3.$$

Die Funktion $\wp u$ ist doppeltperiodisch. Sind ω, ω' ihre Perioden, so erhält man denselben Wert von $\wp u$ und damit auch von x und y, wenn man den Argumentwert u ersetzt durch $u + m\omega + m'\omega'$, wobei m, m' irgendwelche ganze Zahlen bezeichnet. Man erhält also alle, reellen und imaginären, Punkte der Kurve, wenn man u auf ein Periodenparallelogramm beschränkt.

Die geometrische Darstellung der imaginären Punkte hat F. Klein bei den zu den Kurven 3. Ordnung reziproken Kurven 3. Klasse in einer sehr einfachen und anschaulichen Weise erreicht.

In der Theorie der elliptischen Funktionen wird gezeigt, daß

$$\begin{vmatrix} \wp u_1 & \wp' u_1 & 1 \\ \wp u_2 & \wp' u_2 & 1 \\ \wp u_3 & \wp' u_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

wird, wenn

$$u_1 + u_2 + u_3 = m\omega + m'\omega'$$

ist. Die geometrische Deutung dieses *Additionstheorems* lautet so, daß *drei Punkte der c_3 in gerader Linie liegen, wenn die Summe der zugehörigen Parameterwerte u_1, u_2, u_3 gleich einer Periode wird.*

Läßt man insbesondere u_3 mit u_2 zusammenfallen, so findet man, daß die Berührungspunkte der von dem Kurvenpunkte mit dem Parameter u_1 an die c_3 gelegten Tangenten einen Parameter von der Form

$$u_2 = \frac{m\omega + m'\omega' - u_1}{2}.$$

haben. Da Parameterwerte, die sich nur um Vielfache der Perioden unterscheiden, als gleichbedeutend anzusehen sind, gehen aus dem vorstehenden Ausdruck nur die folgenden vier zu wirklich verschiedenen Punkten gehörenden Parameterwerte hervor:

$$-\frac{u_1}{2}, \quad \frac{-u_1+\omega}{2}, \quad \frac{-u_1+\omega'}{2}, \quad \frac{-u_1+\omega+\omega'}{2}.$$

Macht man $u_1 = u_2 = u_3$, so sieht man, daß die neun Wendepunkte zu den Parameterwerten gehören:

$$0, \quad \frac{\omega}{3}, \quad \frac{\omega'}{3}, \quad \frac{\omega+\omega'}{3}, \quad \frac{2\omega}{3}, \quad \frac{2\omega'}{3}, \quad \frac{2\omega+\omega'}{3}, \quad \frac{\omega+2\omega'}{3}, \quad \frac{2\omega+2\omega'}{3}.$$

Diese Ausdrücke, die sich aus den Periodendritteln linear zusammensetzen, lassen sich in leicht verständlicher Symbolik wie folgt charakterisieren

(00), (10), (01), (11), (20), (02), (21), (12), (22),

dann sieht man sofort, daß die Wendepunkte sich auf die 12 Wendepunktslinien folgendermaßen verteilen:

(00)	(01)	(02)	(00)	(10)	(20)	(00)	(11)	(22)	(02)	(11)	(20)
(10)	(11)	(12)	(01)	(11)	(21)	(01)	(12)	(20)	(00)	(12)	(21)
(20)	(21)	(22)	(02)	(12)	(22)	(02)	(10)	(21)	(01)	(10)	(22)

Wie man nach den oben gegebenen Formeln unmittelbar erkennt, gehören die Periodenhälften

$$\frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega+\omega'}{2}$$

zu den Berührungspunkten der anderswo berührenden Tangenten, die man aus dem Wendepunkt (00) an die Kurve legt. Da die

Summe dieser Werte $\omega + \omega'$ ist, liegen die drei Berührungspunkte in gerader Linie, und gleiches ist bei allen anderen Wendepunkten leicht zu erkennen.

Das *Abelsche Theorem* sagt aus, daß die Parameterwerte $u_1, u_2, \ldots, u_{3n}$, die zu den Schnittpunkten der c_3 mit einer Kurve n^{ter} Ordnung gehören, der Bedingung genügen:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{3n} = m\omega + m'\omega'.$$

Nimmt man $n = 2$, also für die schneidende Kurve einen Kegelschnitt, und macht dann $u_1 = u_2 = \cdots = u_6$, so findet man

$$u_1 = \frac{m\omega + m'\omega'}{6}.$$

Die verschiedenen Punkte, die dieser Ausdruck liefern kann, erhält man, indem man in ihm m und m' die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5 durchlaufen läßt. Bringt man von den 36 Parameterwerten, die sich so ergeben, die unter ihnen enthaltenen Parameter der Wendepunkte in Abzug, so behält man die Parameter der 27 *sextaktischen Punkte* übrig.

Macht man $u_1 = u_4$, $u_2 = u_5$, $u_3 = u_6$, so erhält man die Gleichung

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{m\omega + m'\omega'}{2},$$

die ausdrückt, daß die Punkte mit den Parametern u_1, u_2, u_3 die Berührungspunkte eines dreifach berührenden Kegelschnittes sind. Den Wertekombinationen (1, 0), (0, 1), (1, 1) für m, m' entsprechend erhält man drei Systeme von solchen Kegelschnitten. Man sieht, daß die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte desselben Systems wieder auf einem Kegelschnitte liegen usw. Auf geometrischem Wege abgeleitet findet man diese Kegelschnittsysteme bei Cremona, Art. 150.

Schreibt man die Gleichung des Abelschen Theorems für die Kegelschnitte in der Form

$$u_1 + u_2 + u_0 = m\omega + m'\omega',$$

indem man $u_0 = u_3 + u_4 + u_5 + u_6$ setzt und die vier Punkte, zu denen diese letzteren Werte gehören, auf der Kurve fest gegeben annimmt, so erkennt man sofort: Die Kegelschnitte, die durch vier feste Kurvenpunkte hindurchgehen, schneiden außerdem zwei Punkte (mit den Parametern u_1, u_2) aus, die mit einem festen Punkte in gerader Linie liegen, und der Parameter dieses letzteren

Punktes wird durch die Parametersumme der vier Punkte gegeben, durch welche alle die Kegelschnitte gehen.

Des weiteren vgl. man Clebsch-Lindemann I, 602, Halphén, *Traité des fonctions elliptiques,* 1888, II, 413, Harnack, *Math. Ann.* **9**, 1 (1876), Jouel, *Math. Ann.* **47**, 72 (1896), Porter, *Am. M. S. Trans.* **2**, 36 (1901). Die allgemeine Frage nach den Kurven, von deren Punkten die Koordinaten sich als elliptische Funktionen eines Parameters ausdrücken lassen, behandelte Clebsch, *J. f. Math.* **64**, 210 (1865).

Der funktionentheoretischen Behandlung der c_3 steht ihre algebraische Theorie zur Seite, die sich auf die invarianten Bildungen einer kubischen Ternärformen gründet.

Eine solche Ternärform hat zwei Invarianten S, T, die, wenn die Form in ihrer kanonischen Gestalt

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\lambda x_1 x_2 x_3$$

vorliegt, sich ausdrücken wie folgt:

$$S = 24\lambda(\lambda^3 - 1), \quad T = 6(8\lambda^6 + 20\lambda^3 - 1).$$

Bei einer linearen Transformation der Form f multipliziert sich S mit der vierten, T mit der sechsten Potenz der Substitutionsdeterminante. Daraus folgt, daß $S^3 : T^2$ eine absolute Invariante ist, die bei allen linearen Transformationen völlig ungeändert bleibt. Diese einzige absolute Invariante hängt mit dem charakteristischen Doppelverhältnis σ der zugehörigen c_3 zusammen wie folgt:

$$\frac{S^3}{T^2} = 24\,\frac{(1-\sigma-\sigma^2)^3}{(1+\sigma)^2(2-\sigma)^2(1-2\sigma)^2}.$$

Aus den Invarianten S und T setzt sich die *Diskriminante* R folgendermaßen zusammen:

$$R = T^2 - \frac{1}{6}S^3,$$

und ist f in der kanonischen Form gegeben, so wird

$$R = (1 + 8\lambda^3)^3.$$

Das Verschwinden von R bedeutet, daß die Kurve nicht frei von Singularitäten ist.

Die Hessesche Kovariante, die in der kanonischen Form lautet:

$$H = \lambda^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (1 + 2\lambda^2)x_1x_2x_3,$$

ist bereits in § 4 vorgekommen. Die Cayleysche Kurve wird gewonnen durch das Nullsetzen der Kontravariante

$$s = -6\lambda(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 6(1 - 4\lambda^3)u_1u_2u_3,$$

in der u_1, u_2, u_3 die Koordinaten der Geraden

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

bedeuten. Hierzu kommt die Kontravariante:

$$t = -2(1 - 10\lambda^3)(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 4(15\lambda^2 + 12\lambda^5)u_1u_2u_3.$$

Die Gleichung $f + \varrho H = 0$ liefert für variierendes ϱ die Kurven des syzygetischen Büschels, $s + \varrho t = 0$ die Kurven der syzygetischen Schar, die die Cayleyschen Kurven bilden.

Außerdem sei die Divariante erwähnt, die in der kanonischen Form lautet:

$$\Theta = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_3 & \lambda x_2 & u_1 \\ \lambda x_3 & x_2 & \lambda x_1 & u_2 \\ \lambda x_2 & \lambda x_1 & x_3 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sie liefert, gleich Null gesetzt, wenn man die x, also einen Punkt, als gegeben ansieht, den Polarkegelschnitt dieses Punktes, und wenn man die u, also eine Gerade, festlegt, die Polokonik dieser Geraden. Schreibt man diese Kovariante

$$\Theta = \sum \Theta_{ik}x_ix_k,$$

wobei $\Theta_{11} = \lambda(\lambda u_1^2 + 2u_2u_3)$, $\Theta_{23} = -(\frac{1}{2}u_1^2 + \lambda^2 u_2u_3)$ usw. wird, dann ergibt die Kontravariante

$$F = \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & u_1 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & u_2 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

gleich 0 gesetzt, die Gleichung der c_3 in Linienkoordinaten.

Für die *äquianharmonischen Kurven* wird die Invariante $S = 0$. Dann läßt sich die zugehörige Ternärform durch eine lineare Transformation auf die Summe dreier Kuben reduzieren (Aronhold, *J. f. Math.* **39**, 153 (1850)). Die Hessesche

Form zerfällt in drei Linearfaktoren, die Hessesche Kurve in drei gerade Linien. Die Cayleysche Kurve reduziert sich auf die Schnittpunkte dieser drei Geraden, und das Dreieck, das diese bilden, ist ein gemeinsames Polardreieck aller Polarkegelschnitte.

Im Fall der *harmonischen Kurven* wird $T = 0$. Die Hessesche Form der Hesseschen Form wird mit der Urform (bis auf einen Zahlfaktor) identisch, und $t = 0$ ist die Gleichung der Cayleyschen Kurve der Hesseschen Kurve.

Kapitel XVIII.

Allgemeine Theorie der ebenen Kurven vierter Ordnung.

Von *E. Ciani* in Genua.

§ 1. Kassifikation, Gestalt und Erzeugung.

1. *Allgemeines.* Wir bezeichnen mit c_4 eine beliebige ebene irreduzible Kurve 4. Ordnung, die analytisch durch das Verschwinden einer irreduziblen biquadratischen Ternärform mit reellen Koeffizienten dargestellt wird. Da diese Ternärform von 14 Koeffizienten abhängt, so geht durch 14 in der Ebene beliebig angenommene Punkte eine einzige Kurve 4. Ordnung hindurch. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß gewisse besondere Lagen der Punkte ausgeschlossen sind; wählt man z. B. die Punkte unter den 16 Schnittpunkten zweier c_4 aus, so gehen durch sie mindestens ∞^1 c_4 hindurch.

Eine c_4 besitzt Doppeltangenten und Wendepunkte und kann auch Doppelpunkte und Spitzen besitzen. Indem wir etwaige höhere Singularitäten uns in ihre einfachen Elemente aufgelöst denken, wollen wir wie in Kap. XIII, § 7 mit n die Ordnung, mit n' die Klasse, mit d die Anzahl der Doppelpunkte, mit d' die der Doppeltangenten, mit r die der Spitzen, mit r' die der Wendepunkte, endlich mit p das Geschlecht bezeichnen, dann ergibt sich aus den Plückerschen Formeln die folgende von Salmon (*Höhere ebene Kurven*, S. 278) gegebene Tabelle:

n	d	r	n'	d'	r'	p
4	0	0	12	28	24	3
4	1	0	10	16	18	2
4	0	1	9	10	16	2
4	2	0	8	8	12	1
4	1	1	7	4	10	1
4	0	2	6	1	8	1
4	3	0	6	4	6	0
4	2	1	5	2	4	0
4	1	2	4	1	2	0
4	0	3	3	1	0	0

2. *Klassifikation und Gestalt.* Die älteren Methoden zur Klassifikation der c_4 gründen sich auf die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden, wobei der Verlauf der Kurve im Endlichen noch weitere Unterteilungen bedingt. Von dieser Art sind die Klassifikationen von Euler (*Introd. in analysin infinitorum* II, Lausannae 1748), Cramer (*Introd. à l'analyse des lignes courbes,* Genève 1750), Plücker (*Theorie der algebraischen Kurven,* Bonn 1839). Plücker unterscheidet 152 Arten und gibt für jede eine kanonische Gleichungsform an.

Zeuthen, *Math. Ann.* **7**, 410 (1874), hat sich insbesondere mit der Gestalt der reellen Züge einer c_4 beschäftigt und daraus eine Klassifikation hergeleitet, die von dem Verhalten der Kurve im Unendlichen unabhängig ist. Er beginnt mit der Bemerkung, daß die Züge einer Kurve in zwei Arten, paare und unpaare, zerfallen (vgl. Kap. XIII, § 12). Es ergibt sich, daß eine Kurve 4. Ordnung nur aus paaren Zügen bestehen kann, und da die Anzahl der Züge das Geschlecht der Kurve höchstens um 1 übersteigt, besteht eine c_4 aus 1, 2, 3 oder 4 paaren Zügen. Hierbei erweist sich eine Einteilung der Doppeltangenten in zwei Arten als zweckmäßig. Zeuthen nennt eine Doppeltangente von der ersten Art, wenn ihre Berührungspunkte entweder konjugiert imaginär sind oder auf demselben reellen Zug der Kurve liegen, und spricht von einer Doppeltangente zweiter Art, wenn sie zwei verschiedene Züge berührt. Von Doppeltangenten erster Art gibt es immer vier, die Zahl derer zweiter Art beträgt 0, 4, 12 oder 24. Hieraus folgt auch, daß die Höchstzahl der reellen Wendepunkte 8 beträgt. Zeuthen nennt weiter einen Zug ohne reelle Doppeltangente ein Oval, und bezeichnet ihn als ein *Unifolium, Bifolium, Trifolium, Quadrifolium,* je nachdem er 1, 2, 3 oder 4 Doppeltangenten besitzt. Indem er dann alle Möglichkeiten durchgeht, findet er 36 Arten nicht singulärer c_4 und durch Grenzübergänge auch eine Klassifikation der singulären Kurven.

F. Klein hat die Untersuchung der reellen Züge auf eine andere Grundlage gestellt durch Einführung der zu der Kurve gehörenden Riemannschen Fläche und der ihr zugeordneten Abelschen Integrale (*Math. Ann.* **10**, 11 (1876), **11**, 293 (1876)).

Die erste und nächstliegende Klassifikation der c_4 ist die (s. die Tabelle S. 397) nach dem Geschlecht. Da dies Geschlecht die Werte 0, 1, 2, 3 haben kann, ist es naturgemäß, die c_4 in ebenso viele Arten einzuteilen. Die in diesem Kapitel allein behandelten allgemeinen Kurven haben das Geschlecht 3.

3. *Erzeugung.* Aus der allgemeinen Erzeugung einer Kurve

von der Ordnung $r + s$ durch zwei projektive Büschel von Kurven der Ordnungen r und s folgt die Erzeugung einer c_4 durch zwei projektive Kegelschnittbüschel oder durch ein Büschel von c_3 und ein dazu projektives Strahlenbüschel.

Eine andere Erzeugung der c_4 knüpft an einen Kegelschnitt und eine c_3 an (vgl. Salmon, *Höhere eb. Kurven*, S. 321, Gerbaldi, *Rend. Circ. Mat.* **7**, 178 (1893), Ciani, *Ist. Lomb. Rend.* (2) **28**, 659 (1895)), indem der geometrische Ort der vier Pole einer jeden Tangente des Kegelschnittes bez. der c_3 eine allgemeine c_4 ist. Andere Erzeugungsarten der c_4 sind derart eng mit der Theorie ihrer Doppeltangenten verknüpft, daß wir es für besser halten, von ihnen in dem der Theorie der Doppeltangenten gewidmeten § 5 zu sprechen.

Weiter vgl. man bez. der Erzeugung der c_4 sowie der Konstruktion der c_4, die durch 14 gegebene Punkte geht: Graßmann, *J. f. Math.* **44**, 1 (1852), Chasles, *C. R.* **37**, 372 (1853), Jonquières, *J. de math.* (2) **1**, 411 (1856), H. J. S. Smith, *Ann. di mat.* (2) **3**, 218 (1869), Siebeck, ebenda p. 65, Le Paige, *C. R.* **98**, 353 (1884), Valentiner, *Nyt Tidsskr. for Math.* **3**, 33 (1892).

§ 2. Polarentheorie.

4. *Polarkurven.* Ein beliebiger Punkt der Ebene einer c_4 hat bez. dieser c_4 drei Polarkurven von den Ordnungen 3, 2, 1, welche der Reihe nach die *kubische, konische* und *gerade Polare* des Punktes oder auch die erste, zweite, dritte Polare heißen. Schreibt man die Gleichung der c_4 in symbolischer Gestalt $a_x^4 = 0$ und bezeichnet mit y_1, y_2, y_3 die Koordinaten des beliebig angenommenen Punktes, so sind die Gleichungen der drei Polarkurven der Reihe nach

$$a_y a_x^3 = 0, \quad a_y^2 a_x^2 = 0, \quad a_y^3 a_x = 0.$$

Liegt der Punkt y auf der Kurve, so gibt die letzte Gleichung die Tangente in diesem Punkte. Die *gemischte* (konische) *Polare* eines Punktepaares y, z wird durch die Gleichung gegeben: $a_y a_z a_x^2 = 0$. Mit Hilfe einer allgemeinen c_4 läßt sich unter der Voraussetzung, daß eine gewisse, später noch zu erörternde Invariante nicht verschwindet, auch eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Kurven 2. Klasse und den Kurven 2. Ordnung der Ebene herstellen. Die Kurve 2. Ordnung ist der Ort aller Punkte, deren konische Polare bez. der c_4 zu der Kurve 2. Klasse apolar ist (s. Kap. XIII, § 5).

Ist $a_u^2 = 0$ die Gleichung der letzteren, so wird die Gleichung der zugehörigen Kurve 2. Ordnung in symbolischer Form

$$a_\alpha^2 a_x^2 = 0.$$

(Vgl. Scherrer, *Ann. di mat.* (2) **10**, 212 (1882), Ciani, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **4**, 274 (1895).) Die Kurve 2. Ordnung heißt die *konische Polare* der Kurve 2. Klasse und diese die *Antipolare* der ersteren. Diese Bezeichnung rührt von Caporali her (*Memorie* p. 354). Die erörterte Beziehung läßt sich auch in einem Raume von fünf Dimensionen darstellen, dessen Punkte den Kurven 2. Ordnung und dessen „Überebenen" den Kurven 2. Klasse der Ebene der c_4 in eindeutiger Weise entsprechen. Genauer läßt sich sagen, daß die erwähnte Beziehung, die durch die c_4 vermittelt wird, durch die Polarität bezüglich einer gewissen „Überfläche" 2. Ordnung in dem Raume von fünf Dimensionen dargestellt wird (Segre, *Ann. di Mat.* (2) **20**, 1 (1892)). Die Gleichung dieser Überfläche wird in Nr. 9 gegeben, wir werden dort sehen, daß ihre Diskriminante die Invariante sechsten Grades der c_4 ist. Ein Punkt und eine Überebene, die bez. der genannten Überfläche als Pol und Polare einander zugeordnet sind, stellen eine Kurve 2. Klasse und die polare Kurve 2. Ordnung bez. der c_4 dar. Daraus erkennt man, daß die in Rede stehende Beziehung wechselweise eindeutig ist, solange die erwähnte Diskriminante von Null verschieden bleibt. Von Caporali stammen auch die folgenden Definitionen (l. c., p. 345): *Polohessiana* und *Polocayleyana* eines Punktes y heißen die Hessesche und Cayleysche Kurve der kubischen Polare dieses Punktes bez. der c_4. Ihre Gleichungen sind, wenn die Gleichung der c_4 in der symbolischen Form $a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = 0$ angenommen wird (Ciani, *Ann. di mat.* (2) **20**, 257 (1892)),

$$(abc)^2 a_x b_x c_x a_y b_y c_y = 0, \quad (abc)(abu)(acu)(bcu) a_y b_y c_y = 0.$$

Sieht man in der letzteren Gleichung die u als konstant und die y als veränderlich an, so ergibt sich die Gleichung einer von Clebsch und Caporali betrachteten c_3, welche die Jacobische Kurve des Netzes der gemischten Polaren aller Punktepaare der Geraden u darstellt (vgl. u. § 4).

5. *Konjugierte Vielecke.* Nach der allgemeinen Definition (Kap. XIII, § 5) ist bei einer c_4 als *konjugiertes Viereck* ein Viereck zu bezeichnen, dessen vier Ecken eine zur c_4 apolare, zerfallende Kurve 4. Klasse bilden. Fordert man, daß die vier Punkte in gerader Linie liegen sollen, so ist ihre Enveloppe eine merk-

würdige Kontravariante der c_4, deren Gleichung lautet: $(abu)^4 = 0$ (vgl. u. Nr. 8).

Ein *Fünfeck* heißt zu der c_4 *konjugiert,* wenn alle Vierecke, die man bei Ausschluß einer Ecke des Fünfecks erhält, zu der c_4 konjugiert sind. Die c_4 besitzt ∞^5 konjugierte Fünfecke. Läßt man zwei Ecken fest, so beschreiben die übrigen eine Kurve 5. Ordnung. Es gibt ∞^1 Punktepaare, deren jedes ∞^2 konjugierten Fünfecken gemeinsam ist, diese Punktepaare beschreiben die kovariante Kurve S (Nr. 7). Es gibt ∞^1 konjugierte Fünfecke, die zu der c_4 konjugiert und ihrer kovarianten Kurve S einbeschrieben sind; jeder Punkt von S ist gemeinsame Ecke von 18 solchen Fünfecken. Vgl. über diesen Gegenstand der Reihe nach die Arbeiten: Rosanes, *J. f. math.* **76**, 323 (1873), Scorza, *Ann. di mat.* (3) **2**, 155 (1899), Manfredini, *Giorn. di mat.* **40**, 16 (1902).

6. *Polare Vielseite.* Interessanter und ausgedehnter ist die Theorie der polaren Vielseite. Man vgl. die bereits zitierte Arbeit von Scorza, *Ann. di Mat.* (3) **2**, 155 (1899), welche die wichtigsten Resultate zusammenfaßt. Bei den Kurven 4. Ordnung sind nur die polaren Vielseite von Interesse, bei denen die Zahl der Seiten < 12 ist. Sie kann nicht unter 6 sinken, ohne daß die Kurve aufhört allgemein zu sein. Fordert man nur, daß die Kurve irreduzibel sein soll, so kann die Seitenzahl bis auf 3 sinken.

Es gibt bei einer allgemeinen c_4 ∞^{18} polare Elfseite, ∞^{15} Zehnseite, ∞^{12} Neunseite, ∞^9 Achtseite, so daß vier willkürlich angenommene Gerade zu ∞^1 solchen Achtseiten gehören, ferner ∞^6 polare Siebenseite, so daß drei willkürlich angenommene Gerade zu einem einzigen solchen Siebenseit gehören, und endlich ∞^3 polare Sechsseite. Unter den Siebenseiten sind ∞^2, die aus den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks und einer weiteren Geraden bestehen, unter den Sechsseiten gibt es ∞^2, von denen drei Seiten in einem Punkte zusammentreffen. Vgl. noch Caporali, *Frammenti sulle curve di quarto ordine, Memorie,* p. 348.

§ 3. Invariante Gebilde.

7. *Kovarianten.* Die Theorie der invarianten Gebilde einer c_4 ist von Clebsch in einer klassischen Arbeit, *Journ. f. Math.* **59**, 125 (1861), entwickelt worden. Diese wichtige Arbeit (von der wir sagen können, daß sie die Grundlage von allem in diesem Paragraphen Enthaltenen bildet) enthält indessen ein Versehen, auf

das wir in Nr. 8 noch zu sprechen kommen werden. Clebsch verfolgt in dieser Arbeit, um zu Kovarianten einer algebraischen Kurve zu gelangen, den einfachen Gedanken, daß er das Verschwinden einer Invariante für die r^{te} Polare eines beliebigen Punktes der Ebene fordert. Dies Verfahren wenden wir auf die kubische Polare eines Punktes bez. der c_4 an und gelangen so zu folgenden kovarianten Kurven:

a) Die Kovariante S ist der Ort aller Punkte, für deren kubische Polare die Invariante S verschwindet, d. h. deren kubische Polare eine äquianharmonische Kurve ist. Man findet für die symbolische Gleichung dieser Kovariante:

$$(abc)(abd)(acd)(bcd)a_x b_x c_x d_x = 0,$$

wenn in der Gleichung $f = 0$ der c_4 symbolisch

$$f = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = d_x^4 = e_x^4 = f_x^4$$

gesetzt wird. Die Kovariante S ist sonach eine Kurve 4. Ordnung, und ihre Koeffizienten sind vom 4. Grade in denen von f. Die Hessesche Kurve der kubischen Polare eines Punktes von S zerfällt in drei Gerade, mit anderen Worten, die Kurve S ist der Ort der Punkte, deren Polohessiana ein Dreieck ist, und S ist gleichzeitig der Ort der Ecken aller dieser Dreiecke. Für eine allgemeine c_4 ist S frei von singulären Punkten (Ciani, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **4**, 274 (1895)). Wie Scorza, *Math. Ann.* **52**, 457 (1899), gezeigt hat, läßt sich im allgemeinen eine beliebige c_4 als Kovariante S von 36 anderen Kurven 4. Ordnung ansehen. Es gibt nur eine einzige c_4, die mit ihrer eigenen Kovariante S zusammenfällt (Ciani, *Rend. Circ. M.* **14**, 16 (1900)). Dies ist die sog. *Kleinsche Kurve.*

b) Die Kovariante T ist der Ort aller Punkte, deren kubische Polaren harmonische Kurven sind. Sie ist eine Kurve 6. Ordnung, und man erhält ihre Gleichung, indem man die Invariante T der kubischen Polare eines Punktes x gleich Null setzt, in der symbolischen Gestalt:

$$(abc)(def)^2(abd)(ace)(bcf)a_x b_x c_x d_x e_x f_x = 0.$$

c) Wenn wir schließlich die Diskriminante der kubischen Polare eines Punktes gleich Null setzen und den Punkt somit der Bedingung unterwerfen, daß seine kubische Polare einen Doppelpunkt besitzt, so erhalten wir die *Steinersche Kurve* von c_4 (vgl. Kap. XIII, § 6). Schreiben wir die Gleichungen der beiden vorangehenden Kurven $S = 0$, $T = 0$, so wird die Gleichung der

Steinerschen Kurve $S^3 - 6T^2 = 0$. Sie ist von der 12. Ordnung und besitzt 21 Doppelpunkte mit getrennten Tangenten; die kubischen Polaren dieser 21 Punkte zerfallen in eine Gerade und einen Kegelschnitt. Die Kurve besitzt außerdem 24 Spitzen; es sind dies die Pole der 24 mit einer Spitze behafteten kubischen Polaren und die Schnittpunkte der beiden Kurven $S = 0$ und $T = 0$.

d) Von anderen Kovarianten wollen wir nur noch die *Hessesche Kurve* erwähnen, deren Gleichung in symbolischer Form lautet:

$$(abc)a_x^2 b_x^2 c_x^2 = 0;$$

sie schneidet die c_4 in ihren 24 Wendepunkten.

8. *Kontravarianten.* Wendet man das bekannte *Übertragungsprinzip von Clebsch* auf die Invarianten einer biquadratischen Binärform an, so gelangt man zu folgenden Kontravarianten einer c_4:

a) Die *äquianharmonische Kontravariante* ist die Einhüllende der Geraden, welche die c_4 in äquianharmonischen Punktquadrupeln schneiden. Ihre Gleichung ist die schon oben (Nr. 5) erwähnte

$$(abu)^4 = 0,$$

ihre Tangenten schneiden also konjugierte Punktquadrupel aus der Kurve aus. Sie ist von der 4. Klasse und vom *zweiten* (d. h. vom niedrigst möglichen) Grade in den Koeffizienten von f.

b) Die *harmonische Kontravariante* ist die Einhüllende der Geraden, welche die c_4 in vier harmonischen Punkten schneiden. Ihre Gleichung lautet:

$$(abu)^2(acu)^2(bcu)^2 = 0,$$

sie ist also von der 6. Klasse und vom *dritten* Grade in den Koeffizienten von f.

c) Schreibt man die Gleichungen der beiden vorstehenden Kontravarianten: $P = 0$, $Q = 0$, so ergibt sich eine dritte Kontravariante in der Form:

$$P^3 - 6Q^2 = 0.$$

Dies ist nichts anderes wie die Gleichung der c_4 in Linienkoordinaten. Die 24 gemeinsamen Tangenten von $P = 0$, $Q = 0$ sind die 24 Wendetangenten von c_4. Über die Kurven P, Q vgl. Jeffery, *Bull. Soc. M.* **17**, 176 (1889), *Quart. J.* **24**, 250 (1890).

An weiteren kontravarianten Kurven nennen wir die folgenden:

d) Die *Cayleysche Kurve* φ (Kap. XIII, § 6), welche von den Verbindungslinien entsprechender Punkte der Hesseschen und der Steinerschen Kurve umhüllt wird, ist hier eine Kurve von der 18. Klasse mit 21 vierfachen Tangenten, und diese 21 Linien bilden jede den geraden Bestandteil einer der 21 zerfallenden kubischen Polaren (Bertini, *Torino Atti* **32**, 32 (1896), Laguerre, *C. R.* 1884, *Œuvres* II, 221 (1905), Kohn, *Wien. Ber.* **95**^{2}, 318 (1887)).

e) Die *Clebschsche Kurve* ψ ist von der 6. Klasse und wird von den in 3 Gerade zerfallenden Polohessianen umhüllt. Clebsch glaubte ihre Identität mit der harmonischen Kurve nachgewiesen zu haben, aber sein Beweis ist irrig, vgl. Ciani, *Ann. di mat.* p. 257 (1892).

f) Zwischen den Punkten der Kurve S kann man eine Korrespondenz herstellen, indem man immer zwei Punkte einander entsprechen läßt, von denen jeder eine Ecke des seine Polohessiana bildenden Dreiecks bildet. So gelangt man zur Betrachtung der Enveloppe aller Geraden, welche je zwei korrespondierende Punkte der Kurve S verbinden. Dies ist eine kontravariante Kurve χ von der 12. Klasse, deren charakteristische Plückersche Zahlen denen der Steinerschen Kurve dual entsprechen (Ciani, *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **4**, 274 (1895)).

g) Die *Kontravariante* Ω von Clebsch wird umhüllt von allen Geraden, welche ihre eigene konische Antipolare (s. Nr. 4) berühren. Sie ist von der 4. Klasse und vom *fünften* Grade in den Koeffizienten von f. Diese Kontravariante und die äquianharmonische bilden die bemerkenswertesten Kontravarianten 4. Klasse der c_4.

9. *Invarianten.* Vom geometrischen Standpunkte sind zwei Invarianten der c_4 besonders wichtig. Die erste ist die Invariante dritten Grades

$$A = (abc)^4.$$

Ihr Verschwinden ist die Bedingung dafür, daß die c_4 zu ihrer äquianharmonischen Kontravariante apolar ist. Mit Hilfe dieser Invariante lassen sich alle Kovarianten vierten Grades von f in der Form darstellen $S + \lambda Af$, wo λ von den Koeffizienten der biquadratischen Ternärform f unabhängig ist (Maisano, *Giorn. di mat.* **19**, 198 (1881)).

Die zweite Invariante ist vom 6. Grade und wird, wenn man $f = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a_{ijkl} x_i x_j x_k x_l$ annimmt, in nicht symbolischer Gestalt durch die folgende Determinante gegeben:

$$B = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1123} & a_{1131} & a_{1112} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & a_{2223} & a_{2231} & a_{2212} \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & a_{3323} & a_{3331} & a_{3312} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2333} & a_{2323} & a_{2331} & a_{2312} \\ a_{3111} & a_{3122} & a_{3133} & a_{3123} & a_{3131} & a_{3112} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1233} & a_{1223} & a_{1231} & a_{1212} \end{vmatrix}.$$

Beachtet man, daß diese Determinante symmetrisch ist, so erkennt man sofort, daß sie die Determinante folgender quadratischer Form von sechs Variabeln ist:

$$\begin{aligned} &a_{1111}x_1^2 + a_{2222}x_2^2 + a_{3333}x_3^2 + a_{2323}x_4^2 + a_{3131}x_5^2 + a_{1212}x_6^2 \\ &+ 2a_{1122}x_1x_2 + 2a_{1133}x_1x_3 + 2a_{1123}x_1x_4 + 2a_{1131}x_1x_5 + 2a_{1112}x_1x_6 \\ &+ 2a_{2233}x_2x_3 + 2a_{2223}x_2x_4 + 2a_{2231}x_2x_5 + 2a_{2212}x_2x_6 \\ &+ 2a_{3323}x_3x_4 + 2a_{3331}x_3x_5 + 2a_{3312}x_3x_6 \\ &+ 2a_{2331}x_4x_5 + 2a_{2312}x_4x_6 + 2a_{3112}x_5x_6. \end{aligned}$$

Durch das Verschwinden dieser quadratischen Form wird in einem Raume von 5 Dimensionen eine quadratische Überfläche dargestellt, die eine polare Beziehung zwischen den Punkten und Überebenen dieses Überraumes vermittelt. Jedem Punkte des Überraumes kann man aber einer Kurve 2. Ordnung in der Ebene η der c_4 entsprechen lassen und jeder Überebene eine Kurve 2. Klasse in der Ebene η, die zu allen, den Punkten der Überebene entsprechenden Kurven 2. Ordnung apolar ist. Die Beziehung, die man so zwischen den Kurven 2. Klasse und den Kurven 2. Ordnung der Ebene η erhält, ist keine andere als die durch die c_4 vermittelte (s. Nr. 4). Die polare Beziehung zwischen den Punkten und Überebenen des Überraumes artet aber aus, wenn die Determinante B der obenstehenden quadratischen Form verschwindet.

Das Verschwinden der in Rede stehenden Invariante B hat demnach zur Folge, daß das durch die c_4 vermittelte eindeutige Entsprechen von Kurven 2. Klasse und Kurven 2. Ordnung aufhört zu bestehen.

Die Bedingungen für das Zerfallen einer c_4 sind in der Preisschrift der Akademie zu Neapel von E. Pascal, *Napoli Atti* (2) **12**, 1 (Dez. 1905) ausführlich behandelt.

§ 4. Die einhüllenden Systeme von Kegelschnitten und Kurven dritter Ordnung.

10. *Kegelschnittsysteme.* Eine allgemeine c_4 (vgl. Plücker, *Alg. Kurven,* S. 228 (Bonn 1839)) läßt sich als die Umhüllende von 63 quadratischen Kegelschnittreihen, d. h. Systemen von ∞^1 Kegelschnitten ansehen. Die Gleichung einer solchen Kegelschnittreihe ist von der Form

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0,$$

wenn $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ die Gleichungen dreier Kegelschnitte sind und λ einen veränderlichen Parameter bedeutet. Zu der Reihe gehören die Kegelschnitte U, W, aber nicht V. Die Gleichung der c_4 ist dann von der Form

$$UW - V^2 = 0,$$

woraus hervorgeht, daß die acht Berührungspunkte von U und W mit der c_4 auf dem Kegelschnitt V liegen. So ergibt sich als die notwendige und hinreichende Bedingung, damit zwei einhüllende Kegelschnitte zu derselben Reihe gehören, die, daß ihre acht Berührungspunkte mit der c_4 auf einem neuen Kegelschnitt liegen. In einer und derselben Reihe sind sechs zerfallende Kegelschnitte enthalten, welche sechs Paare von Doppeltangenten der c_4 bilden.

Jede Kegelschnittreihe ist in einem (linearen) Kegelschnittnetz enthalten, dieses wird jedesmal durch eine Gleichung

$$\xi U + \eta V + W = 0$$

dargestellt, in der man ξ, η als variable Parameter anzusehen hat. Nun ist bekannt, daß ein Kegelschnittnetz sich immer als das Netz der ersten Polaren einer Kurve 3. Ordnung auffassen läßt: wir wollen mit ψ eine solche Kurve für das vorliegende Netz bezeichnen, dabei lassen sich ξ, η als projektive, inhomogene Koordinaten des Pols der konischen Polare ansehen. Da man für $\xi = \lambda^2$, $\eta = 2\lambda$ die Kegelschnitte der in dem Netz enthaltenen quadratischen Reihe erhält, gibt es einen Kegelschnitt Φ mit der Gleichung $4\xi - \eta^2 = 0$, dessen Punkten die Kegelschnitte der Reihe als erste Polaren zugeordnet sind. Die c_4 läßt sich also als die Umhüllende der ersten Polaren aller Punkte von Φ bez. ψ gewinnen, oder auch als Ort eines Punktes, dessen gerade Polare bez. ψ den Kegelschnitt Φ berührt, oder endlich als der Ort der Pole aller Tangenten von Φ bez. ψ; auf diese letzte Art gelangt man zu der bereits in Nr. 3 gegebenen Erzeugung der c_4. Man kann noch hinzufügen, daß, wenn γ_1, γ_2

zwei Kegelschnitte der Reihe sind und zwar die Polaren zweier Punkte C_1, C_2 von Φ, der Kegelschnitt, der durch ihre acht Berührungspunkte mit der c_4 geht, die Polare des Schnittpunktes der in C_1, C_2 an Φ gelegten Tangenten bez. ψ ist. Die Kurven Φ und ψ heißen *Leitkurven* und die Kegelschnitte der Reihe *erzeugende* Kegelschnitte der c_4.

Man kann auch einen ähnlichen Gedankengang verfolgen, indem man von dem Satze ausgeht: „Die konischen Polaren der Punkte einer Geraden g bez. einer allgemeinen Kurve 4. Ordnung Γ umhüllen eine andere allgemeine c_4", und auf diese Weise aus einer c_4 eine andere c_4 ableiten. Man kann auf Grund dieser Erzeugung leicht den Satz beweisen, daß die sechs Punkte der Steinerschen Kurve, die sechs in gerader Linie liegenden Punkten der Hesseschen Kurve entsprechen, immer einem Kegelschnitte angehören. Die Linien g und Γ können auch hier als *Leitlinien* der in der angegebenen Art erzeugten c_4 bezeichnet werden. Man kann die gerade Leitlinie beliebig annehmen, die zugehörigen Leitkurven 4. Ordnung bilden dann ein zweifach unendliches lineares System, aus dem vier Kurven die zugehörige gerade Leitlinie dreipunktig berühren. Man kann hinzufügen, daß die Hesseschen Kurven der Leitkurven 4. Ordnung die Grundkurve c_4 umhüllen. Des näheren vgl. man Kohn, *J. f. Math.* **107**, 5 (1891), *Monatsh. f. Math.* **1**, 100 (1890), Ciani, *Ist. Lomb. Rend.* (2) **28**, 659 (1895).

11. *Systeme von Kurven 3. Ordnung.* Es gibt 64 dreifach unendliche Systeme von Kurven 3. Ordnung, die eine gegebene c_4 einhüllen, d. h. sie sechspunktig berühren (Hesse, *J. f. Math.* **49**, 243 (1855), Clebsch, *Math. Ann.* **3**, 45 (1871)). Sie zerfallen in zwei Gattungen. Die Systeme der ersten Gattung sind an Zahl 36 und enthalten je ein System von ∞^1 in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallenden c_3, bei jeder von diesen berührt die Gerade einmal, der Kegelschnitt dreimal die c_4 und geht außerdem durch die zwei letzten Schnittpunkte der Geraden mit der c_4 hindurch. Bei der räumlichen Darstellung von Hesse (s. u. Nr. 13) kann man irgendeines dieser Systeme der Gesamtheit aller Punkte des Raumes entsprechen lassen.

Die Systeme einhüllender c_3 der zweiten Gattung sind an Zahl 28 und werden durch je eine Doppeltangente der c_4 festgelegt. Wenn diese Doppeltangente die Seite $x_1 = 0$ des Koordinatendreiecks bildet, so kann man die Gleichung der c_4 schreiben:

$$x_1 \varphi_3 = \varphi_2^2,$$

wobei dann $\varphi_3 = 0$ die Gleichung einer der kubischen Berührungskurven wird, die zu dem durch die Doppeltangente bestimmten System gehören. $\varphi_2 = 0$ ist die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die Berührungspunkte der Doppeltangente geht und auf dem außerdem die sechs Berührungspunkte der Kurve $\varphi_3 = 0$ liegen. Die zwölf Berührungspunkte zweier Berührungskurven eines und desselben Systems, sei es von der ersten oder zweiten Gattung, liegen immer wieder auf einer Kurve 3. Ordnung. In jedem System von Berührungskurven sind 64 enthalten, welche die c_4 vierpunktig berühren.

Zwei Kurven 3. Ordnung gehören zu demselben System 1. oder 2. Gattung, je nachdem sie einen gemeinsamen dreifach berührenden Kegelschnitt oder drei in gerader Linie liegende Schnittpunkte besitzen (Rosati, *Giorn. di mat.* **38**, 165 (1900)).

§ 5. Die Konfiguration der Doppeltangenten.

12. *Steiner-Plückersche Methode.* Die Konfiguration der Doppeltangenten einer c_4 ist zuerst von Steiner und Plücker ausgehend von den 63 einhüllenden Kegelschnittreihen, die oben bereits Erwähnung fanden, untersucht worden. Wie wir sahen, sind in jeder Kegelschnittreihe sechs Paare von Doppeltangenten enthalten. Die sechs Schnittpunkte der einzelnen Paare liegen auf einer Kurve 2. Ordnung, die zu allen Kegelschnitten der Reihe, wenn man diese als Kurven 2. Klasse auffaßt, apolar ist. Man kann sonach sagen, daß die 378 Punkte, in denen sich die Doppeltangenten paarweise durchschneiden, sich zu je 6 auf 63 Kegelschnitte verteilen, zu denen die 63 Kegelschnittreihen apolar sind. Sind $ab = 0$ und $cd = 0$ die Gleichungen zweier Doppeltangentenpaare, die zu derselben Kegelschnittreihe gehören, so läßt sich die letztere in der Form darstellen $\lambda^2 ab + 2\lambda V + cd = 0$, wobei $V = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes ist, der durch die acht Berührungspunkte von a, b, c, d hindurchgeht. Die Gleichung der c_4 ist dann

$$V^2 = abcd.$$

Solcher Kegelschnitte $V = 0$ gibt es 315, und man kann sagen: Die 28 Paare von Berührungspunkten der Doppeltangenten liegen zu je vier auf 315 Kegelschnitten. Vgl. Salmon, *Höhere ebene Kurven* S. 317, Pascal, *Rom Acc. Linc.* (5) **1**, 385 (1892), Noether, *München. Sitzungsber.* **25**, 93 (1895), vorher *Math. Ann.* **15**, 89 (1879). Von den sechs Doppeltangentenpaaren, die zu derselben Kegelschnittreihe gehören, sagt man, sie bilden

eine *Steinersche Gruppe*. Sie berühren eine Kurve 3. Klasse, die Cayleysche Kurve des Netzes, zu dem die Kegelschnittreihe gehört. Dieselbe Kurve wird auch berührt von den übrigen Seiten der sechs vollständigen Vierecke, welche die Berührungspunkte je eines Paares von Doppeltangenten bestimmen, während die Diagonalpunkte dieser Vierecke auf einer bestimmten Kurve 3. Ordnung liegen, welche die Jacobische Kurve des Netzes bildet. Sind $ab = 0$, $cd = 0$, $ef = 0$ drei Paare von Doppeltangenten derselben Steinerschen Gruppe, so läßt sich der Gleichung der c_4 die Form geben:

$$\alpha\sqrt{ab} + \beta\sqrt{cd} + \gamma\sqrt{ef} = 0.$$

Fassen wir zwei Steinersche Gruppen ins Auge, so ergibt sich, daß sie auf zwei wesentlich verschiedene Arten zusammenhängen können, je nachdem sie vier oder sechs Doppeltangenten gemeinsam haben. Im ersteren Falle heißen sie *syzygetisch*, im letzteren Falle *azygetisch* (Frobenius, *J. f. Math.* **103**, 169 (1888)). Sind zwei Gruppen *syzygetisch*, so lassen sich aus den vier gemeinsamen Doppeltangenten zwei Paare der einen und der anderen Gruppe bilden. Z. B. seien die Doppeltangenten der beiden Gruppen:

$$ab,\ cd,\ ef,\ gh,\ ij,\ kl,$$
$$ac,\ bd,\ e'f',\ g'h',\ i'j',\ k'l'.$$

Dann existiert eine dritte zu den beiden ersten syzygetische Gruppe:

$$ad,\ bc,\ e''f'',\ g''h'',\ i''j'',\ k''l'',$$

so daß das Tripel syzygetischer Gruppen zusammen alle Doppeltangenten der c_4 umfaßt. Solcher Tripel gibt es 315. Von zwei *azygetischen* Gruppen dagegen kann man die Paare derart einander zu ordnen, daß je zwei zugeordnete Paare eine Doppeltangente gemein haben, z. B.

$$ab,\ cd,\ ef\ ,\ gh\ ,\ ij\ ,\ kl\ ,$$
$$ae',\ cf',\ ef'',\ gh'',\ ij'',\ kl''.$$

Die nicht gemeinsamen Doppeltangenten bilden dann eine dritte zu den beiden ersten azygetische Steinersche Gruppe:

$$be',\ df',\ ff'',\ hk'',\ jj'',\ ll''.$$

Solcher Tripel paarweise azygetischer Gruppen gibt es 336. Vgl. des weiteren Aronhold, *Berl. Monatsber.* 1864, S. 499, Geiser.

J. f. Math. **72**, 370 (1872), Ameseder, *Wien. Ber.* **85**, 396 (1882), Kohn, *J. f. Math.* **107**, 1 (1890), *Monatsh. f. M.* 1890.

13. *Hessesche Methode.* Die Hessesche Methode (Hesse, *J. f. Math.* **49** (1855), *Werke,* S. 376, Salmon, *Höh. eb. Kurven,* S. 327, Cayley, *J. f. Math.* **68**, 176 (1868), Noether, *Math. Ann.* **15**, 89 (1879), *München Abh.* **17**, 105 (1889)) verknüpft die Theorie der Doppeltangenten einer ebenen c_4 mit raumgeometrischen Betrachtungen, nämlich der Theorie des Bündels von Flächen 2. Ordnung. Sind $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ die Gleichungen dreier solcher Flächen, so wird das Flächenbündel durch die Gleichung $x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 = 0$ gegeben. Die Kegel in dem Bündel sind durch die Werte von x_1, x_2, x_3 bestimmt, welche die Diskriminante der vorstehenden Gleichung zum Verschwinden bringen. Diese Gleichung ist vom vierten Grade und stellt somit, wenn man x_1, x_2, x_3 als homogene Punktkoordinaten in einer Ebene ansieht, eine Kurve 4. Ordnung dar. So gelangt man zu einer ein-eindeutigen Beziehung zwischen dieser c_4 und der Raumkurve 6. Ordnung, welche die Kegelspitzen erfüllen. In der Tat legt jeder Punkt von c_4 ein Wertesystem x_1, x_2, x_3 fest, für das die in Rede stehende Diskriminante verschwindet, und somit einen Kegel in dem Flächenbündel oder auch die Spitze dieses Kegels. Umgekehrt legt auch ein Kegel in dem Flächenbündel (d. h. seine Spitze) ein Wertesystem x_1, x_2, x_3 fest, für das die Diskriminante verschwindet, und mithin einen Punkt von c_4. Eine lineare Beziehung zwischen x_1, x_2, x_3 legt in der Ebene eine Gerade und im Flächenbündel ein Büschel fest; den vier Punkten, in denen die Gerade die Kurve trifft, entsprechen die Spitzen der vier Kegel, die in dem Flächenbüschel enthalten sind. Wird die Gerade in der Ebene zur Doppeltangente, so setzt sich die Basiskurve des Flächenbüschels aus einer Raumkurve 3. Ordnung und einer diese doppelt schneidenden Geraden zusammen, und die Raumkurve 3. Ordnung muß durch sechs der acht Punkte gehen, die alle Flächen des Bündels gemein haben, während die Gerade die beiden letzten Punkte verbindet. So werden die Doppeltangenten der c_4 in eindeutige Beziehung gebracht zu den 28 Verbindungslinien der acht Basispunkte des Flächenbündels. Hieraus ergibt sich auch eine besondere Bezeichnung der Doppeltangenten. Numeriert man die acht Punkte im Raume, so entspricht jede Kombination von zwei der Zahlen 1 bis 8 einer Doppeltangente der c_4. Mit Hilfe dieser Bezeichnung lassen sich folgende Sätze leicht aussprechen:

Die 378 Paare von Doppeltangenten werden durch zwei gleichwertige Typen von Symbolen $(12 \cdot 13)$ usw. und $(12 \cdot 34)$ usw.

dargestellt. Es gibt 1260 Tripel von Doppeltangenten, deren sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Diese Tripel zerfallen bei der angegebenen Bezeichnung in zwei verschiedene Typen: $(12 \cdot 23 \cdot 34)$ usw. und $(12 \cdot 34 \cdot 56)$ usw.

Es gibt 315 Quadrupel von Doppeltangenten, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen (vgl. Nr. 12). Die zugehörigen Symbole sind ebenfalls von zwei verschiedenen Typen: $(12 \cdot 23 \cdot 34 \cdot 41)$ und $(12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78)$. Es gibt 1008 Sextupel von Doppeltangenten, die einen Kegelschnitt berühren und deren Symbole einen der folgenden drei Typen zeigen:

$$(12 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 45 \cdot 56 \cdot 64),\ (12 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38),$$
$$(12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58).$$

Es gibt 5040 Sextupel von Doppeltangenten, die sich paarweise in drei Punkten einer geraden Linie durchschneiden. Diese sind durch einen der folgenden drei Typen charakterisiert:

$$(12 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 14 \cdot 45 \cdot 51),\ (12 \cdot 23 \cdot 34 \cdot 45 \cdot 56 \cdot 61),$$
$$(12 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 67 \cdot 68).$$

14. *Aronholdsche Methode.* Die Aronholdsche Methode (Aronhold, *Berl. Monatsber.* 1864, S. 499, Cayley, ibid. **68**, 176 (1868), Frobenius, *J. f. Math.* **99**, 290 (1886), Kohn, ibid. **107**, 1 (1890), Timerding, *Math. Ann.* **53**, 193 (1900), vgl. Riemann, *Werke,* 2. Aufl. S. 487, Clebsch, *Math. Ann.* **3**, 45 (1871), R. Sturm, *J. f. Math.* **70**, 229 (1869), Godt, *Diss. Göttingen* (1873)) baut sich auf folgenden Bemerkungen auf: Betrachtet man zwei Kurven 3. Klasse γ und γ', die sieben feste Gerade berühren, so haben sie noch zwei weitere Tangenten gemein, deren Schnittpunkt mit P bezeichnet sei. Läßt man γ fest und variiert die Kurve γ', so daß sie immer die sieben festen Geraden berührt, dann durchläuft P eine Tangente r von γ, welche die *Korresiduale* von γ bez. der sieben gegebenen Geraden heißt. Die Gerade r, die γ berührt, schneidet diese Kurve, die von der 6. Ordnung ist, außerdem noch in vier Punkten. In diesen vier Punkten und in keinen anderen wird γ von je einer anderen Kurve 3. Klasse mit denselben sieben festen Tangenten berührt. So ergibt sich, daß der Ort der Berührungspunkte zweier Kurven 3. Klasse dieses Systems eine Kurve 4. Ordnung ist, und zwar ist dies eine allgemeine solche Kurve, welche die sieben festgegebenen Geraden zu Doppeltangenten hat. Um die übrigen 21 Doppeltangenten zu bestimmen, hat man die 21 Kurven 3. Klasse

des Systems zu suchen, die in einen Kegelschnitt und einen Punkt zerfallen. Der erstere muß fünf von den sieben gegebenen Geraden berühren und in dem letzteren schneiden sich die beiden übrigbleibenden. Die korresidualen Geraden zu diesen 21 zerfallenden Kurven sind die gesuchten Doppeltangenten. Zu beachten ist, daß die Konstruktion dieser letzteren sich linear ausführen läßt.

Die sieben Geraden, welche den Ausgangspunkt bilden, stellen eine besondere Gruppe von Doppeltangenten, ein sog. *Aronholdsches vollständiges System* dar. Sie ist von der Art, daß die sechs Berührungspunkte von irgenddrei unter ihnen nie auf einem Kegelschnitte liegen. Die Gesamtzahl solcher Systeme beträgt 288; 72 unter ihnen enthalten eine und 16 zwei gegebene Doppeltangenten.

15. *Methode von Geiser* (*Math. Ann.* **1**, 129 (1869), vgl. Zeuthen *ebenda* **8**, 1 (1875)). Geiser benutzt die Bemerkung, daß der Tangentialkegel, der an eine Fläche 3. Ordnung von einem ihrer Punkte P gelegt wird, von der 4. Ordnung ist und sein Schnitt mit einer beliebigen Ebene eine allgemeine c_4 bildet. Deren 28 Doppeltangenten gehen hervor aus dem Schnitt der Ebene mit der Tangentialebene der Fläche 3. Ordnung in der Kegelspitze P und mit den Ebenen, welche aus P die 27 Geraden der Fläche projizieren. So gelangt man zu einer Verknüpfung der Doppeltangenten einer c_4 mit den 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung und kann die Eigenschaften der letzteren auf die ersteren übertragen.

16. *Methode von De Paolis.* De Paolis (*Rom. Acc. Linc. Mem.* (3) **2**, 152 (1878), vgl. Noether, *Erlanger Ber.* **10**, 81 (1878), *Münch. Abh.* **17**, 105 (1889)) behandelte die c_4 als Übergangskurve bei einer doppeldeutigen ebenen Transformation von der Ordnung 3 und dem Geschlecht 1 und gelangte auf diese Weise zu fast allen vorher bekannten Eigenschaften der Doppeltangenten. Bemerkenswert ist die Einfachheit, mit der sich auf diesem Wege die Gleichungen aller 28 Doppeltangenten finden lassen.

17. *Methode der Charakteristiken.* E. Pascal (*Ann. di Mat.* **20**, 163, 269 (1893), **21**, 85 (1893)) hat sich für die Untersuchung der Doppeltangenten einer Darstellung derselben durch die sog. ungeraden *Charakteristiken* für das Geschlecht 3 bedient. Jede Doppeltangente wird durch ein Symbol

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ i_1 & j_1 & k_1 \end{pmatrix}$$

dargestellt, wobei i, j, k, i_1, j_1, k_1 die Zahlen 0 oder 1 bedeuten und die Summe

$$ii_1 + jj_1 + kk_1$$

eine ungerade Zahl (1 oder 3) ist. Bei dieser Darstellung werden z. B. vier Doppeltangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, durch vier Charakteristiken dargestellt, bei denen die an derselben Stelle stehenden Elemente eine gerade Summe (0 oder 2) ergeben. Für diese Theorie vgl. weiter Noether, *München Abh.* **17**, 105 (1879), *Math. Ann.* **28**, 354 (1886), Riemann, *Werke*, 2. Aufl. S. 487.

18. *Untersuchung der Doppeltangenten mit Hilfe der Kummerschen Konfiguration.* Kummer hatte bereits bemerkt (*Berl. Monatsber.* 1864), daß durch eine allgemeine ebene c_4 ∞^4 von den nach ihm benannten Flächen 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und 16 singulären (die Flächen längs eines Kegelschnittes berührenden) Tangentialebenen hindurchgehen. Diese 16 Tangentialebenen schneiden jedesmal 16 Doppeltangenten der c_4 aus, so daß die 12 übrigen Doppeltangenten eine Steinersche Gruppe bilden. Auf diesem Wege ist die Theorie der Doppeltangenten von Ciani entwickelt worden, *Ann. di mat.* (3) **2**, 53 (1897). Die 16 Doppeltangenten, die nach Ausschluß einer Steinerschen Gruppe von den 28 Doppeltangenten der c_4 übrig bleiben und auf die angegebene Weise aus den Ebenen einer *Kummerschen Konfiguration* gewonnen werden können, wird als *Kummersche Gruppe* bezeichnet. Die 16 Doppeltangenten einer Kummerschen Gruppe berühren zu je sechs 16 Kegelschnitte. Es ergibt sich ferner, daß die Punkte r, in denen sich je zwei Doppeltangenten einer Kummerschen Gruppe schneiden, zu je dreien auf 240 Geraden π liegen, und diese Geraden gehen ihrerseits zu je dreien durch 1280 Punkte hindurch. 320 von diesen Punkten erhält man auf folgende Weise: Die 6 Punkte, in denen sich die Doppeltangentenpaare der zu der Kummerschen Gruppe komplementären Steinerschen Gruppe schneiden, bestimmen ein vollständiges Sechseck. Auf jeder Seite desselben wird durch ihre Schnittpunkte mit den Paaren von Gegenseiten des vollständigen Vierecks, das die vier nicht auf ihr liegenden Ecken des Sechsecks bilden, eine Punktinvolution bestimmt, deren Doppelpunkte wir als Punkte M bezeichnen. Die 30 Punkte M, die man so bekommt, liegen zu je dreien auf 60 Geraden m, aus denen sich 15 Vierseite mit Ecken M bilden lassen. Die 60 Geraden m gehen ihrerseits zu je dreien durch 320 Punkte s hindurch, und dies sind die gesuchten Punkte.

Fassen wir die 63 existierenden Kummerschen Gruppen zusammen, so können wir sagen: Die 378 Punkte, in denen sich die 28 Doppeltangenten paarweise durchschneiden, liegen zu je dreien auf 5040 Geraden π, die zu je dreien durch 6720 Punkte s und 60480 Punkte k gehen. Jede Gerade π enthält vier Punkte s und 36 Punkte k. Die 6720 Punkte s liegen zu je vieren auf 15120 Geraden σ. Die 60480 Punkte k liegen zu je dreien auf 20160 Geraden c, die zu je dreien durch die 6720 Punkte s und zu je vieren durch 15120 Punkte i gehen.

Von den Schnittpunkten je zweier Doppeltangenten liegen 2835mal acht auf einem Kegelschnitt und dieser Kegelschnitt geht jedesmal auch durch acht der oben gefundenen Punkte M hindurch.

Eine zusammenfassende Darstellung der Resultate über die Konfiguration der Doppelpunkte hat Timerding gegeben (*J. f. Math.* **122**, 209 (1900)). Man vergleiche, was den algebraischen Charakter des Problems betrifft, auch den betreffenden Abschnitt im 2. Bande von H. Webers *Algebra* (2. Aufl. Braunschweig 1900).

Kapitel XIX.

Projektive Spezialisierungen von Kurven vierter und dritter Ordnung.

Von *E. Ciani* in Genua und *H. Wieleitner* in Pirmasens.

§ 1. Die selbstprojektiven Kurven vierter Ordnung.

Gibt es wenigstens eine periodische Kollineation, durch die eine Kurve 4. Ordnung in sich selbst übergeführt wird, so heißt die Kurve *selbstprojektiv*.

Das Problem der hiezu nötigen Bedingungen löste für eine Kollineation S. Kantor (*Act. math.* **19**, 115 (1895)). Sind mehrere Kollineationen möglich, für die eine Kurve 4. Ordnung invariant bleibt, so entsteht die Frage nach der Gruppe all dieser Kollineationen, die für nichtsinguläre Kurven von A. Wiman beantwortet wurde (*Svensk. Akad. Bihang* **21**, Nr. 3 (1895)). Beider Resultate lassen sich in folgender Form zusammenfassen, wo die singulären Kurven inbegriffen sind (vgl. E. Ciani, *Rend. Ist. Lomb.* (2) **33**, 1170 (1900)).

Die endlichen projektiv verschiedenen Gruppen ebener periodischer Kollineationen mit invarianten irreduziblen Kurven 4. Ordnung sind (zusammen natürlich mit ihren Untergruppen) diese:

a) Die Gruppe G_{168} von der Ordnung 168, die als Invariante die Kleinsche Kurve 4. Ordnung hat mit der Gleichung (s. Klein, *Math. Ann.* **14**, 428 (1879))

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0. \tag{1}$$

b) Die Gruppe G_{96} der Ordnung 96 mit der Dyckschen Kurve 4. Ordnung als Invariante. Die Gleichung der letzteren ist (s. Dyck, *Math. Ann.* **17**, 473, 510 (1880))

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0. \tag{2}$$

c) Die Gruppe G_{48} der Ordnung 48 der spezialisierten Caporalischen Kurve 4. Ordnung, die die Gleichung hat

$$x_3^4 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

wo φ eine äquianharmonische binäre biquadratische Form ist.

d) Die Gruppe G_{16} der Kurve mit der Gleichung

$$x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0. \tag{3}$$

Diese Gruppe kann durch die Substitutionen dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} \alpha^3 x_1 & \alpha x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^r; \quad \begin{pmatrix} \alpha^3 x_1 & \alpha x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^r \cdot \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

wo $r = 1, 2, \ldots . 8$ und α eine primitive achte Wurzel der Einheit ist.

e) Die Gruppen, die gebildet werden durch die Potenzen derselben Kollineation, sofern sie nicht unter den schon angeführten enthalten sind. Diese sind die folgenden:

Die Gruppe G_5, die bestimmt wird durch die Kollineation

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad (\alpha^5 = 1)$$

und den beiden Kurven angehört:

$$x_2^2 x_1 x_3 + x_2 x_1^3 + x_3^4 = 0; \; x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 = 0; \tag{4}$$

die Gruppe G_6, die bestimmt wird durch die Kollineation

$$\begin{pmatrix} \alpha^5 x_1 & \alpha x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

(wo α sechste primitive Einheitswurzel ist) und zu der Kurve gehört:

$$x_3^2 x_1^2 + x_1^3 x_2 + x_2^4 = 0; \tag{5}$$

die Gruppe G_9, die bestimmt wird durch die Kollineation

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^4 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

wo α primitive neunte Einheitswurzel ist. Die bezügliche Kurve 4. Ordnung hat die Gleichung

$$x_3^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^4 = 0. \tag{6}$$

E. Ciani (*Rend. Circ. mat. Palermo* **13**, 347 (1899)) untersuchte, wann die vorkommenden Kollineationen Zentralkollineationen sind. Es ist bemerkenswert, daß solche immer involutorisch sind mit Ausnahme der Fälle $x_1^4 + \varphi(x_2, x_3) = 0$ und $x_1^3 x_2 + \varphi(x_2, x_3) = 0$, wo φ eine binäre biquadratische Form in

x_2, x_3 ist. Hier haben die Kollineationen die Periode 4 bzw. 3. Der Fall orthogonaler Symmetrie ist bei E. Ciani (*Ann. Sc. norm. Pisa* **6**, 1 (1889)) behandelt. Das Zentrum der Perspektivität ist in jedem Falle ein Doppelpunkt der Steinerschen Kurve. Es gibt acht verschiedene Fälle mit je 1, 3, 5, 7, 9, 15 (Dycksche Kurve) oder 21 (Kleinsche Kurve) Zentralkollineationen.

Im letzteren Falle sind alle 21 Doppelpunkte der Steinerschen Kurve (s. oben S. 402) Perspektivitätszentren. Über diese Kurve sehe man Klein-Fricke, *Vorlesungen üb. d. Theorie der ellipt. Modulfunkt.*, Leipzig 1892, Bd. II, S. 675f.; H. Weber, *Lehrb. d. Algebra*, Braunschweig 1899, Bd. II, S. 466; Brioschi, *Rend. Acc. Lincei* (3) **8**, 164 (1884); Ciani, *Rend. Circ. mat. Palermo* **13**, 347 (1899) u. *Ann. di mat.* (3) **5**, 33 (1901). *Ihre geometrische Charakterisierung erhält die Kleinsche Kurve durch die Eigenschaft, daß immer drei Wendepunkte ein Dreieck bilden, dessen Seiten Wendetangenten je in der nächsten Ecke sind.* Solcher Dreiecke gibt es acht, gemäß der Anzahl 24 der Wendepunkte, die sich ergibt, da die Kurve vom Geschlecht 3 ist.

Ihre Gruppe G_{168} findet eine einfache Darstellung, wenn man von einer ihrer oktaedrischen Untergruppen ausgeht. Es stelle das Schema

$$\begin{pmatrix} \pm x_i & \pm x_h & \pm x_k \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

wo i, h, k eine beliebige Permutation von 1, 2, 3 bilden, die Gesamtheit aller Oktaedergruppen dar. Die zugehörigen invarianten Kurven 4. Ordnung sind alle in dem Büschel

$$\sum x_i^4 + 6\lambda \sum x_i^2 x_k^2 = 0 \tag{7}$$

enthalten. Man erhält nun die Gruppe G_{168}, wenn man der vorstehenden Oktaedergruppe die Kollineation adjungiert:

$$\begin{Bmatrix} \mu(x_2 - x_1) + 2x_3 & \mu(x_1 - x_2) + 2x_3 & \mu^2(x_1 + x_2) \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{Bmatrix},$$

wo $\mu = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{7})$. In dem Büschel ergeben sich dann zwei Kleinsche Kurven für $\lambda = \frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{7})$.

Die Kleinsche Kurve 4. Ordnung fällt außerdem mit ihrer Kovariante S zusammen (s. oben S. 402). Die anderen 35 Kurven 4. Ordnung mit derselben Kovariante S scheiden sich in zwei Familien. Ihrer 14 sind invariant in bezug auf je eine der oktaedrischen Untergruppen von G_{168}, die anderen 21 sind es in bezug auf je eine der Untergruppen G_8. *Die Wendepunkte der Klein-*

schen Kurve liegen zu 8 auf 147 und zu 6 auf anderen 112 Kegelschnitten, welch letztere die Kurve je in den Berührungspunkten derselben Doppeltangente berühren.

Die Gruppe G_{96} der Dyckschen Kurve 4. Ordnung wird dargestellt durch alle Substitutionen des Typus

$$\begin{pmatrix} \alpha x_i & \beta x_k & \gamma x_h \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

wo durch i, k, h wieder eine beliebige Permutation von 1, 2, 3 angedeutet ist und α, β, γ alle möglichen vierten Einheitswurzeln darstellen. Die Kurve, wie die vorige vom Geschlechte 3, ist charakterisiert durch die Existenz eines Polardreiseits (s. oben S. 401), in bezug auf welches sie die angegebene Gleichung hat. *Sie hat ferner zwölf Flachpunkte, die sich in vier harmonischen Quadrupeln auf die drei Seiten des Fundamentaldreiecks verteilen.* Die Kovariante S ist unbestimmt. Die Kovariante T und die Hessesche Kurve (s. oben S. 402) bestehen aus dem doppelt gezählten Fundamentaldreiseit. Die Steinersche Kurve reduziert sich auf das nämliche, viermal zu zählende Dreiseit. Man vergleiche noch Cayley, *Collected Papers* X, 603; Masoni, *Nap. Rend.* **21**, 45 (1882); Scorza, *Ann. di mat.* (3) **2**, 155 (1899).

§ 2. Andere bemerkenswerte Kurven vierter Ordnung vom Geschlechte 3.

Besitzt eine Kurve 4. Ordnung ein Polarfünfseit (vgl. oben S. 401), so besitzt sie deren ∞^1, die alle einem in Hinsicht auf die Kurve apolaren Kegelschnitt (d. h. einer Kurve 2. Klasse, deren Polarkegelschnitt unbestimmt ist) umbeschrieben und der Kovariante S einbeschrieben sind. Solche Kurven werden *Clebschsche Kurven 4. Ordnung* genannt (s. Clebsch, *Journ. f. Math.* **59**, 125 (1861)) und sind außerdem durch das Verschwinden der Invariante sechsten Grades (mit der Charakteristik 5) gekennzeichnet. Die Kovariante S ist selbst eine spezialisierte Kurve 4. Ordnung und wird nach Lüroth benannt (s. *Math. Ann.* **1**, 37 (1869); Weyr, *Wien. Ber.* **81**, 80 (1880)). *Eine Lürothsche Kurve ist also dadurch charakterisiert, daß sich ihr ∞^1 vollständige Fünfseite einschreiben lassen.* Für eine Clebschsche Kurve fallen die 24 Spitzentangenten der 24 Polarkurven 3. Ordnung zu je dreien mit den acht Tangenten an den apolaren Kegelschnitt zusammen, die dieser in seinen Schnittpunkten mit der Kovariante S hat. Die zugehörigen 24 Pole, das sind die 24 Spitzen der Steiner-

schen Kurve (s. oben S. 402), bilden acht Dreiecke, die zugleich dem apolaren Kegelschnitt und der Kovariante S umbeschrieben sind. Sie liegen außerdem zu je dreien auf den acht erwähnten Tangenten. Damit eine Kurve 4. Ordnung von der Clebschschen Art sei, ist auch notwendig und hinreichend die Bedingung, daß ihre Kovariante S und ihre äquianharmonische Einhüllende zwei zu einander harmonische oder apolare Kurven seien (vgl. Scorza, *Ann. di mat.* **3** (2), 155 (1899) und Grassi, *Giorn. d. mat.* **38**, 244 (1900)).

Eine andere ausgezeichnete Kurve 4. Ordnung vom Geschlechte 3 ist die *Caporalische Kurve* (s. Caporali, *Mem. di geom.*, p. 204, 336, 340, 349 und *Ann. di mat.* (2) **20**, 237 (1892); Ciani, *Atti R. Acc. Nap.* (3) **2**, 126 (1896)). Sie ist definierbar als Jacobische Kurve einer Geraden r und eines syzygetischen Büschels φ von Kurven 3. Ordnung. Ist $r \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ und $\varphi \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \lambda x_1 x_2 x_3 = 0$, so gibt es noch eine zweite Erzeugung mittels einer Geraden

$$r' \equiv u_1 x_1 (u_2^3 - u_3^3) + u_2 x_2 (u_3^3 - u_1^3) + u_3 x_3 (u_1^3 - u_2^3) = 0$$

und eines syzygetischen Büschels

$$\begin{aligned}\varphi' \equiv\ & x_1^3 (u_3^3 - u_2^3) + x_2^3 (u_1^3 - u_3^3) + x_3^3 (u_2^3 - u_1^3) \\ & + 3 u_2 u_3 x_2 x_3 (u_2 x_2 - u_3 x_3) + 3 u_3 u_1 x_3 x_1 (u_3 x_3 - u_1 x_1) \\ & + 3 u_1 u_2 x_1 x_2 (u_1 x_1 - u_2 x_2) + \lambda [u_2 u_3 x_1 (u_3 x_2^2 - u_2 x_3^2) \\ & + u_3 u_1 x_2 (u_1 x_3^2 - u_3 x_1^2) + u_1 u_2 x_3 (u_2 x_1^2 - u_1 x_2^2)] = 0.\end{aligned}$$

Die beiden Büschel φ und φ' sind projektiv und erzeugen die Hessesche Kurve der Caporalischen Kurve. *Die Caporalische Kurve hat nun zwölf Wendepunkte in den Ecken der vier syzygetischen Dreiseite von φ und zwölf in den Ecken der vier syzygetischen Dreiseite von φ'.* So ist die Konfiguration der Wendepunkte an die bekannte der Kurven 3. Ordnung angeschlossen (s. oben Kap. XVII), was um so interessanter ist, weil sonst über die Konfiguration der Wendepunkte einer allgemeinen Kurve 4. Ordnung gar nichts bekannt ist. Die Caporalische Kurve besitzt eine Schar von apolaren Kegelschnitten; sie ist harmonisch oder apolar zu ihrer eigenen äquianharmonischen Einhüllenden. Die analytischen Bedingungen hiefür sind das Verschwinden der Invariante sechsten Grades mit der Charakteristik 4 (drei verschiedene Bedingungen) und das Verschwinden der kubischen Invariante (eine weitere Bedingung). Eine andere bemerkenswerte Erzeugung der Caporalischen Kurve ergibt sich aus zwei Reihen

von ∞^1 eingeschriebenen Vierecken, deren Seiten sie harmonisch schneiden, und deren Diagonalpunkte die Hessesche Kurve beschreiben. Die Gleichung der Caporalischen Kurve ist

$$(1) \qquad u_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) + u_2 x_2 (x_3^3 - x_1^3) + u_3 x_3 (x_1^3 - x_2^3) = 0.$$

Betrachtet man hier u_1, u_2, u_3 als Parameter, so stellt die Gleichung ein Netz von Caporalischen Kurven 4. Ordnung dar mit zwölf Basispunkten in den zwölf Ecken der vier zu φ gehörenden Dreiseite. Diese zwölf gemeinsamen Punkte sind außerdem Wendepunkte für jede Kurve des Netzes, das man als syzygetisches Netz bezeichnet. Es stellt sich heraus, daß es andere syzygetische Netze von Kurven 4. Ordnung als das eben besprochene nicht gibt.

Die schon obenerwähnte *spezialisierte Caporalische Kurve* der Gruppe G_{48} entsteht aus der allgemeinen, wenn die Geraden r und r' zusammenfallen. Die gemeinsame Lage von r und r' ist dann mit der von einer der neun harmonischen Polargeraden von φ (und φ') identisch. *Diese spezialisierte Caporalische Kurve ist auch dadurch ausgezeichnet, daß sie vier Flachpunkte in gerader Linie besitzt, die mit den zugehörigen vier Tangenten, die sich in einem Punkte treffen, eine äquianharmonische Gruppe bilden.* Daher läßt sich bei geeigneter Wahl der Bezugselemente ihre Gleichung schreiben

$$(2) \qquad x_3^4 + x_1^4 + 2i\sqrt{3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0.$$

Um die Kollineationen der Gruppe G_{48} zu erhalten, schreiben wir zuerst die an, welche die binäre biquadratische Form x_1, x_2, die einen Bestandteil der obigen Gleichung bildet, in sich überführen. Es ist das eine Tetraedergruppe G_{12}, die man aus der viergliedrigen Gruppe

$$\begin{pmatrix} x_i & x_h \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

wo i, h eine beliebige Permutation von 1, 2 ist, durch Adjunktion der folgenden erhält

$$\begin{pmatrix} -x_1 + ix_2 & x_1 + ix_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Um nun hieraus die ternäre Gruppe G_{48} abzuleiten, adjungiere man der viergliedrigen Gruppe noch x_3, das man in αx_3 verwandele, wo α eine vierte Einheitswurzel ist, und der anderen ebenfalls x_3, das in $x_3 \sqrt[4]{2(1 + i\sqrt{3})}$ übergehen soll. Die Gruppe G_{48}, die so entsteht, ist also meriedrisch isomorph mit der Gruppe

des Tetraeders. *Die außer den vier Flachpunkten noch vorhandenen 16 Wendepunkte verteilen sich in vier harmonischen Quadrupeln auf vier Gerade eines äquianharmonischen Büschels, dessen Zentrum mit dem Schnittpunkt der vier Flachpunktstangenten übereinstimmt* (vgl. Ciani, *Rend. Ist. Lomb.* (2) **33**, 1170 (1900)).

Man nennt ferner *desmische Kurve 4. Ordnung* nach Humbert, *J. de math.* (4) **6**, 423 (1890) und (4) **7**, 353 (1891), den ebenen Schnitt einer desmischen Fläche 4. Ordnung. Unabhängig von räumlichen Betrachtungen kann man sagen, eine Kurve 4. Ordnung ist desmisch, wenn sie zu einem Büschel gehört, in dem sich drei aus je vier Geraden zusammengesetzte Kurven befinden (desmische Vierseite). Diese Geraden berühren eine einzige Kurve 3. Klasse k_3. *Die vier zusammengehörigen Berührungspunkte der Seiten eines Vierseits liegen je in einer Geraden, und die drei Geraden laufen durch einen Punkt. Die Bedingung, daß eine Kurve 4. Ordnung desmisch sei, läßt sich geometrisch so fassen, daß sie drei Doppeltangenten hat, die die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind, dessen Eckpunkte in den zugehörigen sechs Berührungspunkten liegen.* Solcher Vierseite gibt es im ganzen sechs. Schur erkannte (*J. f. Math.* **95**, 217 (1883)), daß die desmische Kurve auch als Spezialfall der Lürothschen aufgefaßt werden kann.

§ 3. Hyperelliptische und elliptische Kurven vierter Ordnung.

Die *hyperelliptische* c_4 hat einen Doppelpunkt, und umgekehrt. Über solche Kurven vergleiche man Kohn, *Wien. Ber.* **95**, 321, (1887); Jeffery, *Quart. Journ.* **24**, 250 (1890); Andoyer, *Théorie des formes*, p. 363ff., Paris 1900; Roch, *J. f. Math.* **66**, 114 (1866); Humbert, *J. de math.* (4) **2**, 239 (1886); Weiß, *Wien. Ber.* **99**, 284 (1890). Eine irrationale Parameterdarstellung gab Clebsch, *Math. Ann.* **1**, 170 (1869). Die g_2' auf der Kurve, die den hyperelliptischen Charakter bedingt, wird gebildet von dem Geradenbüschel durch den Doppelpunkt. Sei dieser ein Knoten oder isolierter Punkt, so existieren nach der Tabelle auf S. 397 16 eigentliche Doppeltangenten, die eine Kummersche Gruppe bilden, und 18 Wendepunkte, so daß die Klassenzahl 10 wird. Von den 63 einhüllenden Kegelschnittreihen des allgemeinen Falles bestehen nur mehr 30 aus wirklich vierfach berührenden Kegelschnitten. Die entsprechenden Steinerschen Gruppen setzen sich jeweils zusammen aus vier Paaren von eigentlichen Doppeltangenten und einem doppelt gezählten Paar uneigentlicher Doppel-

tangenten (Tangenten, die den Doppelpunkt enthalten). Jeder Kegelschnitt der anderen Systeme berührt die c_4 dreimal und schneidet sie im Doppelpunkt. Die entsprechende Steinersche Gruppe setzt sich aus sechs eigentlichen und sechs uneigentlichen Doppeltangenten zusammen, von denen jedes Paar je eine enthält.

Man erhält eine hyperelliptische c_4, wenn

a) bei der Erzeugung mittels zweier projektivischen Büschel von Kegelschnitten diese einen gemeinsamen Basispunkt haben;

b) bei der Hesseschen Erzeugung zwei Ecken des windschiefen Achtecks zusammenfallen;

c) bei der Aronholdschen Methode drei der sieben gegebenen Geraden durch einen Punkt gehen;

d) bei der Geiserschen Erzeugung das Projektionszentrum auf einer der 27 Geraden der Fläche 3. Ordnung liegt.

Eine andere Erzeugung hat Bobek (*Wien. Denkschr.* **53**, 119 (1887)) angegeben. Den besonderen Fall des Inflexionsknotens behandelte Brioschi (*Math. Ann.* **4**, 95 (1871)).

Ist der Doppelpunkt eine Spitze, so ist die Kurve von der Klasse 9 und hat zehn Doppeltangenten und 16 Wendepunkte. (Vgl. besonders noch Richmond, *Quart. Journ.* **26**, 5 (1892) und Fontené, *Bull. Soc. math. France* **27**, 229 (1899); über die desmische Kurve mit Spitze Humbert, *J. de math.* (4) **7**, 385 (1891)).

Aus den Untersuchungen von Bertini über Kurven der Ordnung n mit $(n-2)$-fachem Punkt geht hervor, *daß die Berührungspunkte der sechs uneigentlichen Doppeltangenten auf einem Kegelschnitt liegen* (Bertini, *Rend. Acc. Lincei* (3) **1**, 92 (1877); Caporali, *Nap. Rend.* **21**, 227 (1882) = *Mem. di geom.*, p. 164). Dieser Kegelschnitt und der Doppelpunkt der Kurve bestimmen eine quadratische Inversion, vermittelst derer die Kurve in sich selbst übergeht (Roberts, *Proc. London Math. Soc.* **25**, 151 (1894)).

Eine c_4 *mit zwei Doppelpunkten* oder einer äquivalenten Singularität (z. B. einem Berührungsknoten) ist vom Geschlechte 1 und gestattet eine Parameterdarstellung mittels elliptischer Funktionen (Clebsch, *J. f. Math.* **64**, 64 (1864)). Sind die beiden Doppelpunkte verschieden, so können sie durch eine Zentralkollineation in die beiden imaginären Kreispunkte übergeführt werden (vgl. unten Kap. XXII, § 3 über bizirkulare Kurven 4. Ordnung). Über die Erzeugung elliptischer c_4 sehe man Zeuthen, *Forh. Akad. Kopenh.* 1879, p. 89; Fiedler, *Darstellende Geometrie* III, 2. Aufl., S. 25, 45; Liebmann, *Zeitschr. Math. Phys.* **41**, 85 (1896); Casey, *Transact. Irish Acad.* **24**,

457 (1869); außerdem Richmond, *Quart. J.* **32**, 63 (1900); Brill, *Math. Ann.* **17**, 103, 517 (1880); O. Richter, *Zeitschr. Math. Phys.* **35**, Suppl., 1 (1890); Jeffery, *Proc. Lond. Math. Soc.* **21**, 287 (1890); den Fall eines Knotens und einer Spitze bei Ameseder, *Wien. Ber.* **87**, 15 (1883).

§ 4. Rationale Kurven vierter Ordnung.

Ist eine Kurve 4. Ordnung *rational* (vom Geschlechte Null), so lassen sich ihre Punkte mittels homogener Koordinaten darstellen durch $x_i = \varphi_i(\lambda, \mu)$ $[i = 1, 2, 3]$, wo

$$(1) \qquad \varphi_i(\lambda, \mu) \equiv a_i\lambda^4 + 4b_i\lambda^3\mu + 6c_i\lambda^2\mu^2 + 4d_i\lambda\mu^3 + e_i\mu^4.$$

Aus dieser Darstellung folgen leicht alle Singularitäten, die Cartesische und Tangentialgleichung, die Bedingung, daß drei Punkte in einer Geraden liegen usw. Ist eine Gerade $u_x = 0$ gegeben, so hängen ihre Schnittpunkte mit der c_4 von der binären biquadratischen Gleichung ab $\sum u_i\varphi_i = 0$. Variiert man die u_i in dieser Gleichung, also die Gerade in der Ebene, so erhält man eine biquadratische Involution zweiter Art, deren Punktquadrupel auf allen Geraden der Ebene der c_4 liegen. Mit Bezugnahme auf die Kurve kann man daraus die Theorie der Oskulanten von Stahl, *J. f. Math.* **101**, 300 (1887), folgern. Sieht man die Kurve als rationalen Träger mit den Koordinaten (1) an, so sind die folgenden Arbeiten einzusehen: Brill, *Math. Ann.* **12**, 90 (1877); Friedrich, *Diss.* Gießen 1886; Groß, *Diss.* Tübingen (1887); E. Meyer, *Diss.* Königsberg (1888). Man vergleiche auch das Buch von Franz Meyer, *Apolarität und rationale Kurven*, Tübingen 1883.

Eine c_4 mit drei Doppelpunkten hat vier Doppeltangenten und sechs Wendepunkte und ist von der Klasse 6 (c_4^6). *Die sechs Doppelpunktstangenten berühren einen Kegelschnitt, ebenso die sechs Tangenten, die von den Doppelpunkten aus an die Kurve gelegt werden können, und einen dritten Kegelschnitt die sechs Wendetangenten. Auf einem Kegelschnitt liegen ferner die sechs Wendepunkte selbst, die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten, die sechs Schnittpunkte der Doppelpunktstangenten mit der Kurve und schließlich die sechs Berührungspunkte der von den Doppelpunkten ausgehenden Tangenten.* Der Ort der Punkte P von der Eigenschaft, daß die Berührungspunkte der von ihnen ausgehenden sechs Tangenten auf einem Kegelschnitte liegen, ist eine Kurve 3. Ordnung.

Die rationale c_4 kann aus einem Kegelschnitt durch quadratische Transformation gewonnen werden. In der Tat ist die Gleichung der c_4 in bezug auf das Dreieck der drei Doppelpunkte

$$a x_1^2 x_2^2 + b x_2^2 x_3^2 + c x_3^2 x_1^2 + 2 d x_1^2 x_2 x_3 + 2 e x_2^2 x_3 x_1 + 2 f x_3^2 x_1 x_2 = 0$$

oder

$$a\left(\frac{1}{x_3}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_2}\right)^2 + c\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + 2 d \frac{1}{x_2 x_3} + 2 e \frac{1}{x_3 x_1} + 2 f \frac{1}{x_1 x_2} = 0,$$

und nun ist nur $x_i' = 1/x_i$ zu setzen, um die c_4 in einen Kegelschnitt zu verwandeln (Salmon, *Höh. Kurven*, p. 357). Ist etwa $c = 0$, d. h. geht der Kegelschnitt durch eine Ecke des Fundamentaldreiecks, so zerfällt die c_4 in eine Koordinatenseite und eine rationale c_3.

Schröter betrachtet die vorliegende Kurve als Ort des Punktes, der entsprechenden Tangenten zweier projektiven Kegelschnitte gemeinschaftlich ist (*J. f. Math.* **54**, 32 (1857)). Reduziert sich der eine Kegelschnitt auf einen Punkt, so ist das Erzeugnis wieder eine rationale c_3. Stahl faßt die rationale c_4 als ebene Projektion der rationalen Raumkurve 4. Ordnung auf (*J. f. Math.* **101**, 300 (1887): vgl. auch H. de Vries, *Amsterd. Ak.* 1909, p. 627).

Eine besondere Gattung der c_4 mit drei Doppelpunkten bilden die *projektiven Lemniskaten*, deren sämtliche Doppelpunkte Inflexionsknoten sind (vgl. Berzolari, *Rend. Ist. Lomb.* (2) **37**, 277, 304 (1904)); Schoute, *Arch. Math.* (2) **2**, 113 (1884) u. flgde. Bde. *Legt man an eine solche Kurve von einem Punkte P aus die sechs Tangenten, so liegen deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitt.* Die soeben erwähnte Kurve 3. Ordnung, die im allgemeinen den Ort solcher Punkte P bildet, ist also hier unbestimmt. *Rückt P auf die Kurve selbst, so liegen die entsprechenden vier Berührungspunkte in einer Geraden.* Die Seiten des Vierecks, das zu dem Vierseit der Doppeltangenten der Kurve, in dessen drei Diagonalpunkten die Inflexionsknoten liegen, assoziiert ist (und dessen Ecken die Pole der einzelnen Seiten des Vierseits in bezug auf die übrigbleibenden Dreiseite sind), schneiden die Kurve (außer in den Doppelpunkten) in zwölf Punkten, denen ein sechspunktig berührender Kegelschnitt zukommt (vgl. Basset, *Quart. Journ.* **35**, 1 (1903)). Dieselben zwölf Punkte sind auch die Berührungspunkte der von den Ecken des erwähnten Vierseits ausgehenden einfachen Tangenten. Berzolari bringt alle Eigenschaften der Kurve unter einen Gesichtspunkt, indem er hervorhebt, *daß die Kurve gegenüber der Gruppe von 24 Kollineationen, die das Vier-*

seit in sich transformieren, invariant ist. Die projektive Lemniskate bildet also auch einen besonderen Fall der in § 1 behandelten Kurven 4. Ordnung. Sie kann in folgender Weise von einem Punkte P erzeugt werden: *Man betrachte ein Poldreiseit eines Kegelschnittes* K *als Kurve 3. Klasse und bestimme zu jeder Tangente* T *von* K *den Pol P in bezug auf das Dreiseit* (vgl. auch Kober, *Zschr. math. Unterr.* **40**, 168 (1909)). In bezug auf dieses Dreiseit hat die Kurve die Gleichung

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = 0.$$

Die drei Tangenten in den Inflexionsknoten berühren K; *außerdem geht* K *durch die acht Berührungspunkte der Doppeltangenten.*

Wertet man die eben gegebene Erzeugung der projektiven Lemniskate dualistisch um, so erhält man eine sogenannte *projektive Astroide*, eine c_6^4 mit drei Spitzendoppeltangenten und vier Doppelpunkten (vgl. Kober, *Zschr. math. Unterr.* **38**, 278 (1907); metrische Spezialisierungen beider Kurven in Kap. XXII).

Die drei Doppelpunkte einer rationalen c_4 können alle oder zum Teil in Spitzen ausarten, sie können zu zweien konsekutiv werden (Berührungsknoten) oder sich in einem dreifachen Punkt vereinigen. Dieser heißt *Spitzpunkt,* wenn seine drei Tangenten koinzidieren. Der Spitzpunkt ist die zum Flachpunkt dualistische Singularität.

§ 5. Rationale Kurven dritter Ordnung.

Die Bedingung, daß eine allgemeine c_3 einen Doppelpunkt habe, ist durch das Verschwinden der Diskriminante

$$R \equiv T^2 - \tfrac{1}{6} S^3$$

(vgl. Kap. XVII) gegeben. Werden die Tangenten des Doppelpunktes und die Verbindungsgerade der drei noch vorhandenen Wendepunkte als Koordinatenseiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ genommen, so läßt sich die Kurvengleichung in der Form schreiben

$$x_1^3 + x_2^3 + 6 x_1 x_2 x_3 = 0. \tag{1}$$

Die Gleichung ihrer Hesseschen Kurve, die mit der Grundkurve den Doppelpunkt samt seinen Tangenten und die Wendepunkte gemein hat, lautet dann

$$x_1^3 + x_2^3 - 2 x_1 x_2 x_3 = 0. \tag{2}$$

Die Cayleysche Kurve zerfällt in den Doppelpunkt und einen Kegelschnitt, der die Tangenten des Doppelpunkts in ihren Schnittpunkten mit der Wendepunktsgeraden berührt.

Die Wendepunkte sind nur dann alle drei reell, wenn der Doppelpunkt isoliert ist; *dieser ist der Pol der Wendepunktsgeraden in bezug auf das Dreiseit der Wendetangenten* (J. Plücker, *System d. anal. Geom.*, Art. 325, Berlin 1835). Im Falle des Knotens sind zwei Wendepunkte konjugiert imaginär. In beiden Fällen ist die Kurve von der 4. Klasse (c_3^4).

Nimmt man $x_1 = 0$ als Verbindungslinie des Doppelpunktes mit dem einen (reellen) Wendepunkt, $x_3 = 0$ als die zugehörige Wendetangente, $x_2 = 0$ als irgendeine Gerade durch den Doppelpunkt, so läßt sich die Kurvengleichung schreiben

$$x_1^3 = x_3(x_1^2 + \alpha x_2^2). \tag{3}$$

Auch die Form

$$x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + x_3^{\frac{1}{3}} = 0 \text{ oder } (x_1 + x_2 + x_3)^3 = 27\, x_1 x_2 x_3 \tag{4}$$

kann der Kurvengleichung gegeben werden, wenn man das Dreiseit der Wendetangenten zum Fundamentaldreiseit nimmt. Der Doppelpunkt liegt dann in $x_1 = x_2 = x_3$, und $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist die Wendepunktsgerade.

Eine c_3^4 wird erzeugt durch zwei ein-zweideutig aufeinander bezogene Strahlenbüschel oder durch ein Kegelschnittbüschel und ein dazu projektives Strahlenbüschel, dessen Scheitel in einem Grundpunkt des Kegelschnittbüschels liegt (vgl. auch den vorigen Paragraphen und Zahradník, *Wien. Ber.* **117**, 1167 (1908)).

Die c_3^4 ist ferner der Ort der Berührungspunkte der von einem Punkte aus an die Kegelschnitte einer Schar gehenden Tangenten.

Gemäß dem allgemeinen Satz von Clebsch hat eine c_3 mit Doppelpunkt eine Parameterdarstellung der Art

$$x_i = \alpha_i \lambda^3 + 3\beta_i \lambda^2 \mu + 3\gamma_i \lambda \mu^2 + \delta_i \mu^3. \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Verbindet man die Berührungspunkte der beiden an die Kurve von einem ihrer Punkte aus gehenden Tangenten mit dem Doppelpunkt, so liegen diese Verbindungslinien harmonisch zu den Tangenten im Doppelpunkt. Über Steinersche Polygone auf einer c_3^4 vgl. E. Weyr (*Math. Ann.* **3**, 235 (1871)) und Loria (*Prag Stzgsb.* 1896, Nr. 36).

Die c_3 hat eine Spitze und erhält die Klasse 3 (c_3^3), wenn die beiden Invarianten S und T verschwinden. Es ist dann nur noch ein Wendepunkt vorhanden. Zur Aufstellung einer kanonischen Gleichung nimmt man die Rückkehrtangente als $x_1 = 0$, die Verbindungslinie von Spitze und Wendepunkt als $x_2 = 0$ und

die Wendetangente als $x_3 = 0$, dann heißt die Kurvengleichung

$$x_2^3 - 3x_1^2 x_3 = 0. \tag{6}$$

Das ergibt die einfache Parameterdarstellung $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \lambda : \lambda^3$. Die Hessesche Kurve zerfällt in $x_1^2 x_2 = 0$, und die Cayleysche Kurve besteht aus der doppelt zählenden Spitze und dem Schnittpunkt der Wende- und Rückkehrtangente. Eigentliche Steinersche Polygone gibt es auf einer c_3^3 nicht. *Zieht man von einem beliebigen Kurvenpunkte eine Tangente an sie, von deren Berührungspunkt wieder eine Tangente usf.* (vgl. Durège, *Math. Ann.* **1**, 509 (1869)), *so nähert sich der Berührungspunkt immer mehr dem Wendepunkt.* Die c_3^3 gehört zu den W-Kurven erster Art (vgl. Kap. XXII, § 7).

Ausführlicheres über rationale c_3 findet man bei Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen* I, 580ff., Salmon-Fiedler, *Höhere Kurven*, S. 232ff., Andoyer, *Théorie des formes*, p. 334ff., Paris 1900 und besonders (auch in konstruktiver Hinsicht) bei E. Weyr, *Theorie der mehrdeutigen geom. Elementargebilde*, S. 81ff., Leipzig 1869. Hier sind auch Kurven 3. Klasse mit Doppeltangente (c_4^3) behandelt (vgl. a. Kohn, *Enzykl.* III C 5, S. 503, dazu Berzolari, *Rend. Ist. Lomb.* (2) **25**, 1025 (1892)).

Kapitel XX.

Metrische Eigenschaften algebraischer Kurven.

Von *H. Wieleitner* in Pirmasens.

§ 1. Gerad- und krummlinige Asymptoten.

Handelt es sich um die Betrachtung einer einzelnen vorliegenden Kurve, insbesondere in Hinsicht auf metrische Eigenschaften, so sind projektive Dreieckskoordinaten selten ein geeignetes Untersuchungsmittel, da es insbesondere auf die Beziehung der Kurve zur unendlich fernen Geraden ankommt. Man legt deshalb affine (kartesische) und meist rechtwinklige Koordinaten zugrunde, kann aber dann jederzeit, indem man die in x, y geschriebene Gleichung mit z homogenisiert, die unendlich ferne Gerade ($z = 0$) als dritte Koordinatenseite einführen. Bedeutet $u^{(\nu)}$ ein in x, y homogenes Polynom vom ν^{ten} Grade, so läßt sich die Gleichung der Kurve schreiben

$$(1)\quad f \equiv u^{(n)} + u^{(n-1)}z + u^{(n-2)}z^2 + \cdots + u^{(1)}z^{n-1} + u^{(0)}z^n = 0.$$

Hier ist, wenn etwa $u^{(0)} \equiv 0$ ist, $u^{(1)} = 0$ die Gleichung der Tangente des Anfangspunktes ($x = 0$, $y = 0$), wenn auch $u^{(1)} \equiv 0$ ist, liefert $u^{(2)} = 0$ das Tangentenpaar des Anfangspunktes usw. Man kann ferner durch geeignete Wahl des Koordinatensystems immer erreichen, daß $u^{(n)}$ das Glied y^n enthält. Denkt man sich dieses Glied von seinem Zahlenkoeffizienten durch Division befreit, so läßt sich (1) auch unter der Voraussetzung, daß $u^{(n)}$ nur einfache Faktoren hat, ersetzen durch

$$(1^*)\qquad f \equiv \prod_1^n (y - \lambda_i x) + z\,\Phi^{(n-1)}(x, y, z) = 0.$$

Die unendlich fernen Punkte von f sind dann durch $y/x = \lambda_i$, $z = 0$ gegeben. Um das Verhalten von f in ihnen genauer zu bestimmen, müssen wir ihre bezüglichen Tangenten, die sogenannten

Asymptoten der Kurve, angeben. Gelingt es, f auf die Form zu bringen

$$(1^\dagger) \qquad f \equiv \prod_1^n (y - \lambda_i x + \mu_i) + z^2 \Psi^{(n-2)}(x, y, z) = 0,$$

so sind die Geraden $y - \lambda_i x + \mu_i = 0$ die Asymptoten. Diese können (alle oder zum Teil) paarweise imaginär sein. Die μ_i erhält man hierbei immer als die Zähler der Partialbrüche, in die sich der Quotient $u^{(n-1)}/u^{(n)}$ zerlegen läßt. Da nach der allgemeinen Form der Tangentengleichung (S. 274) die Gleichung einer einzelnen Asymptote im Punkte $(x_i, y_i, 0)$ lautet

$$(2) \qquad x \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_i} + y \frac{\partial u^{(n)}}{\partial y_i} + u^{(n-1)}(x_i, y_i) = 0,$$

kann man diesen Satz leicht bestätigen. Berührt die Asymptote 2ν-punktig, so ist der Verlauf des unendlichen Zweiges wie bei einer gewöhnlichen Hyperbel, berührt sie aber $(2\nu + 1)$-punktig, so kommt der Kurvenast auf der nämlichen Seite der Asymptote zurück, auf der er ins Unendliche ging (Wendeasymptote).

Enthält das Polynom $u^{(n)}$ einen mehrfachen Faktor, ist also etwa

$$(3) \qquad f \equiv (y - \lambda x)^\nu \Pi^{(n-\nu)} + z \Phi^{(n-1)} = 0, \qquad [\nu \geqq 2]$$

so setze man $y - \lambda x = \xi$, $y = \eta$ und ordne die Gleichung nach Potenzen von η; dann kommt

$$(4) \quad f \equiv v^{(\mu)} \eta^{n-\mu} + v^{(\mu+1)} \eta^{n-\mu-1} + \cdots + v^{(n-1)} \eta + v^{(n)} = 0,$$

wo die v homogene Polynome in ξ, z sind. Hier stellt

$$(5) \quad v^{(\mu)} \equiv \prod_1^\mu (\alpha_i \xi + \beta_i z) \equiv \prod_1^\mu (\alpha_i y - \lambda \alpha_i x + \beta_i z) = 0$$

das System der μ parallelen Asymptoten des unendlich fernen singulären Punktes dar, unter denen auch die unendlich ferne Gerade (für $\alpha_i = 0$) beliebig oft auftreten kann. Die Zahl μ ist dabei höchstens gleich ν, mindestens gleich 1. Im letzteren Falle hat die Kurve in der durch $y - \lambda x = 0$ gegebenen Richtung für $\nu > 2$ eine reine Liniensingularität, d. h. die Kurve wird von der unendlich fernen Geraden in ν koinzidierenden, konsekutiven Punkten berührt ($\nu = 3$ Wendepunkt, $\nu = 4$ Flachpunkt usw.).

Zur genaueren Diskussion der Annäherung an eine bestimmte Asymptote setzt man, wenn $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_i \xi + \beta_i z = y_1$, $\xi = x_1$ und

entwickelt, indem man x_1 zunächst gleich 1 nimmt, y_1 nach (ganzen oder gebrochenen) Potenzen von z (vgl. S. 293)

$$y_1 = Az^{\varepsilon} + Bz^{\varepsilon+\varepsilon_1} + Cz^{\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \cdots, \qquad (6) \quad [\varepsilon > 1]$$

woraus sich, wenn man wieder x_1 einführt, die hyperbolischen Näherungskurven

$$y_1 = \frac{A}{x_1^{\varepsilon-1}}, \quad y_1 = \frac{A}{x_1^{\varepsilon-1}} + \frac{B}{x_1^{\varepsilon+\varepsilon_1-1}}, \text{ usw.}$$

ergeben. Ist aber $\alpha_i = 0$, also $z = 0$ selbst Tangente, so kann man aus (4) direkt entwickeln

$$\xi = A_0 z^{\delta} + B_0 z^{\delta+\delta_1} + \cdots, \qquad (7) \quad [\delta < 1]$$

woraus die parabolischen Näherungskurven folgen

$$\xi = A_0 \eta^{1-\delta}, \quad \xi = A_0 \eta^{1-\delta} + B_0 \eta^{1-\delta-\delta_1}, \text{ usw.}$$

Mit diesen *krummlinigen Asymptoten* beschäftigten sich schon Newton, dann Stirling (1717), ausführlich J. Plücker, *Theorie der alg. K.*, Bonn 1839. O. Stolz, *Math. Ann.* **11**, 41 (1877), wandte erst die Reihenentwicklungen an, um die Plückerschen Untersuchungen strenger zu gestalten (vgl. C. Reuschle, *Praxis der Kurvendiskussion* I, Stuttg. 1886, H. Wieleitner, *Alg. K.*, Leipzig 1905, Abschn. VI u. E. Beutel, *Alg. K.* I, Leipzig 1909).

§ 2. Transversalentheorie.

Es gibt eine Reihe von Sätzen, die von den Schnittpunkten einer algebraischen Kurve mit bestimmt orientierten Geraden (Transversalen) handeln. An diesen Sätzen hat sich die Kurventheorie historisch entwickelt. Ist z. B. $A_1A_2A_3$ ein beliebiges Dreiseit und sind $P_1^{(i)}$, $P_2^{(i)}$, $P_3^{(i)}$ die Schnittpunkte der Seiten A_2A_3, A_3A_1 und A_1A_2 mit der Kurve, so gilt der sogenannte Carnotsche Satz (*Géom. de position*, Paris 1803, p. 291, 436)

$$\prod_1^n \frac{A_3 P_1^{(i)}}{A_2 P_1^{(i)}} \cdot \prod_1^n \frac{A_1 P_2^{(i)}}{A_3 P_2^{(i)}} \cdot \prod_1^n \frac{A_2 P_3^{(i)}}{A_1 P_3^{(i)}} = +1, \qquad (1)$$

der sich ohne weiteres auf den Schnitt eines beliebigen geschlossenen Polygonzuges erweitern läßt. Der Satz ist projektiver Natur.

Geht die Kurve etwa durch die Ecke A_1 des Dreiecks, so kann man $P_2^{(n)}$ und $P_3^{(n)}$ in A_1 fallen lassen, und wenn wir die Tangente in A_1 an die Kurve A_1T nennen, so geht der Satz (3) über in

$$(2)\quad \frac{A_2A_1\cdot\sin(A_2A_1T)}{A_3A_1\cdot\sin(A_3A_1T)}\cdot\prod_1^n{}_i\frac{A_3P_1^{(i)}}{A_2P_1^{(i)}}\cdot\prod_1^{n-1}{}_i\frac{A_1P_2^{(i)}}{A_3P_2^{(i)}}\cdot\prod_1^{n-1}{}_i\frac{A_2P_3^{(i)}}{A_1P_3^{(i)}}=+1.$$

Ist aber eine der Seiten des Dreiecks, etwa A_1A_2 (in der Ecke A_1) selbst Tangente der Kurve und $\mathfrak{R}$ ihr Krümmungsradius in diesem Punkte, so wird aus (2)

$$(3)\quad \frac{A_2A_1^2}{2A_3A_1\sin(A_1)}\cdot\prod_1^n{}_i\frac{A_3P_1^{(i)}}{A_2P_1^{(i)}}\cdot\prod_1^{n-1}{}_i\frac{A_1P_2^{(i)}}{A_3P_2^{(i)}}\cdot\prod_1^{n-2}{}_i\frac{A_2P_3^{(i)}}{A_1P_3^{(i)}}=\mathfrak{R}.$$

Ist die Kurve z. B. eine c_3 und berührt in den drei Ecken je eine Seite entsprechend, so wird

$$(4)\qquad \mathfrak{R}_{A_1}\cdot\mathfrak{R}_{A_2}\cdot\mathfrak{R}_{A_3}=r^3,$$

wo r den Umkreisradius von $\triangle A_1A_2A_3$ bedeutet.

Aus dem Carnotschen Satze folgt ein anderer, der schon von Newton aufgestellt wurde und lautet: *Gehen von zwei Punkten O, O' zwei parallele Transversalen aus, auf denen die Schnittpunkte A_i und A_i' liegen, so hängt das Verhältnis*

$$\frac{OA_1\cdot OA_2\cdot\cdots\cdot OA_n}{O'A_1'\cdot O'A_2'\cdot\cdots\cdot O'A_n'}$$

nur von der Richtung der beiden Strahlen ab, nicht von der Lage der Punkte O, O'. Ersetzt man hier die Kurve durch ihre Asymptoten oder ein System von Geraden, die zu den Asymptoten parallel sind, so ändern sich die Produkte der Abschnitte nur um konstante Faktoren. Mannigfache Anwendungen dieser Sätze gibt Poncelet, in vier Noten, *Journ. f. Math.* **8** (1832), z. B.: *Drehen sich drei Seiten eines einer c_3 eingeschriebenen Vierseits um feste Punkte, so gilt dasselbe von der letzten Seite des Vierseits.*

Hieran schließt sich der Satz: Die Summe der Kotangenten der Winkel φ_i, unter denen eine Gerade die Kurve schneidet, ist dieselbe wie die bezüglich des Systems der Asymptoten genommene, hängt also auch nur von der Richtung der Transversale ab. Diese Eigenschaft ist aber nur ein spezieller Fall des allgemeineren von Liouville neben anderen Sätzen, *J. de math.* (1) **6**, 345 (1841) u. **9**, 337, 435 (1844), aufgestellten Theorems: *Die Summe der Kotangenten der Winkel, unter denen sich zwei algebraische Kurven schneiden, ist gleich derselben Summe in bezug auf ihre beiderseitigen Asymptotensysteme.*

Von Reiß, *Corr. math.* **9**, 249 (1837), stammt der Satz: Sind $\mathfrak{R}_i$ die Krümmungsradien in den Schnittpunkten einer Ge-

raden mit einer Kurve und φ_i die Schnittwinkel, so ist

$$(5) \qquad \sum_1^n \frac{1}{\mathfrak{R}_i \sin^3 \varphi_i} = 0.$$

Diese Sätze, ihre Erweiterungen und dualistischen Umformungen, auf die schon Poncelet (1832) hinwies, finden sich alle bewiesen in zwei Abhandlungen von A. Gob, *Assoc. franç. pour l' avanc. des Sc.* 1893 und *Bull. Acad. Belg.* (3) **28**, 57 (1894).

§ 3. **Affin metrische Begründung der Polarentheorie. Durchmesser, Mittelpunkte.**

Die gerade Polare eines Punktes Q ist affin folgendermaßen definiert: Man bestimme auf jedem Strahle durch Q den *harmonischen Mittelpunkt* P in bezug auf Q, für den

$$(1) \qquad \sum \frac{PS_i}{QS_i} \equiv \frac{PS_1}{QS_1} + \frac{PS_2}{QS_2} + \cdots + \frac{PS_n}{QS_n} = 0$$

oder

$$(1^*) \qquad \frac{1}{QS_1} + \frac{1}{QS_2} + \cdots + \frac{1}{QS_n} = \frac{n}{QP}$$

ist, wenn S_i die Schnittpunkte des Strahles mit der Kurve sind. Dann beschreibt P die Polargerade (Cotes 1722).

Legen wir Q ins Unendliche, so wird das Strahlbüschel (Q) zu einem System paralleler Sekanten, und die Relation (1) geht über in

$$(2) \qquad \sum PS_i \equiv PS_1 + PS_2 + \cdots + PS_n = 0.$$

Der Punkt P ist das *Zentrum der mittleren Entfernungen* (Schwerpunkt) der Punkte S_i und beschreibt den geradlinigen Durchmesser (Durchmesser erster Ordnung), der zur Richtung (Q) gehört (Newton 1676; Poncelet, *J. f. Math.* **3**, 213 (1828)). Umgekehrt gehören zu jedem geraden Durchmesser $n-1$ Richtungen (Q). In der Tat umhüllen die zu allen Punkten der unendlich fernen Geraden gehörigen Durchmesser eine rationale Kurve von der Klasse $n-1$ und der Ordnung $2(n-2)$. Diese Enveloppe reduziert sich also nur für Kegelschnitte $(n=2)$ auf einen Punkt.

Ebenfalls schon von Newton stammt der Satz, daß eine Kurve (ohne parabolische Zweige) mit dem System ihrer Asym-

ptoten für jede Richtung (Q) denselben geraden Durchmesser hat. Daraus folgt, daß auf jeder Sekante die algebraische Summe der zwischen den Kurvenzweigen und den zugehörigen Asymptoten liegenden Abschnitte verschwindet. Das gibt für $n = 2$ einen bekannten Satz über die Hyperbel. Die projektive Verallgemeinerung dieses Newtonschen Satzes gab erst Maclaurin (1748).

Poncelet stellte unter andern noch folgenden Satz auf (*J. f. Math.* **8** (1832)): Treffen zwei Kurven c_n und c_n' die Seiten AB und AC eines Dreiecks in den nämlichen Punktgruppen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ und $R_1, R_2, \ldots, R_n$, so besteht für ihre Schnittpunktgruppen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und $P_1', P_2', \ldots, P_n'$ mit der Seite BC die Beziehung

$$\prod_1^n{}_i \frac{BP_i}{CP_i} = \prod_1^n{}_i \frac{BP_i'}{CP_i'}, \tag{3}$$

d. h. die beiden Punktgruppen liegen mit B und C in Involution. Fallen B und C in einen Punkt O zusammen, so besteht die Gleichung

$$\sum_1^n{}_i \frac{1}{OP_i} = \sum_1^n{}_i \frac{1}{OP_i'}, \tag{4}$$

d. h. *die beiden Punktreihen haben in bezug auf O denselben harmonischen Mittelpunkt.*

Es heißt *harmonischer Mittelpunkt k^{ten} Grades* der Punkte S_i in bezug auf Q ein Punkt P, für welchen

$$\sum \frac{PS_1}{QS_1} \cdot \frac{PS_2}{QS_2} \cdot \ldots \cdot \frac{PS_k}{QS_k} = 0 \tag{5}$$

(E. de Jonquières, *J. de math.* (2) **2**, 266 (1857)). Die harmonischen Mittelpunkte k^{ten} Grades für alle Geraden durch Q erfüllen die Polare k^{ter} Ordnung von Q. Diese wird zum *Durchmesser k^{ter} Ordnung*, wenn wir Q ins Unendliche legen (vgl. auch die *Theorie der Zentralen* von H. Graßmann, *J. f. Math.* **24**, 262, 372 (1842) und **25**, 57 (1843)). Die Bedingung (5) geht dann über in

$$\sum PS_1 \cdot PS_2 \cdot \ldots \cdot PS_k = 0. \tag{6}$$

Selbstverständlich gelten für diese Durchmesser alle Sätze, wie sie in Kap. XIII, § 4 für Polaren aufgestellt wurden. Insbesondere ist der gerade Durchmesser einer Richtung (Q) auch der gerade Durchmesser aller zu (Q) gehörigen höheren Durchmesser.

Ein weiteres Beispiel sei dieses: Sucht man bei einer c_3 einen Punkt A, dessen Polarkegelschnitt ein Kreis sein soll, so muß dies der Punkt sein, in welchem die zu den imaginären Kreispunkten I und J gehörenden geraden Durchmesser sich schneiden. Es gibt also für jede c_3 einen einzigen solchen Punkt A, sofern nicht zu I und J derselbe Durchmesser gehört (Stuyvaert, *Nouv. Ann. Math.* (3) **18**, 275 (1899)). Mit den Durchmessern hat sich neben Newton, Maclaurin, Cramer u. a. insbesondere E. Waring, *Proprietates algebr. curvarum* (Cambr. 1772) beschäftigt. Neuere Arbeiten sind von J. Thomae, *Leipz. Ber.* **51**, 317 (1899), **55**, 108 (1903) und von V. Kommerell, *Math.-nat. Mitt. Württ.* (2) **9**, 35 (1907) (vgl. auch desselben Autors Artikel in Cantors *Gesch. d. Math.* IV, 471 ff.).

Die Theorie der Polaren läßt sich dualistisch umformen, indem man die Grundkurve als Kurve von der Klasse ν auffaßt. Ist dann p irgendeine Gerade, so kann man ihr Polarkurven $(\nu-1)^{\text{ter}}$, $(\nu-2)^{\text{ter}}$ usw. bis herunter zur ersten Klasse zuordnen. Diese letzte Polare ist ein Punkt P, den man als *Pol* ansprechen kann. Ist Q ein variabler Punkt auf p und sind b_i die von Q an die Grundkurve gehenden Tangenten, so ist der Pol P definiert durch die Gleichung für den Strahl $QP = q$

$$\sum_1^{\nu} \frac{\sin(qb_i)}{\sin(pb_i)} = 0, \tag{7}$$

während die Tangenten q der Polare k^{ter} Klasse der Gleichung genügen

$$\sum \frac{\sin(qb_1)}{\sin(pb_1)} \cdot \frac{\sin(qb_2)}{\sin(pb_2)} \cdot \cdots \cdot \frac{\sin(qb_k)}{\sin(pb_k)} = 0. \tag{8}$$

Nennt man B_iM_i und B_iN_i bzw. die Lote von den Berührungspunkten B_i der b_i auf q und auf p, so läßt sich (7) ersetzen durch

$$\frac{B_1M_1}{B_1N_1} + \frac{B_2M_2}{B_2N_2} + \cdots \frac{B_\nu M_\nu}{B_\nu N_\nu} = 0. \tag{9}$$

Rückt die Gerade p ins Unendliche, so kann man in Erweiterung der bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte den Punkt P als *Mittelpunkt* der Klassenkurve bezeichnen. Aus (9) wird dann die Bedingung

$$\sum_1^{\nu} B_iM_i = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung sagt aus: der Mittelpunkt der Klassenkurve ist

das Zentrum der mittleren Entfernungen (Schwerpunkt) für die Berührungspunkte aller zu irgendeiner Richtung parallelen Tangenten. Da die algebraische Summe der Krümmungsradien in den Punkten B_i verschwindet, ist der Mittelpunkt auch das Zentrum der mittleren Entfernungen für die Krümmungsmittelpunkte dieser Berührungspunkte. Dieselbe Eigenschaft besitzt er aber auch in bezug auf die $(n-1)^2$ Pole, die der unendlich fernen Geraden entsprechen, wenn man die Grundkurve als Ordnungskurve auffaßt, sowie in bezug auf die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte der n Asymptoten. Außerdem ist P der von J. Steiner, *J. f. Math.* **21**, 33 (1840), sog. *Krümmungsschwerpunkt* der Grundkurve, d. i. der Schwerpunkt der Kurve, wenn man sie proportional der Krümmung mit Masse belegt denkt.

Diese Sätze über den *Klassenmittelpunkt* rühren her von M. Chasles, *Corr. math.* **6**, 1 (1830), und J. Liouville, a. a. O.; der letzte von H. Graßmann, *J. f. Math.* **25**, 67 (1842). Von J. Liouville wird dabei noch der Newtonsche Satz über die Schnittpunkte einer Kurve mit einer Geraden auf die Schnittpunkte zweier beliebigen Kurven erweitert: *Das Zentrum der mittleren Entfernungen der mn Schnittpunkte zweier Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung, die von der unendlich fernen Geraden nicht berührt werden, ist identisch mit dem Zentrum für die mn Schnittpunkte der beiderseitigen Asymptoten* (wieder aufgestellt von B. Sporer, *Diss.*, Tübingen 1896, S. 37).

Unter Mittelpunkt einer Ordnungskurve (*Ordnungsmittelpunkt*) versteht man indessen gewöhnlich einen Punkt, der für die Kurve Symmetriezentrum ist. Damit ein solches vorhanden sei, müssen für $n > 2$ besondere Bedingungen erfüllt werden. Ein im Endlichen liegender Ordnungsmittelpunkt vertritt $\frac{1}{4}n(n+2)$ bestimmende Punkte für gerades n, $\frac{1}{4}(n+1)^2$ für ungerades n. Es gibt aber dann für eigentliche Kurven nur einen einzigen Mittelpunkt. Bei geradem n enthält die Kurve den Mittelpunkt gar nicht oder sie schickt eine gerade Anzahl von Zweigen durch ihn; bei ungeradem n muß eine ungerade Zahl von Zweigen durch ihn gehen, deren jeder in ihm eine Inflexion hat.

Mit dem Mittelpunkt in diesem Sinne hat sich besonders J. Steiner, *J. f. Math.* **47**, 7 (1854); *Werke* II, 501, beschäftigt, der aber seine Sätze ohne Beweis aufstellte. Die Beweise finden sich bei P. Güßfeldt, *Math. Ann.* **2**, 65 (1868), B. Sporer, *Zeitschr. Math. Phys.* **37**, 65, 340 (1891) u. a.

§ 4. Brennpunkte. Potenz.

In Analogie zu den Kegelschnitten nennt man seit J. Plücker, *J. f. Math.* **10**, 84 (1832), *Brennpunkte* einer Kurve ν^{ter} Klasse diejenigen ν^2 Punkte, in denen sich im allgemeinen die von den imaginären Kreispunkten I und J an die Kurve gehenden Tangenten schneiden. Von diesen sind nur ν reell. Zählt die unendlich ferne Gerade als σ-fache Tangente und geht die Kurve ε-mal durch jeden Kreispunkt, so existieren nur $(\nu - \sigma - 2\varepsilon)^2$ einfache Brennpunkte. Die übrigen sind singulär, und zwar zählen $2\varepsilon(\nu - \sigma - 2\varepsilon)$ doppelt und ε^2 vierfach. Hierbei ist aber noch vorauszusetzen, daß in den Kreispunkten nicht Spitzen oder Wendepunkte auftreten, wodurch sich die Zahlen modifizieren. Zu jedem Brennpunkte gehört eine Leitlinie (Direktrix), die Verbindungsgerade der beiden zugehörigen Berührungspunkte. Jedem Paar von reellen Brennpunkten ist ein Paar konjugiert imaginärer Berührungspunkte zugeordnet, so daß die vier Punkte wie die vier Brennpunkte eines Kegelschnitts liegen. Der Klassenmittelpunkt der Kurve ist das Zentrum der mittleren Entfernungen für die reellen Brennpunkte der Kurve selbst und die ihrer sukzessiven Klassenpolaren.

Der Ort eines Punktes P, für den die Summe der Winkel konstant ist, den die von P an die k_ν gehenden Tangenten mit einer festen Achse bilden, ist eine Kurve ν^{ter} Ordnung c_ν. Alle so definierten Kurven c_ν bilden ein Büschel, das die ν^2 Brennpunkte zu Grundpunkten hat. Ist die Gleichung der k_ν in Linienkoordinaten

$$\Phi(u, v, w) = 0, \tag{1}$$

so erhält man die Koordinaten der Brennpunkte durch die Bedingung

$$\Phi(-1, -i, x + iy) = 0, \tag{2}$$

wo man den reellen und imaginären Teil einzeln gleich Null zu setzen hat.

Die Beweise dieser Sätze und noch mehr Eigenschaften der Brennpunkte findet man bei Salmon-Fiedler, *Höh. Kurven*, S. 151—163. Vgl. auch Siebeck, *J. f. Math.* **64**, 175 (1864) und Zimmermann, ebenda **126**, 171 (1903).

Schneidet man eine c_n, wo n zunächst gerade angenommen werde, mit p durch einen Punkt $P(\xi, \eta)$ gehenden Geraden, die den vollen Winkel in $2p$ gleiche Teile teilen $(2p > n)$, so ist das

arithmetische Mittel der reziproken Produkte der auf jeder Geraden von P aus bis zur Kurve gezählten Abschnitte unabhängig von der Orientierung des Systems der p Geraden und von der Zahl p. Ist die Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$, so ist der reziproke Wert $\mathfrak{P}$ dieses arithmetischen Mittels

$$\mathfrak{P} = k \cdot f(\xi, \eta), \tag{3}$$

wo die Konstante k nur von den Koeffizienten der Glieder n^{ter} Dimension in f abhängt. Diesen Wert $\mathfrak{P}$ nennt man deshalb die *Potenz* des Punktes P in bezug auf die Kurve (E. Beltrami, *Giorn. di mat.* **4**, 76 (1866)). Ist n eine ungerade Zahl, so kann man sich die Kurve doppelt gelegt denken und aus der so erhaltenen Potenz die Wurzel ziehen. Dieses Verfahren hat aber bei Anwendung auf Kurven gerader Ordnung gegenüber dem ursprünglichen eine Änderung der Konstanten k zur Folge. Als sehr spezieller Fall des Beltramischen Satzes ergibt sich die Konstanz der Summe der reziproken Quadrate zweier senkrechten Durchmesser eines Kegelschnittes.

Ist die Kurve f *isotropisch*, d. h. liegen alle ihre unendlich fernen Punkte in den imaginären Kreispunkten, so sind die bezüglichen Produkte auf allen durch P gezogenen Geraden gleich (J. Petersen 1869; J. P. Ruffini 1890; s. *Arch. f. Math.* **3**, 84, 172, 309 (1903)). Die Potenz $\mathfrak{P}$ ist also mit einem dieser Produkte identisch und erscheint als direkte Verallgemeinerung des von J. Steiner für den Kreis aufgestellten Begriffes.

Elling Holst, *Math. Ann.* **11**, 341 (1887), bezeichnet als *Normalwert* eines Punktes P in bezug auf die Kurve den Quotienten des Produktes der Normalenlängen von P bis zur Kurve und des Produktes der Entfernungen der reellen Brennpunkte von P, wobei das erstere Produkt den Zähler bildet. Diese Größe ist von der Potenz (3) nur um einen ebenfalls konstanten Faktor verschieden. Das Produkt der Normalenlängen kann hierbei durch das Produkt der Tangentenlängen mal dem Produkt der Abstände des Punktes P von den Asymptoten ersetzt werden. Allgemeiner zeigte Elling Holst, *Bull. Soc. math. France* **8**, 52 (1880), wenn man mit $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ die Produkte der Längen der zwei Kurven gemeinsamen Tangenten und Normalen, mit $\mathfrak{N}_{12}$ ($\mathfrak{N}_{21}$) das Produkt der Längen der der ersten (zweiten) Kurve und dem Asymptotensystem der zweiten (ersten) Kurve gemeinsamen Normalen bezeichnet, daß

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{N}_{12}\,\mathfrak{N}_{21}. \tag{4}$$

Derselbe Autor gab auch den dualistischen Begriff des Normalwertes einer Geraden in bezug auf eine Klassenkurve (*Arch. for Math.* **7**, 322 (1882)). Für parabolische und zirkulare Kurven treten Modifikationen ein, die immer die Richtigkeit einer Gleichung von der Art (3) gewährleisten. E. Laguerre hat der Potenz $\mathfrak{P}$, wie wir sie nennen wollen, noch einen anderen geometrischen Ausdruck verliehen (*Œuvres* II, S. 20). Überhaupt enthält der II. Band der *Œuvres* von Laguerre eine Fülle von Entwicklungen, die sich auf metrische Eigenschaften von algebraischen Kurven beziehen. Aus allgemeineren Gesichtspunkten hat solche betrachtet G. Humbert im *J. de Math.* (4) **3**, 327 (1887) und ebenda **4**, 129 (1888). Weitere Literatur bei Berzolari, *Enzykl.* III C. 4, S. 392 ff.

Kapitel XXI.

Besondere Erzeugungsarten ebener Kurven.

Von *H. Wieleitner* in Pirmasens.

§ 1. Kissoiden und Konchoiden. Kurven erster Kategorie.

Die Methoden, ebene Kurven zu erzeugen, können wir vorzugsweise in drei Klassen scheiden, in *geometrische, kinematische* und *analytische*. Die *geometrische Erzeugung*, die entweder eben oder räumlich ist, besteht darin, daß aus gewissen einfacheren Elementen eine Konstruktion zusammengesetzt wird, die, wenn ein Element der Konstruktion beweglich ist, ein variables Element (Punkt, Gerade usw.) liefert, dessen Ort (Einhüllende) die Kurve ist. Dazu zählt auch die Projektion einer Raumkurve auf eine Ebene oder der Schnitt einer Fläche mit einer Ebene. Bei der *kinematischen Erzeugung* wird durch geeignete Elemente die Bewegung zweier sich deckenden Ebenen gegeneinander definiert und der Ort eines in der einen Ebene festen Elementes in der anderen Ebene bestimmt. Es ist klar, daß eine geometrische Erzeugung oft durch eine kinematische (und umgekehrt) ersetzt werden kann. Auch für die *analytische Erzeugung* läßt sich in vielen Fällen ein geometrisches oder kinematisches Substrat finden. Wir verstehen darunter die Aufstellung gewisser Bedingungen zwischen Elementen (Punkten, Tangenten usw.) der Kurve, meist in Form einer Differentialgleichung, deren Integration die gewünschte Kurve ergibt. Insbesondere rechnen wir zur analytischen Erzeugung die Definition von Kurven durch Koordinatenverwandlung, d. h. die Substitution anderer Elemente für x, y in der kartesischen oder für ϱ, θ in der Polargleichung einer gegebenen Kurve. Bezüglich der Kurvenerzeugung durch Apparate vgl. die Abhandlung von A. v. Braunmühl im *Kat. der math. Ausstellung Nürnberg* 1892, S. 54—88.

Eine der einfachsten geometrischen Erzeugungsmethoden ist die *kissoidale*. Wir nennen *Kissoide* zweier gegebenen Kurven Γ

und Γ' in bezug auf einen Pol O nach Schulz v. Strasznicki (*Zeitschr. f. Phys. u. Math. Wien* **8**, 179 (1830)) die Kurve, die entsteht, wenn man die von O aus nach Γ und Γ' gehenden Radienvektoren addiert. Sind Γ, Γ' algebraische Kurven von den Ordnungen m, n, die bzw. β- und γ-mal durch den Pol gehen und im Unendlichen α Schnittpunkte haben, so ist ihre Kissoide, wenn alle Radienvektoren beider Kurven gleichmäßig benutzt werden, von der Ordnung $n' = 2mn - (\beta n + \gamma m + \alpha)$. Wir ziehen dabei auch negative Radienvektoren in Betracht, indem wir die Umkehrung des Vorzeichens von ϱ mit einer Vermehrung von θ um π als gleichbedeutend ansehen. Kann nun die kartesische Gleichung auf die Form

$$(1) \qquad f \equiv \varrho^2 \varphi^2(x, y) - \psi^2(x, y) = 0$$

gebracht werden, so ergeben sich die beiden Polargleichungen

$$(1^*) \qquad \varrho = \frac{\psi}{\varphi} \quad \text{und} \quad \varphi = -\frac{\psi}{\varphi},$$

von denen bei uneingeschränkter Variabilität von θ und ϱ jede einzelne die Kurve darstellt, die aber durch die oben berührte Substitution $\theta = \theta' + \pi$, $\varrho = -\varrho'$, da ψ und φ hiebei unverändert bleiben, ineinander übergehen. Kurven, für die es Punkte O in der Ebene gibt, die als Anfangspunkt genommen bewirken, daß ϱ sich in der Form (1*) darstellt, heißen nach G. Halphen (*Appendix au Traité de Géom. anal.* (*courbes planes*) par Salmon-Chemin, 2. éd., Paris 1903, p. 550) *von der ersten Kategorie* (in bezug auf die Punkte O). Die Kissoide zweier Kurven Γ, Γ' zerfällt, wenn beide Kurven von der ersten Kategorie in bezug auf den Pol sind. Wir bemerken, daß die Brennpunkte gerne als Pole auftreten, und erwähnen insbesondere folgenden Satz von Köstlin (*Math.-nat. Mitt. Württ.* (2) **10**, 38): *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine rationale Kurve bezüglich eines Punktes O ihrer Ebene von der ersten Kategorie ist, besteht darin, daß jeder ihrer Schnittpunkte mit dem Paare der durch O gehenden isotropen Geraden für eine gerade Anzahl von solchen Schnittpunkten zählt.*

Ist die eine der Kurven Γ, Γ', etwa Γ', ein Kreis mit dem Zentrum in O, so nennt man die Kissoide der beiden Kurven Γ, Γ' im speziellen eine (gewöhnliche) *Konchoide*. Natürlich ist jede Konchoide selbst bezüglich des Poles von der ersten Kategorie. Sie zerfällt, wenn Γ von der ersten Kategorie in bezug auf O ist. Die konchoidale Konstruktion kann auch folgendermaßen kine-

matisch gefaßt werden: In einer Ebene Δ ist eine Kurve Γ und ein Punkt O fest gegeben. Eine zweite Ebene Δ', die sich mit Δ deckt, enthält eine feste Gerade G mit einem auf G festen Punkt P. Δ' soll nun so auf Δ gleiten, daß G immer durch O geht, während P auf Γ zu bleiben gezwungen ist. Jeder Punkt Q von G beschreibt dann in Δ eine (gewöhnliche) Konchoide von Γ. Alle anderen Punkte von Δ' beschreiben Kurven, die man zweckmäßig *schiefe Konchoiden* von Γ in bezug auf O nennt: es ist PQ konstant und $\sphericalangle OPQ$ konstant und von 0 bzw. π verschieden (de la Hire, *Mém. Ac. sc.* 1708 (Paris 1730), p. 32).

§ 2. Evoluten und Evolventen. Algebraisch und rational rektifizierbare Kurven. Parallelkurven.

Ein anderes Verfahren, aus einer gegebenen Kurve Γ eine andere abzuleiten, besteht darin, daß man in jedem Punkte von Γ die Normale zieht und auf ihr den Krümmungsmittelpunkt C anmerkt. Der Ort E von C (die Einhüllende der Normale) heißt die *Evolute* von Γ. Dieses Verfahren ist im allgemeinen analytisch, geometrisch nur dann, wenn Normale und Krümmungsradius von Γ (wie vor allem Γ selbst) elementar konstruierbar sind. Allgemeiner gültige Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes hat Mehmke angegeben (*Südd. Bl. f. höh. Unterr.-Anst.* **1**, 69 (1893) und *Riv. di mat.* **2**, 65 (1892); man sehe auch d'Ocagne, *Cours de géom. descript. et infinitésimale,* Paris 1896, 279 ff.). Die Evolute ist algebraisch, wenn Γ algebraisch ist. Hat Γ die Ordnung n und die Klasse ν, sind ferner höhere Singularitäten und spezielle Beziehungen zur unendlich fernen Geraden ausgeschlossen, so ist die Ordnung von E $3n + r'$, die Klasse $n + \nu$, wo r' die Zahl der Wendepunkte bedeutet (vgl. Salmon-Fiedler *Höh. eb. K.*, III. Kap. und Halphen, *Paris Mém. div. sav.* (2) **26** (1877) art. 5—7). *Die Evolute und folglich auch alle sukzessiven Evoluten sind mit der Grundkurve homofokal.* Nennen wir C_1 den Krümmungsmittelpunkt der Evolute im Punkte C, C_2 den der zweiten Evolute im Punkte C_1 und streben die Punkte C, C_1, C_2, C_3 . . . einer Grenzlage P zu, so ist dieser Punkt P der nämliche, mit welchem Punkte man auch auf Γ beginnen möge (Timmermanns, *Mém. Soc. Lille* **6** (1828/9)).

Betrachtet man E als Grundkurve, so ist Γ eine ihrer Evolventen. Die *Evolvente* wird kinematisch definiert als Ort eines Punktes Q auf einer Geraden G, die ohne zu gleiten auf E abrollt. Jede Kurve hat demnach unendlich viele Evolventen, die

zueinander *Parallelkurven* sind. Die Evolvente einer algebraischen Kurve ist aber nur dann algebraisch, wenn die Grundkurve E *algebraisch rektifizierbar* ist. So heißt eine Kurve, deren Bogen eine algebraische Funktion der Koordinaten x, y seines Endpunktes ist, so daß eine algebraische Gleichung besteht

$$F(s, x, y) = 0. \tag{2}$$

Nun zeigte aber G. Humbert (*J. de math.* (4) **4**, 133 (1888)), daß diese Gleichung sich in allen Fällen auf den zweiten Grad in s reduzieren läßt und man schließlich s in der Form darstellen kann

$$s = c + \Re(x, y)\sqrt{f_x^2 + f_y^2}, \tag{2*}$$

wo c von der Wahl des Anfangspunktes der Bogenzählung abhängt, $\Re$ eine rationale Funktion bedeutet und f_x, f_y die partiellen Ableitungen der Funktion f sind, die, gleich Null gesetzt, die Kurve darstellt.

Ist nun etwa auch $\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ eine rationale Funktion von x, y, so ergibt sich s als rationale Funktion der Koordinaten des Endpunktes, und die Kurven heißen nach E. Laguerre (*Bull. Soc. math. France* **8**, 196 (1880); *Œuvres* II, 592 ff.) *Richtungskurven*. Dieser Name deutet an, daß sie als Enveloppen orientierter Geraden aufgefaßt werden können. Alle Evolventen einer Richtungskurve sind wieder Richtungskurven, ebenso die Evoluten, wenn nicht die Grundkurve eine nicht zerfallene Parallelkurve ist. *Die Parallelkurve einer Richtungskurve, und nur einer solchen, zerfällt.*

Die allgemeine Form der Gleichung einer Richtungskurve in Plückerschen Linienkoordinaten ist, wenn $\sigma^2 = u^2 + v^2$ gesetzt wird,

$$\sigma^2 \Phi^2(u, v) - \Psi^2(u, v) = 0. \tag{3}$$

Wir sehen demnach, wenn wir diese Gleichung mit (1) vergleichen, *daß die Polarreziproke einer Kurve erster Kategorie in bezug auf einen Kreis um den Pol eine Richtungskurve ist und umgekehrt.* Denn die Bildung der Polarreziproken in bezug auf den (imaginären) Kreis $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ist mit der Substitution $x = u$, $y = v$ identisch.

Bei der oben erwähnten Evolventenerzeugung der Parallelkurven ist die abrollende Gerade gemeinsame Normale aller durch ihre Punkte erzeugten Kurven. Ist die Grundkurve algebraisch, so sind es auch alle Parallelkurven. Sind n und ν Ordnung und

Klasse der Grundkurve, so ist die Ordnung der Parallelkurve, wenn besondere Beziehungen zu den Kreispunkten und der unendlich fernen Geraden ausgeschlossen werden, gleich $2(n + \nu)$, die Klasse 2ν. *Alle Parallelkurven sind homofokal.* Faßt man das Ziehen der Parallelkurve als Transformation auf, so heißt diese Operation nach S. Lie *Dilatation* (Lie-Scheffers, *Geom. d. Berührungstransformationen,* Leipzig 1896).

§ 3. **Anallagmatische Kurven. Fußpunktskurven.**

Für uns von Wichtigkeit ist auch die *zirkulare Inversion* oder Transformation durch reziproke Radien (vgl. Kap. II). Hierbei ist zunächst allgemein beachtenswert, daß infolge der Winkeltreue dieser Abbildungsmethode die Normalen in zwei entsprechenden Punkten P, P' sich auf dem Mittellote von PP' treffen und daß die zu P, P' gehörigen Krümmungszentra in einer Geraden mit dem Pol der Transformation liegen. Man nennt *anallagmatisch* Kurven, die für einen oder mehrere Pole bei Anwendung zirkularer Inversion in sich übergehen (Moutard, *Nouv. Ann. math.* (2) **3**, 306 (1864)). Die Inversion verwandelt Richtungskurven immer wieder in Richtungskurven, Kurven erster Kategorie in ebensolche, wenn ein Kurvenpol als Transformationspol benutzt wird. Jedem Zweig der Grundkurve, der durchs Unendliche geht, entspricht bei der invertierten Kurve ein Zweig durch das Inversionszentrum O. Den geradlinigen Asymptoten entsprechen dabei die Krümmungskreise der Zweige in O (Laisant, *Bull. Soc. math. France* **23**, 95 (1895)).

Die Zusammensetzung der polaren mit der inversen Transformation in bezug auf denselben Kreis ergibt die *Fußpunktstransformation.* Genauer: Die inverse Kurve Γ' zu der Polarreziproken Π einer Kurve Γ in bezug auf einen Kreis um den Punkt O ist die Fußpunktskurve von Γ in bezug auf O, d. h. der Ort der Fußpunkte der von O auf die Tangenten von Γ gefällten Lote (vgl. Maclaurin, *Phil. Trans.* 1718/19). *Die Normale der Fußpunktskurve Γ' halbiert den von O zum Berührungspunkt der bezüglichen Tangente gehenden Radiusvektor der Grundkurve Γ.* Wird Γ' als Grundkurve betrachtet, so nennt man Γ ihre *negative Fußpunktskurve.* Die Ordnung von Γ' ist im allgemeinen doppelt so groß als die Klasse von Γ. Ist aber Γ' von der Ordnung n' und der Klasse ν', so ist die Ordnung von Γ im allgemeinen $\nu' + 2n'$ und die Klasse $2n'$. Gleich den Evoluten lassen sich auch sukzessive Fußpunktskurven, und zwar nach beiderlei Seiten

bilden. So kann man, von einer Richtungskurve ausgehend, eine Folge von Fußpunktskurven herstellen, die abwechselnd Richtungskurven und Kurven erster Kategorie sind. Für die Krümmungsradien von Γ und Π in entsprechenden Punkten hat Mannheim die Beziehung aufgestellt (*J. de math.* (2) **11**, 193 (1864))

$$\varrho_\Gamma \varrho_\Pi = \frac{1}{\sin^3 \mu},$$

wo μ der Winkel des Radiusvektors mit der Kurventangente von Γ (oder Π) ist.

Nennt man *Gegenfußpunktskurve* die Fußpunktskurve der Evolute, so hat man den folgenden Satz: *Die Differenz der Flächeninhalte der Fußpunktskurve und Gegenfußpunktskurve einer geschlossenen, überall konvexen Kurve Γ in bezug auf einen im Innern gelegenen Punkt P ist gleich der Fläche von Γ* (Catalan, *Mém. Soc. Liège* (2) **13**, 230 (1886)). J. Steiner (*J. f. Math.* **21**, 33 (1840), Werke II, 97) nennt *Krümmungsschwerpunkt* eines Kurvenbogens den Schwerpunkt der proportional ihrer Krümmung mit Masse belegten Kurve und stellt die Sätze auf: *Der Ort aller Punkte, für die die Fläche der Fußpunktskurve einer geschlossenen konvexen Linie konstant ist, ist ein Kreis, dessen Zentrum der Krümmungsschwerpunkt P_k der Kurve ist*, und: *Die Fläche der Fußpunktskurve einer geschlossenen, konvexen Linie in bezug auf einen Punkt P ist gleich der Fläche der Fußpunktskurve in bezug auf P_k, vermehrt um die Fläche des Halbkreises mit PP_k als Radius* (vgl. auch Ruoß, *Diss.*, Erlangen 1891).

Die Begriffe der Fußpunktskurve und der Evolute hat man dadurch verallgemeinert, daß man den vorkommenden rechten Winkel durch einen beliebigen ersetzte. Die ersteren Kurven heißen dann *schiefe Fußpunktskurven*, die letzteren *Evolutoiden*. Für die Evolutoiden hat schon Réaumur (*Paris Mém. Ac. Sc.* 1709) den Satz aufgestellt: *Der Berührungspunkt einer unter festem Winkel die Kurve schneidenden Geraden mit ihrer Enveloppe liegt im Fußpunkte des vom Krümmungszentrum des zugehörigen Kurvenpunktes auf die Gerade gefällten Lotes.*

§ 4. Kaustiken. Isoptische Linien. Kurven gleicher Potenz.

Ist P ein Punkt der Ebene, der auch unendlich fern sein kann, Γ eine Kurve, die als Grenzlinie zweier optischen Medien betrachtet wird, und konstruieren wir zu jedem durch P gehenden Strahl den an Γ reflektierten oder gebrochenen Strahl, so hüllen

diese reflektierten oder gebrochenen Strahlen eine Kurve ein, die im allgemeinen *Kaustik* heißt, *Katakaustik* im Falle der Reflexion, *Diakaustik* im Falle der Brechung. Gergonne (*Ann. de math.* **15**, 345 (1825)) stellte den Satz auf, daß jede Katakaustik Evolute einer algebraischen Kurve C ist, die man nach Quetelet (*Brux. Ac. Nouv. Mém.* **5** (1829), Nr. I) *sekundäre Kaustik* oder *Antikaustik* nennt. Da einer beliebigen Antikaustik eine beliebige Grundkurve entspricht und umgekehrt, die algebraisch rektifizierbaren Kurven aber mit den Evoluten aller algebraischen Kurven identisch sind, kann man sie auch als Katakaustiken algebraischer Kurven in bezug auf die im Endlichen liegenden Punkte P der Ebene definieren. Liegt aber P im Unendlichen, so ist die Antikaustik und daher auch die Katakaustik rational rektifizierbar, d. h. Richtungskurve. Nur wenn es eine Gerade gibt, die zur Richtung der einfallenden Strahlen senkrecht steht und man von allen Punkten dieser Geraden an die reflektierende Kurve zwei zueinander senkrechte Tangenten ziehen kann, ist die Antikaustik nicht Richtungskurve, die Katakaustik also nur algebraisch rektifizierbar. De l'Hospital (*Analyse des inf. petits*, Paris 1815, p. 105) zeigte, *daß die Antikaustik für Reflexion an einer Kurve* Γ *in bezug auf den gegebenen Punkt* P *zur Fußpunktskurve von* Γ *in bezug auf* P *homothetisch ist* (mit dem Vergrößerungsverhältnis 2). Vgl. dazu Keßler, *Zeitschr. f. Math. Phys.* **23**, 1878, 1; über Katakaustiken im allgemeinen E. Stübler, *Zeitschr. math. Unterr.* **39**, 121 (1908); Bibliographie der Kaustiken im *Interméd. math.* **2**, 321 (1895); bezüglich der Plückerschen Zahlen der Katakaustiken siehe die *Diss.* von G. F. Steiner (Lund 1896).

Isoptische Kurve einer gegebenen nennt man den Ort aller Punkte, von denen aus sich zwei Tangenten unter einem gegebenen festen Winkel an die Kurve ziehen lassen. Ist der Winkel ein Rechter, so heißt der Ort *orthoptische Kurve* (C. Taylor, *Proc. R. S. London* **37** (1884)). Die letzteren Kurven hat als *Orthogonale* behandelt O. Zimmermann, *J. f. Math.* **126**, 183 (1903) Die Plückerschen Charakteristiken der isoptischen Kurven bestimmte A. T. Ljungh (*Diss.*, Lund 1895).

Der Ort aller Punkte, die in bezug auf eine gegebene Kurve $f(x, y) = 0$ gleiche Potenz $\mathfrak{P}$ haben (Kap. XX, § 4), heißt *Kurve gleicher Potenz*. Ihre Gleichung ist

$$(1) \qquad f(x, y) = c\mathfrak{P} \qquad (c = \text{const.}).$$

Die Kurve (4) hat mit der Grundkurve im Endlichen keinen Punkt gemein und schmiegt sich ihr, je kleiner c ist, desto enger

an, so zwar, daß alle Singularitäten der Grundkurve in der Kurve gleicher Potenz im Plückerschen Sinne aufgelöst sind (vgl. H. Wieleitner, *Alg. K.* S. 35).

§ 5. Kinematische Gesichtspunkte. Rollkurven.

Die kinematische Geometrie (A. Mannheim, *Principes et développement de Géométrie cinématique,* Paris 1894; A. Schönflies, *Geometrie der Bewegung,* Leipzig 1886) unterscheidet sich nur dadurch von der Kinematik oder reinen Bewegungslehre (Burmester, *Lehrb. der Kinematik,* Leipzig 1886), daß von der Zeit abgesehen wird, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen also außer Betracht bleiben.

Die Bewegung einer Ebene in sich ist dann fixiert, 1. wenn die Trajektorien zweier festen Punkte, 2. wenn die Trajektorie eines Punktes und die Einhüllende einer Kurve, 3. wenn die Einhüllenden zweier festen Kurven gegeben sind.

Nun hat schon Cauchy (*Exerc. de math.* **2**, 75 (1827)) angegeben, daß jede solche Bewegung einer Ebene in sich dadurch vermittelt werden kann, daß eine mit ihrer Ebene Δ' beweglich gedachte Kurve Λ, die *bewegliche Polbahn,* auf einer Kurve $\llcorner$ in einer festen Ebene Δ, der *festen Polbahn,* ohne zu gleiten abrollt. Die Bewegung ist also 4. auch durch die beiden Polbahnen definiert. Für eine so definierte Bewegung gelten folgende Sätze: *In jedem Augenblick der Bewegung gehen die Normalen der Bahnen aller Punkte durch denselben Punkt M, das sog. „Momentanzentrum" oder den „Momentanpol"* (Joh. Bernoulli, *Opera,* Laus. 1742, IV, 265). *Der Ort aller Momentanzentren in der festen Ebene Δ ist die feste, in der beweglichen Ebene Δ' die bewegliche Polbahn. Die beiden Polbahnen berühren sich in jedem Augenblick im Momentanzentrum M. Fällt man von M auf irgendeine feste Kurve Γ von Δ' die Normalen, so sind deren Fußpunkte die momentanen Berührungspunkte von Γ mit ihrer Enveloppe.*

Durch die Auffassung jeder Bewegung als Abrollen zweier Kurven wird man dahin geführt, die Ebenen Δ' und Δ als gleichberechtigt anzusehen, so daß es nur auf die Betrachtungsweise ankommt, ob die eine Ebene fest und die andere beweglich ist oder umgekehrt. Man nennt dann die eine Bewegung die *direkte* oder *ursprüngliche,* die andere die *umgekehrte.* Die Wichtigkeit dieser Einsicht erkannte zuerst Aronhold (*Verh. Verein Förderung Gewerbfl. Preußen* **51**, 129 (1872)). Die Kurven, die speziell nach der Festlegung (1) erzeugt werden, haben den Namen *Gleit-*

kurven (*Glissetten*) erhalten. Die nach (4) erzeugten heißen *Rollkurven* oder *Rouletten*. Die letzteren bilden aber nur insofern eine Familie, als manchen Kurven besonders einfache Polkurven zukommen. Im allgemeinen kann jede Kurve, sogar wenn eine Polbahn vorgegeben ist, als Rollkurve erzeugt werden.

Sei M der momentane Berührungspunkt der beiden Polkurven L und Λ, T ihre gemeinschaftliche Tangente, $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_\lambda$ die Krümmungsradien der Polkurven in M, C_l und C_λ die zugehörigen Krümmungszentren, P ein fester Punkt der beweglichen Ebene (Λ), $\mathfrak{R}$ der Krümmungsradius seiner Trajektorie, C der Krümmungsmittelpunkt, $\varrho = MP$, $\sphericalangle PM\mathsf{T} = \theta$, so besteht die Savarysche Formel

$$\frac{1}{\mathfrak{R} - \varrho} + \frac{1}{\varrho} = \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_l} + \frac{1}{\mathfrak{R}_\lambda}\right) \frac{1}{\sin\theta}, \tag{5}$$

die schon Euler bekannt war, aber erst von F. Savary (*Journ. de math.* (1) **10**, 204 (1845)) zu folgender eleganten Konstruktion des Krümmungszentrums C der Trajektorie benutzt wurde: *Man ziehe PM und in M das Lot zu PM, schneide dieses in A durch PC_λ, dann treffen sich C_lA und PM in C.*

Hieraus folgt zunächst die vollständige Reziprozität der Punkte P und C und somit der beiden Ebenen (L) und (Λ). D. h. *ist C der Krümmungsmittelpunkt der Trajektorie von P bei direkter Bewegung, so ist P der Krümmungsmittelpunkt der Trajektorie von C für die umgekehrte Bewegung.* Insbesondere ergibt sich, *daß in jedem Momente die Punkte der Ebene (Λ), deren Krümmungszentren unendlich fern sind, die sich also in einem Wendepunkte ihrer Bahn befinden, auf einem Kreise W liegen,* der T in M berührt und in bezug auf C_λ zum Kreis über MC_l als Durchmesser homothetisch liegt, dem sog. *Wendekreise* (de la Hire, *Hist. Ac.*, Paris 1706, 340; Bresse, *J. Éc. Polyt.* **35**, 89 (1853)). Dieser hat demnach einen Durchmesser d, für den die Gleichung besteht

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\mathfrak{R}_l} + \frac{1}{\mathfrak{R}_\lambda} \quad \text{oder} \quad d = \frac{\mathfrak{R}_l \mathfrak{R}_\lambda}{\mathfrak{R}_l + \mathfrak{R}_\lambda}.$$

Alle Wendetangenten laufen in jedem Moment durch den M entgegengesetzten Scheitel von W, den sog. *Wendepol*. Entsprechend gibt es einen zu W in bezug auf T symmetrisch liegenden Kreis R, der dasselbe für die umgekehrte Bewegung leistet. *Auf dem Kreise R liegen bei der direkten Bewegung sowohl die Krümmungsmittelpunkte für die Trajektorien der unendlich entfernten Punkte der Ebene (Λ) als auch die Spitzen der Enveloppen,*

die durch Gerade der Ebene (Λ) *in einem gegebenen Moment beschrieben werden.* Alle Spitzentangenten laufen durch den M entgegengesetzten Scheitel von R. Der Kreis heißt *Rückkehrkreis.* Wendekreis und Rückkehrkreis werden zusammen *de la Hiresche Kreise* genannt.

Die momentanen Berührungspunkte B einer Kurve U in der Ebene (Λ) mit ihrer Enveloppe erhält man, wie oben schon erwähnt, indem man von M auf U die Normalen MP fällt. Sind dann C_u, $\mathfrak{R}_u$ Krümmungsmittelpunkt und -radius für U in P, so kann man zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes der Enveloppe von U (des Ortes von P) C_u statt P benutzen. In der Savaryschen Formel ist dann nur $1/(\varrho - \mathfrak{R}_u)$ statt $1/\varrho$ zu setzen. *Die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen aller Geraden der Ebene* (Λ) *liegen also in einem gegebenen Moment auf dem Rückkehrkreis* R. Der Ort der Scheitel, d. h. der Punkte, in denen der Krümmungskreis die Bahnkurve vierpunktig berührt, ist eine zirkulare c_3 F, die *Fokale* (*Fokalkurve*) heißt und von Burmester (*Zivilingenieur* (2) **22**, 598 (1876)) zuerst aufgestellt wurde. Der Ort der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte ist eine c_3 F' der gleichen Art. Für die umgekehrte Bewegung vertauschen sich F und F'. Die Fokale ist dadurch vor anderen zirkularen Kurven 3. Ordnung ausgezeichnet, daß ihr außerordentlicher Brennpunkt auf ihr liegt (vgl. S. 465).

§ 6. Natürliche Koordinaten. Methode der Koordinatenverwandlung.

Schon K. Chr. Fr. Krause (*Novae Theoriae linearum curvarum* etc. München 1835) und A. Peters (*Neue Kurvenlehre*, Dresden 1838) machten den Versuch, solche Größen als Koordinaten einzuführen, die der Kurve selbst eigentümlich sind und nicht von der willkürlichen Annahme eines Bezugssystems abhängen. Derartige Koordinaten wurden später *intrinseke* oder *natürliche* genannt (W. Whewell, *Trans. Cambr. Phil. Soc.* **8**, 659 (1849) Anm.; Aoust, *Anal. infinit. des Courbes planes,* Paris 1873; vgl. den *Bericht über d. gegenw. Stand der Lehre v. d. natürl. Koordinaten* von E. Wölffing, *Bibl. math.* (3) **1**, 142 (1900)). Erst S. Lie aber stellte fest, daß solche natürliche Koordinaten nichts anderes sein können als die Differentialinvarianten, die zur dreigliedrigen Gruppe der infinitesimalen Bewegungen in der Ebene gehören. Diese Differentialinvarianten lassen sich alle aus einer von ihnen, dem Krümmungsradius $\mathfrak{R}$ oder dessen reziprokem

Wert, dem Krümmungsmaß k durch Differentiation nach dem Tangentialwinkel τ, den die Tangente mit einer festen Richtung bildet, oder, da $ds = \mathfrak{R} d\tau$ ist, nach dem Bogen s ableiten (s. u. a. die *Einführung in die Theorie der Curven* von G. Scheffers, Leipzig 1901, S. 42—55). Eine Gleichung zwischen zwei dieser Differentialinvarianten charakterisiert die Kurve vollständig. Man kann sie z. B. in der Form annehmen

$$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \varphi(\mathfrak{R}). \tag{1}$$

Sie kann aus der kartesischen oder Polargleichung der Kurve abgeleitet werden, indem man $\mathfrak{R}$ und $d\mathfrak{R}/ds$ in Funktion einer der Koordinaten (etwa x oder θ) ausdrückt und diese Koordinate dann eliminiert. Umgekehrt ist (1) immer eine gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung in x, y, deren Lösung, da ihre zugehörige Gruppe bekannt ist, durch Quadraturen geleistet werden kann (vgl. Lie-Scheffers, *Differential-Gleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Leipzig 1891, S. 562). Man erhält zunächst durch einmalige Integration aus (1)

$$\mathfrak{R} = f(s), \tag{2}$$

d. i. eine Beziehung zwischen Krümmungsradius und Bogen, die man (vgl. Cesàro-Kowalewski, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig 1901) als *natürliche Gleichung* der Kurve bezeichnet. Sie enthält zwar gegenüber (1) eine Integrationskonstante, die von dem Anfangspunkt der Bogenmessung abhängt, ist aber sonst bequemer zu handhaben. Weiter ergibt sich aus (2)

$$\tau = \int \frac{ds}{\mathfrak{R}}, \tag{3}$$

so daß in (2) statt s oder $\mathfrak{R}$ auch τ eingeführt werden kann. Da

$$dx = ds \cos\tau, \quad dy = ds \sin\tau, \tag{4}$$

erhält man die Parameterdarstellung in rechtwinkligen Koordinaten

$$x = \int \cos\tau \, ds, \qquad y = \int \sin\tau \, ds, \tag{5}$$

oder

$$x = \int \mathfrak{R} \cos\tau \, d\tau, \quad y = \int \mathfrak{R} \sin\tau \, d\tau. \tag{5*}$$

Wir schließen hieran die Behandlung der Evoluten und ähnlicher abgeleiteten Kurven in natürlichen Koordinaten. Sind

$\mathfrak{R}, s, \tau$ die Elemente der Grundkurve, $\mathfrak{R}_1, s_1, \tau_1$ die der Evolute, so hat man die Beziehungen

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{d\mathfrak{R}}{d\tau} = \mathfrak{R}\frac{d\mathfrak{R}}{ds}, \qquad s_1 = \mathfrak{R}. \tag{6}$$

Hierbei ist s_1 von einem Punkte aus gezählt, in dem die Grundkurve eine Spitze hat. In (6) ist natürlich auch die Darstellung der Evolvente enthalten ($\tau_1 = \tau + \frac{1}{2}\pi$). Nennt man $\mathfrak{R}_n, s_n$ die Elemente der n^{ten} Evolute, so hat man

$$\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}\frac{d^n\mathfrak{R}}{d\tau^n} = \mathfrak{R}\frac{d\mathfrak{R}_{n-1}}{ds}, \qquad s_1 = \mathfrak{R}_{n-1}. \tag{7}$$

Sind $\mathfrak{R}_\varepsilon, s_\varepsilon$ die Elemente einer zugehörigen Evolutoide, ε der Winkel, den ihre Erzeugenden mit den bezüglichen Kurvennormalen bilden, so hat man nach Habich (*Les Mondes* **19**, 33 (1869))

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_\varepsilon = \mathfrak{R}\sin\varepsilon + \dfrac{d\mathfrak{R}}{d\tau}\cos\varepsilon, \\ s_\varepsilon = s\sin\varepsilon + \displaystyle\int d\mathfrak{R}\cos\varepsilon. \end{cases} \tag{8}$$

Bezeichnen $\mathfrak{R}', s'$ die Elemente einer Parallelkurve, l den Abstand der Kurven, so bestehen die Beziehungen

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + l, \quad s' = s + l\tau, \tag{9}$$

wo es natürlich noch auf das Vorzeichen von l ankommt und $\tau_1 = \tau$ ist. Häufig ist auch folgende Darstellung von Nutzen. Man bringt die Grundgleichung auf die Form

$$s = \int f(\mathfrak{R})\,d\mathfrak{R}, \tag{10}$$

dann ist die Gleichung der Parallelkurve

$$s' = \int \frac{\mathfrak{R}' f(\mathfrak{R} - l)\,d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R} - l}. \tag{11}$$

Ersetzt man nun in der natürlichen Gleichung $f(\mathfrak{R}, s) = 0$ einer Kurve Γ die Koordinaten s, $\mathfrak{R}$ durch die kartesischen x, y, so ergibt sich eine neue Kurve Γ', welche man die *Mannheimsche Kurve* von Γ nennt. A. Mannheim bestimmte nämlich diesen Ort zuerst für verschiedene spezielle Kurven auf kinematisch-geometrischem Wege (*J. de math.* (2) **4**, 93 (1859); *Géom. ciném.* p. 500 ff.). Es ist in der Tat einleuchtend, *daß Γ' als Ort des jeweiligen zum Berührungspunkt gehörigen Krümmungsmittelpunktes entsteht, wenn Γ auf der x-Achse rollt.*

Läßt man Γ auf einem Kreise vom Radius r rollen, so hat man nur $\mathfrak{R} = \varrho - r$, $s = r\theta$ zu setzen, um die Gleichung der sog. *verallgemeinerten Mannheimschen Kurve* Γ'' von Γ in Polarkoordinaten zu erhalten (Wieleitner, *Math.-nat. Mitt. Württemb.* (2) **9**, 1—9 (1907); Ernst, *Monatsh. f. Math.* **18**, 315 (1907)). Wir können also sagen: *Die verallgemeinerte Mannheimsche Kurve einer Kurve mit der Gleichung* $f(\mathfrak{R}, s) = 0$ *ist eine Konchoide mit dem Zwischenstück* r *der Kurve* $f(\varrho, r\theta) = 0$. *Machen wir letztere Kurve zum Normalschnitt einer allgemeinen Schraubenfläche, so wird die Kurve* $f(x, y) = 0$ *ihr Meridianschnitt* (Duporcq, *L'Interméd. math.* **8**, 313 (1901)). Damit ist für die Vertauschung der kartesischen mit Polarkoordinaten eine direkte geometrische Grundlage gegeben. Im Zusammenhang mit dem vorigen kann man noch sagen: *Die verallgemeinerte Mannheimsche Kurve* Γ'' *und die Mannheimsche Kurve* Γ' *einer Kurve* Γ *sind gleichzeitig Normalschnitt und Meridianschnitt derselben Schraubenfläche.*

Man kann nun auch die natürliche Gleichung einer Kurve Γ in der Form $\mathfrak{R} = f(\tau)$ annehmen und sie in Polarkoordinaten deuten, indem man $\mathfrak{R} = \varrho$, $\tau = \theta$ setzt, d. h. geometrisch gesprochen die Krümmungsradien von Γ an einen festen Punkt als Vektoren gleicher Länge und Richtung anträgt. Die neue Kurve Γ_1 heißt dann *Radiale* der gegebenen (Tucker, *Proc. Lond. math. Soc.* **1** (1865) Nr. V). Die Ordnung der Radiale einer algebraischen Kurve ist im allgemeinen gleich der dreifachen Ordnung der Grundkurve Γ, vermehrt um die Zahl der Wendepunkte von Γ, also von derselben Ordnung, wie die Evolute von Γ (Loria, *Rend. Circ. mat. Palermo* **16**, 46 (1902); *Period. di mat.* (2) **4**, 30 (1901)). *Die Radiale irgendeiner Kurve* Γ *ist die Kissoide der Fußpunktskurve von* Γ *und der Fußpunktskurve der zweiten Evolute von* Γ *in bezug auf einen beliebigen Pol.* Ferner erhält man mittels des in § 3 angegebenen Satzes über Fußpunktskurven den Satz: *Die Fläche der Radiale einer im Endlichen geschlossenen Kurve ohne Wendepunkt ist gleich der Differenz aus den Flächen der Kurve und ihrer Evolute* (P. Ernst, *Arch. Math.* (3) **14**, 94 (1908)). Daß die Fläche der Mannheimschen Kurve einer Grundkurve Γ doppelt so groß ist wie die entsprechende Fläche der Radiale von Γ, während die entsprechenden Bogen beider abgeleiteten Kurven gleich lang sind, hat Mannheim selbst bewiesen (*Géom. cin.* p. 501). Es ist ferner bemerkenswert, *daß die Radiale einer Richtungskurve von der ersten Kategorie bezüglich des Poles ist* (Köstlin, *Diss.*, Tübingen 1907, S. 27). Weitere Beziehungen bei Santangelo, *Palermo Rend.* **29** (1910).

Auch die dritte Form der natürlichen Gleichung einer Kurve Γ $s = f(\tau)$ kann einer sehr bemerkenswerten Umdeutung unterzogen werden, die von Köstlin a. a. O. gegeben wurde. Man nennt „axiale Linienkoordinaten" die Größen w und φ in der Gleichung einer Geraden, wenn diese in der Form

$$x + y \operatorname{tg} \varphi - w = 0$$

geschrieben wird (Salmon-Fiedler, *Höh. eb. K.*, Nr. 13, 69 usw.). Setzt man nun in der natürlichen Gleichung von Γ $s = w$, $\tau = \varphi$, so ergibt sich eine Kurve Γ' in Linienkoordinaten, die man *Arkuide* von Γ nennt. Man kann sie aus Γ durch folgende Konstruktion gewinnen: Auf der Tangente von Γ, für die $\tau = 0$ ist, trage man von einem beliebigen Anfangspunkte O aus die Strecken $OQ = w = s$ auf und ziehe durch Q jedesmal die Parallele zu der dem Endpunkt des Bogens s auf Γ entsprechenden Kurvennormale. Die Enveloppe dieser Parallelen ist Γ'. Die Arkuiden stehen in interessanter Beziehung zu den algebraisch rektifizierbaren Kurven.

Die Bedingung, daß die Arkuide Γ' von Γ algebraisch wird, ist die, daß für Γ eine in s und $\operatorname{tg}\tau$ rationale Gleichung besteht. Ist nun insbesondere Γ eine algebraische Kurve, so ist Γ' nur dann auch algebraisch, wenn Γ selbst algebraisch rektifizierbar, also Evolute einer algebraischen Kurve ist. Γ' ist dann ebenfalls algebraisch rektifizierbar. Allgemeiner hat man den Satz: *Genügt Γ einer Differentialgleichung 1. Ordnung $\mathfrak{D}(y, y') = 0$*, zu welcher Gattung außer allen algebraischen auch viele transzendente Kurven gehören, *so ist die Arkuide Γ' eine algebraisch rektifizierbare Kurve derselben Art.* Die algebraisch rektifizierbaren Arkuiden der algebraischen Kurven sind aber noch durch eine besondere Eigenschaft ausgezeichnet: *Dreht man nämlich jede ihrer Tangenten um ihren Schnittpunkt mit der Achse um denselben Winkel, so ist die Einhüllende der gedrehten Geraden wieder eine Kurve derselben Art.* Man sagt, die Kurve habe die Gerade als *Rektifikationsachse.* Für die Radialen algebraischer Kurven gilt der Satz: *Trägt man auf einer beliebigen Geraden* G *durch den Pol O der Radiale einer beliebigen algebraischen Kurve jedesmal eine Strecke OQ ab gleich dem Radiusvektor OP der Radiale und fällt die Gerade* T *durch Q senkrecht zu OP, so hüllt* T *eine algebraische und algebraisch rektifizierbare Kurve mit* G *als Rektifikationsachse ein.*

Kapitel XXII.

Metrisch spezialisierte ebene Kurven.

Von *H. Wieleitner* in Pirmasens.

§ 1. Besondere rationale Kurven dritter Ordnung.

Von speziellen ebenen Kurven überhaupt handeln die Werke: Loria, *Spez. alg. u. transz. ebene K.,* Leipzig 1902; Teixeira, *Tratado de las curvas espec. notables,* Madrid 1905, franz. Übers. *Traité d. courbes spéc. remarquables,* t. I Coïmbre 1908, t. II 1909; Wieleitner, *Spez. ebene Kurven,* Leipzig 1908.

Bildet man die Kissoide zweier (reellen oder imaginären) Geraden G und G' in bezug auf einen Punkt P durch Addition der Radienvektoren, so entsteht ein Kegelschnitt E (Hyperbel oder Ellipse), der G und G' zu Asymptoten hat und durch P geht. Die Kissoide dreier Geraden G, G' und Γ, oder eines Kegelschnittes E und einer Geraden Γ, ist eine rationale c_3 mit G, G' und Γ als Asymptoten und P als Doppelpunkt (vgl. G. Stiner, *Monatsh. Math.* **4**, 100 (1893)). Soll die c_3 die unendlichferne Gerade einfach berühren, so muß E eine Parabel sein. Rationale Kurven 3. Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkt oder unendlich ferner Wendetangente sind von der kissoidalen Erzeugung ausgeschlossen. Sind G, G', Γ drei reelle Gerade, die ein gleichseitiges Dreieck bilden, so ist ihre Kissoide in bezug auf den Mittelpunkt O des Dreiecks, die sog. *Trisektrix von de Longchamps,* die in O einen isolierten Punkt hat. Sie kann auch auf folgende Weise erzeugt werden: Auf einem Kreis um O vom Radius r laufen zwei Punkte Q, Q' von A aus nach entgegengesetzten Richtungen mit Geschwindigkeiten, die sich wie 2 : 1 verhalten. Der Schnittpunkt P der beiden Tangenten in entsprechenden Punkten Q, Q' beschreibt die Trisektrix. Ihre Gleichung in Polarkoordinaten ϱ, θ ist (vgl. de Longchamps, *Cours de Problèmes,* Paris 1898, Vol. I, p. 174)

$$\varrho \cos 3\theta = r. \tag{1}$$

Ähnlich kann man auch das *Descartessche Blatt* (Folium Cartesii), dessen Gleichung gewöhnlich in der schon von Descartes (1638) gegebenen Form geschrieben wird

$$x^3 + y^3 = 3axy, \tag{2}$$

als Kissoide aus einer Ellipse und einer Geraden konstruieren. Die Fläche des Blattes ist gleich der Fläche zwischen den unendlichen Ästen und der Asymptote, nämlich $\frac{3}{2}a^2$. Ist A ein Punkt auf der Tangente des Scheitels S (vgl. Fig. 1), O der Knoten, $SA = SA'$, so ist der Schnittpunkt P von OA mit der Kurve der vierte harmonische Punkt zu O und A' in bezug auf A. Hienach kann die Kurve konstruiert werden.

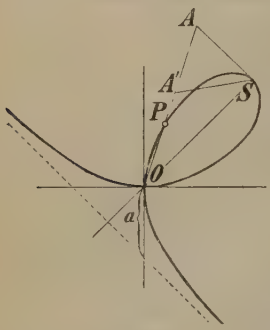


Fig. 1.

Sind bei der kissoidalen Erzeugung einer rationalen c_3 aus drei Geraden $\mathsf{G}, \mathsf{G}', \Gamma$ die Geraden G, G' isotrop, die Ellipse E also ein Kreis K durch den Pol D, so entsteht eine zirkulare c_3 mit Doppelpunkt in D. Der Schnittpunkt B von G und G', d. i. der Mittelpunkt von K, ist außerordentlicher Brennpunkt der Kurve. *Jede solche rationale zirkulare c_3 ist Inverse eines durch D gehenden Kegelschnittes* A *in bezug auf einen Kreis* K' *um D und Fußpunktskurve einer Parabel* P, *die zu* A *in bezug auf* K *polarreziprok ist.* Die Asymptotenrichtungen von A geben die Richtungen der Tangenten des Doppelpunktes in D. Bildet man die Kissoide aus K und Γ durch Subtraktion von dem dann auf K liegenden Punkte D aus, so sind die beiden Geraden, die aus D nach den gemeinsamen Punkten von K und Γ gehen, die Doppelpunktstangenten in D. Es lassen sich folgende Hauptlagen unterscheiden.

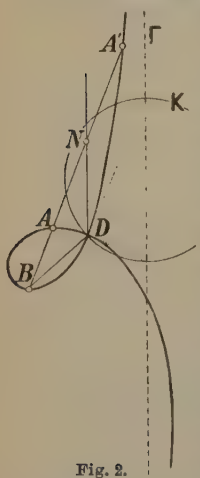


Fig. 2.

I. Γ geht durch den Mittelpunkt von K. Die Tangenten in D sind zueinander senkrecht, B liegt auf der Kurve (Fig. 2). Die c_3 heißt (schiefe) *Strophoide* (focale à nœud). Sie ist Fußpunktskurve einer Parabel für einen Punkt der Direktrix. Von A. Quetelet (*Diss.*, Gent 1819) wurde sie definiert als *Ort der Brennpunkte aller Schnitte eines Kreiskegels, deren Ebenen ein Büschel bilden, dessen Achse den Kegel berührt und im Berührungspunkt zur betreffenden Erzeugenden senkrecht steht.*

Hieraus fließt folgende ebene Konstruktion: *Gegeben ein fester Winkel BDE; man mache auf jedem Strahl durch B, der den Schenkel DE in N schneidet, $NA = NA' = ND$, so beschreiben die Punkte A, A' die Strophoide. Die Strophoide ist ferner der Ort der Schnittpunkte der Tangenten, die von zwei festen Punkten aus an konzentrische Kreise* gehen (van Rees, *Corr. math.* **5**, 361 (1829)), und *sie ist der Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die von einem beliebig gegebenen Punkte aus an konfokale Kegelschnitte gezogen werden können* (Chasles, *Bull. Ac. Brux.* **2**, 35 (1835)). In bezug auf den außerordentlichen Brennpunkt B ist die Strophoide von der ersten Kategorie (s. Kap. XXI, § 1).

Wählt man D so, daß die Strophoide symmetrisch wird, so heißt sie *gerade Strophoide* oder nach J. Booth *Logozyklika* (*A Treatise on some new geom. Methods* I, London 1873; vgl. S. Günther, *Parabol. Logarithmen und parabol. Trigonometrie*, Leipzig 1882). An Stelle des Kegels in der Queteletschen Erzeugung tritt ein Kreiszylinder. Die Gleichung der geraden Strophoide lautet

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - x^2). \tag{3}$$

oder in Polarkoordinaten, für die der Scheitel der Pol ist und die Scheiteltangente Polarachse,

$$\varrho = a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta. \tag{3*}$$

Die Fläche ihrer Schleife ist $2a^2 - \frac{1}{2}a^2\pi$; die Fläche zwischen den unendlichen Ästen und der Asymptote $2a^2 + \frac{1}{2}a^2\pi$.

II. Wenn Γ den Kreis K berührt, so hat die erzeugte c_3 in D eine Spitze. Man heißt sie bei beliebiger Lage von D *schiefe Kissoide*. Liegt D dem Berührungspunkt von Γ diametral gegenüber, so ergibt sich die symmetrische Form, die schon im Altertum zur Lösung des delischen Problems der Würfelverdoppelung aufgestellte *Kissoide des Diokles* (zw. 250 und 100 v. Chr.). *Die (schiefen) Kissoiden sind Fußpunktskurven von Parabeln für Punkte der Scheiteltangente.* Bildet man die Kissoide durch Subtraktion der Radienvektoren aus der Kissoide des Diokles und ihrem erzeugenden Kreis, so erhält man eine gerade Strophoide. Die Gleichung der Kissoide des Diokles lautet:

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2. \tag{4}$$

Die Fläche zwischen Kurve und Asymptote ist $3a^2\pi$, d. h. das Dreifache des Grundkreises (Huygens 1658). Die Differenz d zwischen der Gesamtlänge der Kissoide des Diokles und der

Asymptote ist eine endliche Größe (P. Fuß, *Mém. Pet.* (5) **9**, 184 (1824))

$$d = 4a\{\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3}) - 2\}. \tag{5}$$

III. Halbiert Γ den zu D gehörigen Radius von K senkrecht, so entsteht eine symmetrische c_3, die *Trisektrix des Maclaurin* heißt (*Geom. organica,* London 1720, 23). Ihre kartesische Gleichung ist

$$2x(x^2+y^2) = a(3x^2-y^2). \tag{6}$$

Durch die affine Transformation $x = \xi/\sqrt{3}$, $y = \eta$ geht aus ihr das Descartessche Blatt hervor. Ihre Polargleichung, bezogen auf den außerordentlichen Brennpunkt B, lautet

$$\varrho\cos\tfrac{1}{3}\theta = \tfrac{1}{2}a. \tag{7}$$

Die Kurve ist Fußpunktskurve einer Parabel in bezug auf den Punkt der Achse, der von der Direktrix denselben Abstand hat wie der Brennpunkt.

Im Anschlusse hieran seien noch zwei andere Typen rationaler Kurven 3. Ordnung aufgeführt, die von der kissoidalen Erzeugung ausgeschlossen sind. Die eine hat eine unendlich ferne Wendetangente; sie ist *die negative Fußpunktskurve einer Parabel in bezug auf den Brennpunkt* und heißt nach R. C. Archibald (*Diss.,* Straßburg 1900) *Tschirnhausens Kubik.* Sie ist nach Laguerre (*Nouv. Ann. math.* (3) **2**, 16 (1883) = *Œuvres* II, 645) auch die *Katakaustik einer Parabel für Parallelstrahlenbüschel beliebiger Richtung.* Ihre Gleichung ist

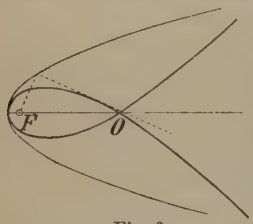


Fig. 3.

$$x^3 + a(x^2 - 3y^2) = 0 \tag{8}$$

oder in Polarkoordinaten für einen Pol F, der die Strecke vom Scheitel der Kurve bis zum Knoten im Verhältnis 1 : 8 teilt (vgl. Fig. 3),

$$\varrho\cos^3\tfrac{1}{3}\theta = -\tfrac{1}{3}a. \tag{9}$$

Die Fläche ihrer Schleife ist $\frac{8}{45}a^2\sqrt{3}$.

Der zweite Typus hat einen unendlich fernen isolierten Punkt (in der Richtung der x-Achse); man leitet ihn aus einem Kreise K und einer Geraden G auf folgende Weise ab. Es sei $OB = b$ ein zu G senkrechter Durchmesser von K, so ziehe man beliebig durch O eine Gerade, die G und K in R und Q schneide,

und bestimme einen Punkt P, für den $RP \parallel OB$ und $QP \parallel \mathsf{G}$, so beschreibt P eine symmetrische c_3 mit der Gleichung

$$xy^2 = a^2(b - x). \tag{10}$$

Die Fläche zwischen Kurve und Asymptote ist $ab\pi$ (vgl. Wieleitner, *Mtsh. f. Math.* **18**, 132 (1907)). Für $a = b$ entsteht die sog. *Versiera* der Agnesi (*Instituzioni analit.*, Mailand 1748), deren Benennung aber schon von G. Grandi (1718) herrührt, und für $a = \frac{1}{2}b$ die zur Versiera affine *Geometrische Quadratrix* von Ozanam (*Géom. pratique*, Paris 1684).

§ 2. Rationale Kurven vierter Ordnung, vorzugsweise als Kissoiden und Konchoiden.

Die Kissoide zweier Kreise K, K' für einen Pol D auf einem der Kreise ist eine bizirkulare c_4 mit Doppelpunkt in D. *Jede solche rationale, bizirkulare c_4 ist Inverse eines durch den Pol D nicht hindurchgehenden Kegelschnittes E und daher Fußpunktskurve eines Mittelpunktkegelschnittes E', der zu E polarreziprok ist in bezug auf den Inversionskreis.* Für eine beliebige Kurve dieser Art existieren vier Kreispaare, die zur kissoidalen Erzeugung benutzt werden können; zwei von ihnen sind imaginär (Teixeira, *Ann. di mat.* (3) **11**, 9 (1905)). Als isotrope Kurve hat jede rationale bizirkulare c_4 im gewöhnlichen Sinne eine Potenz in bezug auf jeden Punkt der Ebene (vgl. Kap. XX, § 4).

Die Fläche der Fußpunktskurve eines Mittelpunktkegelschnittes mit der Gleichung $x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$ hat, wenn der Pol die Koordinaten α, β hat, den Wert

$$F_E = \tfrac{1}{2}\pi(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2), \tag{1}$$

$$F_H = \frac{a^2\alpha\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{2}$$

wo (1) für die Ellipse, (2) für die Hyperbel gilt. Die Fläche ist eine eigentliche, solange der Pol nicht im Äußeren des Kegelschnittes liegt (vgl. Wieleitner, *Porto Ann. Ac. Polyt.* **2**, 180 (1907); *Spez. Kurven*, S. 10).

Liegt der Mittelpunkt des zweiten Kreises K' in dem Gegenpunkt des Punktes D auf dem ersten Kreise, so wird die erzeugte Kurve doppelt symmetrisch und ist Fußpunktskurve einer Ellipse oder Hyperbel in bezug auf den Mittelpunkt. Sie heißt *Boothsche Lemniskate* (s. d. oben zitierte Werk, S. 162 ff.) und hat im Mittelpunkt einen isolierten oder reellen Inflexionsknoten. *Jede*

Boothsche Lemniskate kann auch als Selbstkissoide durch Subtraktion der Radienvektoren eines einzigen Kreises erzeugt werden. Ihre Gleichung ist, wenn a, b (bzw. a, bi) die Halbachsen des zugehörigen Kegelschnittes sind,

$$(3) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2x^2 \pm b^2y^2.$$

Ist der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, so entsteht die *Bernoullische Lemniskate* (Jak. Bernoulli, *Act. Erud.*, Leipzig, September 1694). Deren Gleichung lautet

$$(4) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

oder in Polarkoordinaten

$$(5) \qquad \varrho = a\sqrt{\cos 2\theta}\,.$$

Die vier außerordentlichen Brennpunkte jeder Boothschen Lemniskate liegen auf den Achsen in der halben Entfernung der Brennpunkte des Grundkegelschnittes. Verbinden wir die zwei reellen unter den vier Brennpunkten M, M_1 mit einem Punkte P der Kurve, und ist O der Mittelpunkt, so gilt die Beziehung

$$(6) \qquad \overline{MP}^2 \cdot \overline{M_1P}^2 = \overline{OM}^4 + \tfrac{1}{2}(a^2 \pm b^2)\,\overline{OP}^2.$$

Für die Bernoullische Lemniskate ist $a^2 - b^2 = 0$, und man erhält die bekannteste Eigenschaft dieser Kurve

$$(7) \qquad MP \cdot M_1P = \overline{OM}^2.$$

Die Fläche einer Boothschen Lemniskate ist im elliptischen Falle $\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$, im hyperbolischen Falle hat jede Schleife die Fläche $\frac{1}{2}(a^2+ab-b^2)$, bei der Bernoullischen Lemniskate $\frac{1}{2}a^2$.

Die Bernoullische Lemniskate hat auch in den Kreispunkten Inflexionsknoten. Unterwirft man sie irgendeiner (reellen oder imaginären) projektiven Transformation, so entsteht die schon auf S. 424 behandelte *projektive Lemniskate.*

Spezialfälle der dort gegebenen Erzeugung sind die folgenden: Durch die Schnittpunkte irgendeiner Tangente eines Kegelschnittes mit den Achsen ziehe man die Parallelen zu den Achsen. Der Schnittpunkt P dieser beiden Parallelen beschreibt eine *Kreuzkurve,* wenn der Kegelschnitt eine Ellipse, eine *Kohlenspitzenkurve,* wenn er eine Hyperbel ist. Ihre Gleichungen sind

$$(8) \qquad x^2y^2 = a^2y^2 \pm b^2x^2.$$

Sie sind die Polarreziproken zu den bezüglichen Evoluten der Kegelschnitte in bezug auf diese selbst.

Die gewöhnliche Konchoide einer Geraden Γ (s. Kap. XXI, § 1) ist eine rationale c_4 und heißt *Konchoide des Nikomedes* (zw. 250 und 150 v. Chr.). Sie hat in bezug auf den Pol die Polargleichung, wo a der Abstand des Poles von Γ ist,

$$\varrho = \frac{a}{\sin\theta} + l, \tag{9}$$

während ihre kartesische Gleichung, bezogen auf Γ als x-Achse und eine durch den Pol gehende y-Achse, lautet

$$x^2y^2 = (y + a)^2(l^2 - y^2). \tag{10}$$

Im Pole ist ein Knoten, eine Spitze oder ein isolierter Punkt, je nachdem $l >, =, < a$. Die Gerade Γ ist Tangente des unendlich fernen Berührungsknotens. Wird l an den Radiusvektor der Geraden Γ unter dem Winkel 45^0 angetragen, so erhält man die von Dürer in anderer Weise erzeugte und von ihm *Muschellinie* genannte Kurve (*Underweysung d. Messung m. d. Zirckel usw.*, Nürnberg 1525; vgl. H. Wieleitner, *Sitzgsber. Ak. Wien* **116**, Abt. IIa, 1267 (1907)). Die in Rede stehende Konchoidenkonstruktion kann ersetzt werden durch das Abrollen einer bestimmten rationalen c_4 auf einer festen Parabel. Diese c_4 ist wahrscheinlich die von Eudoxus (408—355 v. Chr.) als *Kampyla* bezeichnete Kurve. Sie hat einen isolierten Punkt im Anfangspunkt und einen Berührungsknoten im unendlich fernen Punkte der x-Achse, für den die unendlich ferne Gerade Tangente ist. Ihre Gleichung lautet

$$y^4 = a^2(x^2 + y^2). \tag{11}$$

Sie kann als Selbstkissoide einer Parabel durch Subtraktion der Radienvektoren des Brennpunktes erzeugt werden. Ihre Inverse hat die Polargleichung

$$\varrho = a\sin^2\theta. \tag{12}$$

Diese ist eine isotrope c_6 und heißt nach F. Münger (*Diss.*, Bern 1894) *Doppeleilinie* (vgl. de Jans, *Handel. 11. en 12. Vlaamsch Natuur Congr.* 1907/8, S. 12 bezw. 127).

Ersetzt man im vorigen die Gerade Γ durch einen Kreis K', der durch den Pol geht, so entstehen die gewöhnlichen und schiefen Konchoiden des Kreises K'. *Jede schiefe Konchoide eines Kreises in bezug auf einen Punkt des Kreises als Pol ist aber eine gewöhnliche Konchoide desselben Kreises für einen anderen Pol auf dem Kreisumfang.* Diese Konchoiden des Kreises heißen seit Roberval

Pascalsche Schnecken (nach Stefan Pascal, dem Vater von Blaise Pascal). Sie haben die Polargleichung

$$\varrho = 2a\cos\theta + l \tag{13}$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = l^2(x^2 + y^2). \tag{14}$$

Der Anfangspunkt ist ein Knoten, eine Spitze oder ein isolierter Punkt, je nachdem $l <, =, > 2a$ ist. Im Falle der Spitze nennt man die Kurve *Kardioide* oder „Herzlinie“ (vgl. Weinmeister, *Zeitschr. math. Unterr.* **15**, 245 (1884)). Alle Pascalschen Schnecken haben Spitzen in den unendlich fernen Kreispunkten. *Sie sind die Inversen der Kegelschnitte in bezug auf einen Brennpunkt und die Fußpunktskurven der Kreise.* Die Polkurven der konchoidischen Bewegung sind hier zwei Kreise (vgl. § 4). Die Gesamtfläche einer Pascalschen Schnecke ist $(2a^2 + l^2)\pi$, die der Kardioide im besonderen $6a^2\pi$.

Die (gewöhnliche) Konchoide eines Kegelschnittes für einen Brennpunkt zerfällt in zwei rationale c_4 mit drei endlichen Doppelpunkten, von denen einer im Pol liegt (s. bei Teixeira, *Traité* I, 312). Die Konchoiden der Kegelschnitte in bezug auf einen Scheitel wurden von Cardinaal (*Arch. Musée Teyler* (2) **8**, 165 (1902)) untersucht.

Die konchoidische Bewegung kann in folgender Weise verallgemeinert werden. Es sei Γ eine Kurve, O ein fester Punkt der festen Ebene Δ. In der beweglichen Ebene Δ' sei ebenfalls ein fester Punkt P und eine feste Gerade G gegeben. Wir verschieben Δ' gegen Δ so, daß immer G durch O geht und P auf Γ läuft. Diese Bewegung geht in die konchoidische über, wenn P auf G zu liegen kommt. Ist Γ eine Gerade, so heißt der Mechanismus *Schleifschieber*, für Γ als Kreis *Schleifkurbel*. Wir betrachten nur den ersteren Fall (im übrigen vgl. F. Ebner, *Leitfaden d. techn. wicht. Kurven*, Leipzig 1906). Die Schleifschieberbewegung ist zu sich selbst reziprok. Beide Polbahnen sind Verallgemeinerungen der Kampyla. Liegt O auf Γ, so ergibt sich die Umkehrung der konchoidischen Bewegung. Es rollt dann eine Parabel auf einer Kampyla ab. Nennt man den Fußpunkt des von P auf G gefällten Lotes P' (vgl. Fig. 4), so be-

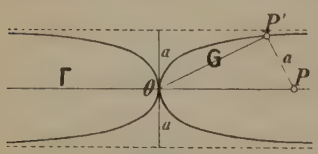


Fig. 4.

schreibt P' eine sog. *Kappakurve* (A. Aubry, *J. math. spéc.* (4) **4**, 200 (1895)) mit der Polargleichung ($PP' = a$)

$$\varrho = a \operatorname{ctg} \theta. \tag{15}$$

Durch Inversion wird die Kurve nur um 90^0 gedreht. Alle anderen Punkte von $OP'(\mathsf{G})$ beschreiben (gewöhnliche) Konchoiden der Kappakurve, sog. *schiefe Kappakurven.* Für die Fläche zwischen der Kappakurve und den beiden Wendeasymptoten fand Huygens den Wert $a^2\pi$.

In dem Sonderfalle der Schleifschieberbewegung, wo der Abstand (O, Γ) so groß ist wie (P, G), heißt der Mechanismus *symmetrisches Schleifschiebergetriebe.* Die Trajektorie zerfällt in eine Gerade und eine rationale zirkulare c_3. Wir erhalten so alle schon oben aufgeführten Kurven dieser Art als Bahnkurven beim Abrollen zweier kongruenten Parabeln, deren Scheitel in einem Augenblicke zusammenfallen.

Die Konstruktion der Kappakurve läßt sich zu folgender Konstruktion verallgemeinern, die in jedem Falle zu einer rationalen c_4 mit unendlich fernem Doppelpunkte führt. Gegeben zwei Kreise O und K mit den Mittelpunkten O und K. Jedem Punkte A von K ordnet man die Polare in bezug auf O zu und zieht durch A die Parallele zu KO. Diese schneidet die Polare in einem Punkte P, dessen Ort in Frage kommt. Sind O und K konzentrisch und das Verhältnis der beiden Kreisradien $\sqrt{2}$, so ergibt sich, wenn man von dem größeren Kreis (dessen Radius a sei) die Polarfigur sucht, die sog. *Trisekante* von Delanges (1783) mit der Polargleichung

$$\varrho \cos \tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2} a. \tag{16}$$

Sie hat zwei endliche Doppelpunkte und einen Inflexionsknoten im Unendlichen.

Sind die Radien von O und K gleich und berühren sich, so erhält man das *Zweihorn* (Ch. A. Scott, *Interm. math.* **3**, 250 (1896)) mit der Gleichung

$$(x^2 + 2ay - a^2)^2 + y^2(x^2 - a^2) = 0. \tag{17}$$

Diese Kurve hat zwei Spitzen in den Endpunkten des auf der x-Achse liegenden Durchmessers von O und einen isolierten Punkt im unendlich fernen Punkt der y-Achse.

Läßt man den Radius des Kreises O gleich Null werden, d. h. ersetzt man O durch ein isotropes Geradenpaar, so erhält die in gleicher Weise erzeugte Kurve einen Berührungsknoten

im Endlichen und wird *polyzomal*, d. h. durch eine Gleichung von der Form

$$\sqrt{U}+\sqrt{V}+\sqrt{W}=0 \tag{18}$$

darstellbar, wo U, V, W quadratische Funktionen von x, y sind (Cayley, *Trans. R. S. Edinb.* **25**, 1 (1869)).

Fällt zu gleicher Zeit der Mittelpunkt von K mit dem von O zusammen (während O Nullkreis bleibt), so entsteht wieder die Kappakurve, deren Gleichung demgemäß in die komplexe Form gebracht werden kann

$$\sqrt{y(y+2bi)}+\sqrt{y(y-2bi)}-2ix=0. \tag{19}$$

§ 3. Bizirkulare Kurven vierter und zirkulare Kurven dritter Ordnung vom Geschlechte 1.

Eine bizirkulare c_4 hat in den imaginären Kreispunkten Doppelpunkte. Sie wird also von jedem Kreise nur in vier im Endlichen liegenden, reellen oder paarweise imaginären Punkten geschnitten. *Diese vier Punkte können als Grundpunkte zweier projektiven Kreisbüschel genommen werden, deren Erzeugnis die Kurve ist.* Dabei wird die Projektivität der Kreisbüschel dadurch definiert, daß die Punktreihen ihrer Zentren projektiv sind. *Die 16 (einfachen) Brennpunkte einer bizirkularen c_4 liegen zu je vieren in 4 Kreisen* (Satz von Hart; vgl. Salmon-Fiedler, *Höhere K.*, 2. Aufl., S. 318; für die ganze Theorie vgl. Casey, *Proc. R. Ir. Ac.* **10**, 44 (1869); *Transact. R. Ir. Ac.* **24**, 457 (1871)). Die Mittelpunkte der vier Kreise bilden die Konfiguration eines Dreiecks mit seinem Höhenschnittpunkt. Jeder der vier Kreise schneidet jeden andern orthogonal und hat das Dreieck der Mittelpunkte der andern zum Polardreieck. *Zu jedem der Kreise* K *gehört ein „Fokalkegelschnitt“* E, *der ihn in den vier auf ihm liegenden Brennpunkten schneidet, und die Kurve wird eingehüllt von allen Kreisen, deren Mittelpunkte auf* E *liegen und die* K *orthogonal schneiden. Jeder dieser Kreise berührt die Kurve doppelt. Die vier Fokalkegelschnitte* E *sind konfokal; ihre Brennpunkte sind die vier außerordentlichen Brennpunkte der Kurve.* Ist ein Fokalkegelschnitt E und der zugehörige Kreis K gegeben, so sind die Mittelpunkte der übrigen Dreiecke die Ecken des K und E gemeinschaftlichen Polardreiecks. In den vier Punkten, in denen K die c_4 schneidet, berührt der Krümmungskreis vierpunktig. Solcher Punkte gibt es also ebenfalls 16. *Die c_4 ist in bezug auf jeden der Mittelpunkte der vier Kreise* K *anallagmatisch* (s. Kap. XXI,

§ 3), *wenn* K *selbst als Inversionskreis genommen wird.* Von den einfachen Brennpunkten sind nur vier reell, von den außerordentlichen zwei. Für irgend drei konzyklische einfache Brennpunkte besteht eine Relation der Art

$$\lambda\varrho + \mu\varrho' + \nu\varrho'' = 0, \tag{1}$$

wo ϱ, ϱ', ϱ'' die Abstände eines Kurvenpunktes P von den drei Brennpunkten bedeuten und λ, μ, ν konstante Faktoren sind.

Die bizirkularen c_4 vom Geschlechte 1 sind Kurven gleicher Potenz $\mathcal{P}$ für die Fußpunktskurven der Mittelpunktkegelschnitte (s. Kap. XXI, § 4). Wir haben hauptsächlich zwei spezielle Familien, die Kurven gleicher Potenz für die Boothschen Lemniskaten uud die Kurven gleicher Potenz für die Pascalschen Schnecken. Im ersteren Falle muß K mit E konzentrisch sein. Diese Kurven heißen *spirische Linien des Perseus* (ca. 130 v. Chr.). Sie treten als Schnitte der Flächen auf, die durch Rotation eines Kreises um eine Achse entstehen (Spire, Torus), wenn die schneidende Ebene parallel zur Achse der Fläche gelegt wird. Ihre Gleichung ist, wenn die Potenz $\mathcal{P} = c$ sein soll,

$$(x^2 + y^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2) - c = 0. \tag{2}$$

Sie haben also zwei Symmetrieachsen, und der Mittelpunkt ist der einzige Punkt, für den sie anallagmatisch sind (vgl. de la Gournerie, *J. de math.* (2) **14**, 9 u. 103 (1869)). *Jede spirische Linie des Perseus ist isoptische Kurve von zwei Kegelschnitten.* Sind F, F_1 die reellen außerordentlichen Brennpunkte, O der Mittelpunkt und P ein beliebiger Punkt der Kurve, so besteht die Beziehung

$$\overline{FP}^2 \cdot \overline{F_1P}^2 = \alpha\overline{OP}^2 + \beta, \tag{3}$$

wo α und β Konstante sind. Die Kurven gleicher Potenz der Bernoullischen Lemniskate haben wie diese in den imaginären Kreispunkten Inflexionsknoten und heißen *Cassinische Linien* (s. dessen *Éléments d'astronomie,* Paris 1749). Für sie ist $\alpha = 0$ und die Relation (3) wird zu

$$FP \cdot F_1P = \sqrt{\beta} = \text{const}. \tag{4}$$

Die Kurven gleicher Potenz der Pascalschen Schnecken haben gleich diesen in den unendlich fernen Kreispunkten Spitzen, und eine Symmetrieachse. Auch der Fokalkegelschnitt E ist hier ein Kreis. Die Kurve heißt *Cartesisches Oval* (Descartes, *La Géométrie,* Leyden 1637). Ihre Gleichung ist

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2(x^2 + y^2) - c = 0. \tag{5}$$

Das Cartesische Oval hat nur einen außerordentlichen Brennpunkt und neun einfache Brennpunkte, von denen drei auf der Symmetrieachse liegen. Für diese gilt die Relation (1). Je nachdem sie alle drei reell sind oder nicht, scheiden sich die Cartesischen Ovale in zwei Familien. Die erste von diesen, die Descartes selbst betrachtet hat, besteht aus zwei einander einschließenden Ovalen, deren äußeres eine Einbuchtung haben kann. *Für die drei Brennpunkte auf der Achse ist die Kurve anallagmatisch und zugleich von der ersten Kategorie* (s. Kap. XXI, § 1). *Ein Cartesisches Oval ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei Kreisperipherien in einem bestimmten Verhältnis stehen* (Newton, *Philosophiae nat. principia math.*, London 1687). Geht von einem der drei in gerader Linie liegenden Brennpunkte ein Lichtstrahlenbüschel aus, so treffen sich die an der Kurve gebrochenen Strahlen bei bestimmtem Brechungsverhältnis, das von den Koeffizienten der Relation (1) abhängt, in einem der beiden anderen Brennpunkte. *Außerdem ist das Cartesische Oval Antikaustik des Kreises in bezug auf einen leuchtenden Punkt bei Brechung* (wird zur Pascalschen Schnecke bei Reflexion). Die acht Wendepunkte eines Cartesischen Ovals liegen auf einer zirkularen c_3 (Roberts, *Proc. Lond. Math. S.* **3**, 106 (1870); Bibliographie der Cartesischen Ovale bei Liguine, *Bull. sc. math.* (2) **6**, 40 (1882) und H. Brocard, *Interm. math.* **3**, 238 (1896)).

Jede bizirkulare c_4 geht durch Inversion von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene aus in eine ebensolche Kurve über, für einen Pol auf der Kurve aber in eine zirkulare c_3. Läßt man bei der oben gegebenen Erzeugung der bizirkularen c_4 den Fokalkegelschnitt E eine Parabel werden, so entsteht eine zirkulare c_3, indem die unendlich ferne Gerade sich abtrennt. Der Brennpunkt der Fokalparabel ist der einzige außerordentliche Brennpunkt der c_3. *In den Zentren der vier Kreise* K, *auf denen die 16 einfachen Brennpunkte auch hier liegen, wird die Kurve von Parallelen zur reellen Asymptote berührt.* Die Kurve geht außerdem durch die drei Höhenfußpunkte der durch die vier Kreismittelpunkte bestimmten Konfiguration. Die Tangenten der c_3 in diesen Höhenfußpunkten schneiden sich in dem Punkt, wo die reelle Asymptote die Kurve trifft. Es ist dies ein Punkt des Feuerbachschen Kreises der Konfiguration, der auch durch den außerordentlichen Brennpunkt geht. Die Direktrizen der vier Fokalparabeln laufen durch die Mittelpunkte der Umkreise der vier Dreiecke der Konfiguration.

In der Relation (1) ist für eine zirkulare c_3 $\lambda \pm \mu \pm \nu = 0$

zu nehmen. Schneidet irgendein Kreis die c_3 in 4 Punkten A, B, C, D, so liegen die 3 Paare der Punkte, in denen die Gegenseiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ die Kurve schneiden, in je einer Parallelen zur reellen Asymptote. Hieraus lassen sich spezielle Sätze über die berührenden und Krümmungskreise der c_3 ableiten. *Jede zirkulare c_3 läßt sich erzeugen durch ein Strahlbüschel und ein dazu projektives Büschel konzentrischer Kreise;* der Scheitel des Strahlbüschels ist der Schnittpunkt der Kurve mit der reellen Asymptote, der Mittelpunkt der Kreise der außerordentliche Brennpunkt (vgl. Czuber, *Zschr. Math. Phys.* **32**, 257 (1887)).

Unter den zirkularen Kurven 3. Ordnung vom Geschlechte 1 ist ausgezeichnet die, deren außerordentlicher Brennpunkt auf ihr liegt. Es ist die *van Reessche Fokale* oder *Fokale* schlechthin (*Corr. math.* **5**, 361 (1829)). *Sie ist der Ort der Brennpunkte der ebenen Schnitte eines beliebigen Kegels zweiter Ordnung, wenn die Ebenen alle durch eine zu einer Erzeugenden senkrechte Tangente des Kegels gehen. Die Kreise eines Büschels werden von den Tangenten, die von einem festen Punkte ausgehen, in Punkten einer Fokale berührt. Der Ort aller Punkte der Ebene, von denen aus zwei Strecken AB und CD unter gleichen Winkeln erscheinen, besteht aus zwei Fokalen* (Steiner, *J. f. Math.* **45**, 375 (1852) = *Werke* II, 487). Fällt B mit C zusammen, so gehen die Kurven in Strophoiden (vgl. § 1) über (Magnus, *Sammlung von Aufgaben usw.*, Berlin 1833, S. 265). *Der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar ist eine Fokale* (Chasles, *Bruxelles Bull.* **2**, 35 (1835); Schröter und Durège, *Math. Ann.* **5**, 50, 83 (1872), **6**, 85 (1873)); kommt in der Schar ein Kreis vor, ist er eine Strophoide. Es sei hinzugefügt, daß der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels eine bizirkulare c_6 vom Geschlechte 2 ist (vgl. Haller, *Arch. Math.* (3) **7**, 37 (1904) und G. Bauer, *München. Ber.* **35**, 97 (1905)). Weitere Einzelheiten und Literatur über bizirkulare c_4 und zirkulare c_3 bei Kohn, *Enzykl.* III C 5, S. 510 u. 551 ff.

§ 4. Zyklische Kurven.

Sind bei der Bewegung einer Ebene Δ' gegen eine feste Ebene Δ beide Polkurven Kreise, rollt also ein Kreis von Δ' auf einem Kreis von Δ, so beschreibt jeder Punkt der Ebene Δ' in der Ebene Δ eine *zyklische Kurve*. Ist R der Radius des festen, r der des beweglichen Kreises und hat der beschreibende Punkt P vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises den Abstand h, wird

ferner die Anfangslage so gewählt, daß P in einer Geraden mit den beiden Kreismittelpunkten und deren Berührungspunkt am nächsten liegt, so hat man für die durch P erzeugte zyklische Kurve die Parameterdarstellung

$$(1) \qquad \begin{cases} x = (R+r)\cos\omega - h\cos\dfrac{R+r}{r}\,\omega, \\ y = (R+r)\sin\omega - h\sin\dfrac{R+r}{r}\,\omega, \end{cases}$$

wo ω den Winkel am Zentrum des festen Kreises bedeutet, um den das Abrollen fortgeschritten ist. Ist $h \lesseqgtr r$, so heißt die Kurve *Trochoidale*, für $h = r$, also für einen Punkt auf dem Umfang des rollenden Kreises *Zykloidale*.

Eine zweite Erzeugung der zyklischen Kurven ist folgende: Zwei in O befestigte Gelenkstäbe von den Längen k und l drehen sich um O mit den Winkelgeschwindigkeiten $\varkappa$ und λ. In der Anfangslage seien sie entgegengesetzt gerichtet. Dann beschreibt der vierte Eckpunkt des durch die beiden Stäbe in jedem Augenblick bestimmten Parallelogramms eine zyklische Kurve. Die Kurven heißen *Epitrochoiden* für $\varkappa/\lambda > 0$, *Hypotrochoiden* für $\varkappa/\lambda < 0$. *Jeder Epi- oder Hypotrochoide entsprechen zwei Erzeugungsarten durch Rollen.* Für die Epitrochoide liegen bei beiden die Kreise so, daß der Kreis (r) den Kreis (R) an der Außenseite berührt. Aber das eine Mal schließt der Kreis (r) den Kreis (R) aus, das andere Mal ein. Bei der Hypotrochoide wird in jedem System der Kreis (r) vom Kreise (R) eingeschlossen. Für Epi- und Hypozykloiden gelten dieselben Unterscheidungen. Die Trochoidalen heißen ferner *gestreckt (geschweift)*, wenn $k\varkappa > l\lambda$, *verschlungen*, wenn $k\varkappa < l\lambda$. Zwischen beiden Formen stehen die Zykloidalen für $k\varkappa = l\lambda$, die hier als *gespitzte Trochoidalen* erscheinen (vgl. den *Bericht ü. d. gegw. Stand der Lehre v. den zyklischen Kurven* von E. Wölffing, *Bibl. math.* (3) **2**, 235 (1901)).

Eine spezielle Hypotrochoide entsteht aus (1) für $r = -\frac{1}{2}R$. Es ist dies für $h \neq r$ eine Ellipse, die für $h = r$ in den Durchmesser übergeht (Naṣîr Eddîn 1201—74). Für $r = R$ entsteht, wenn $h \neq R$, als Epitrochoide eine Pascalsche Schnecke, für $h = R$ die Kardioide. Ist $h = R + r$, so ergeben sich Trochoidalen, deren Polarkoordinatengleichung in bezug auf den Mittelpunkt des festen Kreises die Form hat

$$(2) \qquad \varrho = m\sin\mu\theta$$

Hierbei ist $m = 2(R + r)$, $\mu\theta = \frac{R}{R + 2r}\theta = \frac{R}{2r}\omega$. Sie heißen gewöhnlich *Rosenkurven* (Rhodoneen) (Guido Grandi, *Flores geom. usw.*, Florenz 1728). Für $\mu = 2$ und $\mu = 3$ entstehen das regelmäßige Vier- und Dreiblatt. Die Inversen der Rosenkurven wurden von A. Aubry *Ährenkurven* genannt (*J. math. spéc.* (4) **4**, 201 (1895)). Wir erhalten insbesondere für $\mu = 2$ die gleichseitige Kreuzkurve, für $\mu = 3$ die Trisektrix von de Longchamps, für $\mu = \frac{1}{2}$ die Trisekante und für $\mu = \frac{1}{3}$ die Trisektrix von Maclaurin.

Durch einen Grenzübergang ergibt sich aus den Gleichungen (1) für $\frac{R + r}{r}\omega = \varphi$, $Y = x - R\cos\omega$, $X = y$, $R = \infty$, indem man an der Grenze $R\sin\omega = R\omega = r\varphi$, $\cos\omega = 1$ macht, die Darstellung

$$X = r\varphi - h\sin\varphi, \quad Y = r - h\cos\varphi \tag{3}$$

für die *Trochoiden*, d. h. die Kurven, die beim Rollen eines Kreises auf einer Geraden von einem beliebigen Punkte der Ebene des Kreises beschrieben werden. Wir haben für $h > r$ verschlungene, für $h < r$ gestreckte Trochoiden. Für $h = r$ entsteht die *Zykloide* (Galilei 1599). Die Länge des Bogens der Zykloide zwischen zwei Spitzen ist $8r$ (Wren 1658), die Fläche zwischen diesem Bogen und der Geraden $3r^2\pi$ (Roberval 1638). *Die Zykloide ist Brachistochrone*, d. h. die Kurve, auf der ein der Schwere unterworfener Massenpunkt am raschesten den Weg zwischen zwei Punkten A, B durchläuft (Leibniz, Jak. Bernoulli u. a. 1697). *Sie ist, wenn man sie um die Leitgerade (Direktrix) umklappt, Tautochrone*, d. h. wo auch ein schwerer Massenpunkt auf ihr seine Bewegung beginnen mag, er kommt immer zur selben Zeit im tiefsten Punkte an (Huygens 1673). *Alle Trochoiden sind Parallelprojektionen der gewöhnlichen Schraubenlinie auf eine zu deren Achse senkrechte Ebene.*

Wird in den Formeln (1) r und $h = \infty$, so daß $t = r - h$ endlich bleibt, also $\frac{h}{r} = 1$, dann erhält man durch Grenzübergang

$$\begin{cases} x = (R + t)\cos\omega + R\omega\sin\omega, \\ y = (R + t)\sin\omega - R\omega\cos\omega. \end{cases} \tag{4}$$

Diese Gleichungen stellen eine *allgemeine Kreisevolvente* dar, d. h. die Kurve, die ein Punkt der Ebene einer Geraden beschreibt, wenn

die Gerade auf einem Kreise abrollt. Die Größe t ist dabei der Abstand des Punktes von der Geraden. Für $t = 0$ ergibt sich die gewöhnliche (gespitzte) Kreisevolvente (Fig. 5), während für $t > 0$ die Kurven gestreckt, für $t < 0$ verschlungen sind. Für $t = -R$ hat die Kurve die Polargleichung

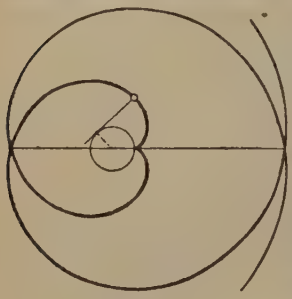


Fig. 5.

$$\varrho = R\theta \tag{5}$$

und heißt *Archimedische Spirale* (nach Archimedes † 212 v. Chr.), vgl. Fig. 6. Der auf einem Radiusvektor gemessene Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Windungen der Spirale ist überall $2R\pi$.

Die Inverse der Archimedischen Spirale mit der Polargleichung

$$\varrho\theta = c \tag{6}$$

heißt *hyperbolische Spirale*. Sie hat den Pol als doppelten asymptotischen Punkt und eine Asymptote im Abstande c vom Pol (s. Fig. 7). *Die hyperbolische Spirale ist eine Zentralprojektion der Schraubenlinie von einem Punkte der Achse aus auf eine zu dieser senkrechte Ebene.* Projiziert man die Schraubenlinie durch parallele Strahlen senkrecht zur Achse auf eine zur Richtung der Strahlen geneigte Ebene, so entsteht die *Sinuslinie* mit der Gleichung

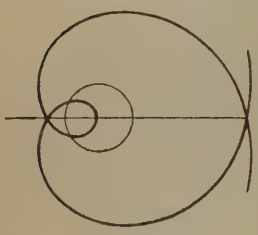


Fig. 6.

$$y = a \sin \frac{x}{c}. \tag{7}$$

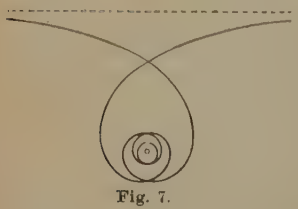


Fig. 7.

Es kann auch eine reelle Kurve sich ergeben, wenn in den Gleichungen (1) die Größen R, r, h komplexe Werte haben. Dann muß aber der absolute Betrag von $R + r, r$ und h derselbe sein und außerdem h zu $R + r$ konjugiert sein. Die Gleichungen können dann in die Form gebracht werden

$$\begin{cases} x = 2a \cos\omega \operatorname{ch}\vartheta\omega + 2b \sin\omega \operatorname{sh}\vartheta\omega, \\ y = 2a \sin\omega \operatorname{ch}\vartheta\omega - 2b \cos\omega \operatorname{sh}\vartheta\omega. \end{cases} \tag{8}$$

Die Kurven heißen *Pseudotrochoiden* und wurden von Wölffing

untersucht (*Zeitschr. f. Math.* **44**, 139 (1899)). Die Kurve, die man für $h = R + r$ erhält, hat in Polarkoordinaten die Gleichung

$$\varrho = a \operatorname{ch} \varkappa\theta \left[= \tfrac{1}{2} a(e^{\varkappa\theta} + e^{-\varkappa\theta})\right]. \tag{9}$$

Sie heißt *Summenspirale*. Für $h = -(R + r)$ entsteht die Kurve

$$\varrho = a \operatorname{sh} \varkappa\theta = \tfrac{1}{2} a(e^{\varkappa\theta} - e^{-\varkappa\theta}), \tag{10}$$

die *Differenzenspirale* genannt wird (H. Dittrich, *Progr.*, Breslau 1872). Die Inverse der Summenspirale ist die *Poinsotsche Spirale*, die in der Mechanik als Herpolhodie auftritt.

Eine allgemeine Zykloidale hat in natürlichen Koordinaten die Gleichung

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{\mathcal{R}^2}{b^2} = 1, \tag{11}$$

wo

$$a = \frac{4r(R+r)}{R}, \qquad b = \frac{4r(R+r)}{R+2r}.$$

Die gewöhnliche Kreisevolvente wird gegeben durch

$$\mathcal{R}^2 = 2Rs. \tag{12}$$

Für $R = \infty$, also $a = b = 4r$, erhält man aus (11) die Zykloide. *Die Evoluten und Evolutoiden einer Zykloidale sind der Grundkurve ähnlich, bei der Zykloide kongruent.*

Der Krümmungsmittelpunkt einer Zykloidale für einen Punkt P liegt auf der Polare von P in bezug auf den festen Kreis (Zehme, *Elementare u. analyt. Behandlung der versch. Zykloiden*, Iserlohn u. Elberfeld 1854); bei der Zykloide wird der Krümmungsradius durch die Leitgerade halbiert. Der zu einem Punkte P der Zykloidale gehörige Krümmungsmittelpunkt der Evolute liegt auf dem vom Mittelpunkt des festen Kreises nach P führenden Radiusvektor. *Jeder Durchmesser eines auf einem festen Kreise rollenden Kreises hüllt eine Zykloidale ein.* Eine Epizykloide mit nur einer Spitze ergibt sich, wenn man die n^{te} Katakaustik eines Kreises für einen leuchtenden Punkt der Peripherie sucht (für $n = 1$ die Kardioide).

Der Ort der Berührungspunkte aller von einem festen Punkte D an eine Zykloidale gehenden Tangenten — die sog. Berührungspunktkurve — *ist die Fußpunktskurve eines Kegelschnittes mit D als Doppelpunkt* (Juel, *Interm. math.* **1**, 243 (1894)). Die Berührungspunktkurve bleibt dieselbe für das System aller kongruenten Zykloidalen desselben Mittelpunkts. Der Kegelschnitt wird eine Parabel für die Zykloide, ein Kreis für die Kreisevolvente.

Den Gleichungen

$$\frac{s^2}{a^2} - \frac{\mathcal{R}^2}{b^2} = \pm 1 \tag{13}$$

entsprechen Zykloidalen mit (zum Teil) imaginären Rollkreisen. Man nennt diese Kurven *Pseudozykloidalen*. Das obere Zeichen entspricht der *Parazykloide*, das untere der *Hyperzykloide* (R. de Saussure, *Diss.*, Genf 1895, 41, *Amer. J.* **17**, 269 (1895)). Für $b = a$ heißt die Kurve (13) *Pseudozykloide. Für diese Pseudozykloidalen gelten dieselben Sätze wie für die Zykloidalen. Nur ist bei den Evoluten das Ähnlichkeitsverhältnis rein imaginär. Es ist die Evolute einer Parazykloide eine Hyperzykloide und umgekehrt.*

Zwischen den beiden Arten von Pseudozykloidalen steht ein Kurvenpaar mit der natürlichen Gleichung

$$\frac{s^2}{a^2} - \frac{\mathcal{R}^2}{b^2} = 0. \tag{14}$$

Die einzelne Kurve hat also die natürliche Gleichung

$$\mathcal{R} = \varkappa s, \tag{15}$$

die zu der Polargleichung führt

$$\varrho = \varrho_0 e^{\varkappa\theta}. \tag{16}$$

Das ist die *logarithmische Spirale* (Descartes und Torricelli um 1640). *Diese Kurve schneidet alle von ihrem im Koordinatenanfangspunkt liegenden asymptotischen Punkt ausgehenden Radienvektoren unter demselben Winkel* μ ($\operatorname{ctg}\mu = \varkappa$). Daher ist für das Spiralenpaar (14) die Berührungspunktkurve ein Kreispaar, d. i. die Fußpunktskurve eines Punktepaares. *Die logarithmische Spirale ist gegenüber jeder Ähnlichkeitstransformation invariant; jede Evolutoide und Fußpunktskurve, sowie jede Inverse in bezug auf den Pol ist mit der Grundkurve kongruent. Die Polarnormale ist gleich dem Krümmungsradius, die Polartangente gleich der Länge des Bogens bis zum Pole.*

Zu jeder zykloidalen Kurve, mit Ausnahme der Zykloide, gehört als Fußpunktskurve in bezug auf den Mittelpunkt des festen Kreises eine Rosenkurve, deren erzeugende Kreise dasselbe Radienverhältnis wie die der Grundkurve haben. Der gewöhnlichen Kreisevolvente entspricht so die Archimedische Spirale; die Summen- und Differenzspirale, die nun als Kissoiden zweier logarithmischen Spiralen erscheinen, sind Fußpunktskurven der Hyperzykloide und Parazykloide. Die Mannheimschen Kurven und die Örter des Grundkreismittelpunktes beim Rollen auf einer Geraden sind Kegelschnitte für alle Zykloidalen.

§ 5. Spezielle zyklische und andere Kurven mit kinematischer Erzeugung.

Ist eine konstante Strecke $PQ = a$ gezwungen, mit ihren beiden Endpunkten auf zwei gegebenen Geraden Γ, Γ' zu gleiten, so heißt die dadurch definierte Bewegung *elliptisch*. Denn jeder Punkt der Ebene beschreibt eine Ellipse. Die Gerade PQ aber hüllt eine sog. *schiefe Astroide* ein, die zur *regulären Astroide* wird, wenn $\Gamma \perp \Gamma'$. Diese ist eine Hypozykloide mit dem Radienverhältnis $r/R = 1/4$ und hat die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \tag{1}$$

oder

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27\,a^2x^2y^2 = 0 \tag{2}$$

und in Linienkoordinaten

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = a^2. \tag{3}$$

Die Parallelkurve zu ihr im Abstande c zerfällt in die beiden gegeneinander um $\frac{1}{2}\pi$ gedrehten, konzentrischen schiefen Astroiden

$$u^2 + v^2 = [auv \pm c(u^2 + v^2)]^2, \tag{4}$$

da die reguläre Astroide Richtungskurve ist (s. Kap. XX, § 2). Ihre Reziproke ist eine gleichseitige Kreuzkurve, die demnach von der ersten Kategorie in bezug auf den Mittelpunkt ist. Die Gesamtlänge der regulären Astroide ist $6a$, ihre Fläche $\frac{3}{8}a^2\pi$. Die Fußpunktskurve der regulären Astroide in bezug auf den Mittelpunkt ist das regelmäßige Vierblatt, nämlich eine Rosenkurve mit der Polargleichung $\varrho = \frac{1}{2}a \sin 2\theta$.

Unterwirft man eine reguläre Astroide einer (auch imaginären) Kollineation, so entstehen die auf S. 425 schon erwähnten *projektiven Astroiden*. Zu dieser Gattung gehört die zur regulären Astroide affine Kurve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \tag{5}$$

die Evolute eines Mittelpunktkegelschnittes mit den Halbachsen

$$a' = ab^2/(b^2 - a^2), \quad b' = a^2b/(b^2 - a^2),$$

wo für die Hyperbel überall ib statt b zu setzen ist (vgl. die reziproken Kurven in § 2). Die Evolute einer Ellipse ist die Diakaustik einer Geraden für Strahlen, die von einem leuchtenden Punkte ausgehen (Salmon-Fiedler, *Höh. cb. Kurven*, S. 126)

Zur elliptischen Bewegung gehört folgende umgekehrte Bewegung: Gegeben zwei feste Punkte P, Q; durch sie müssen zwei feste unter dem Winkel ω geneigte Gerade laufen. Jeder Punkt der Ebene beschreibt dann eine Pascalsche Schnecke, gewisse Punkte eine Kardioide, jede Gerade der Ebene umhüllt einen Kreis. Die Bewegung heißt *kardioidisch*. Die Kardioide gehört mit der Bernoullischen Lemniskate zu den von H. de la Goupillière (*Nouv. Ann. math.* (2) **15**, 97 (1876)) *Sinusspiralen* genannten Kurven mit der allgemeinen Polargleichung

$$\varrho = a \sin^{\frac{1}{n}} n\theta \quad [= a \cos^{\frac{1}{n}} n\theta', \text{ wo } \theta' = \frac{\pi}{2n} - \theta]. \tag{6}$$

Hier ist für die Kardioide der Index $n = \frac{1}{2}$, für die Bernoullische Lemniskate $n = 2$ zu nehmen. Die Sinusspiralen haben folgende Eigenschaften: *Dreht sich der Radiusvektor gleichförmig um den Pol, so dreht sich die Tangente (oder Normale) mit n-facher Geschwindigkeit gleichförmig um den Inzidenzpunkt; die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor steht zu diesem in dem konstanten Verhältnis* $1 : (n+1)$. Die natürliche Gleichung der Sinusspiralen ist

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\mathfrak{R}}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{a}\,\mathfrak{R}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}. \tag{7}$$

Da die Inversen der Sinusspiralen wieder Sinusspiralen sind mit dem negativen Index der ursprünglichen, so ergeben sich für $n = -2$ und $n = -\frac{1}{2}$ aus (7) die natürlichen Gleichungen der gleichseitigen Hyperbel und der Parabel. Den Werten $n = +1$ und -1 entsprechen Kreis und Gerade. Für $n = 0$ erhält man als Grenzfall die logarithmische Spirale. Der Index $n = \frac{1}{3}$ entspricht der Tschirnhausenschen Kubik. Deren Inverse mit der Polargleichung

$$\varrho = a \cos^3 \tfrac{1}{3}\theta \tag{8}$$

wurde von Archibald (*Diss.*, Straßburg 1900) *Cayley-Sextik* genannt. Sie hat in Punktkoordinaten die Gleichung

$$[4(x^2+y^2) - ax]^3 = 27a^2(x^2+y^2). \tag{9}$$

Der Anfangspunkt und die imaginären Kreispunkte sind Spitzpunkte auf der Kurve, sie hat außerdem einen Doppelpunkt für $x = a$, $y = 0$ und demnach die Klasse 4. Nun hat man den Satz: *Die Fußpunktskurve des Poles einer Sinusspirale vom Index*

n ist eine ebensolche vom Index $n/(n+1)$. Darnach kann man die Reihe bilden, die nach beiden Seiten beliebig fortzusetzen ist:

$$\text{Tschirnhausen-Kubik}, \text{ Parabel, Gerade; Punkt; Kreis, Kardioide, } \text{Cayley-Sextik},$$

wo jede folgende die Fußpunktskurve der vorhergehenden ist. Der Pol der Kardioide liegt in der Spitze, der der Parabel im Brennpunkt, der der Tschirnhausenschen Kubik ist der in § 1 bezeichnete Punkt. Zwei in der Reihe von der Mitte (dem Punkt) gleich weit abstehende Kurven sind zueinander invers. Außerdem sind die Kurven abwechselnd Richtungskurven und Kurven erster Kategorie.

Die Katakaustik der Kardioide in bezug auf die Spitze ist eine Epizykloide mit dem Radienverhältnis 1. Sie hat zwei reelle Spitzen und heißt nach Proctor (*A treatise on the cycloid*, London 1878) *Nephroide*. Sie ist auch Katakaustik eines Kreises für parallel eintretende Strahlen. Sowohl unter den Evolventen als unter den Parallelkurven der Nephroide befindet sich eine Cayley-Sextik (vgl. H. Wieleitner, *Spez. K.*, S. 131 ff.).

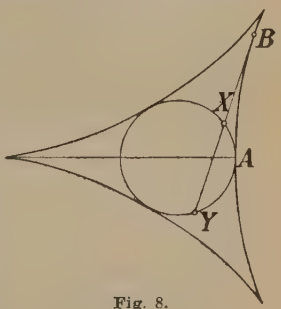


Fig. 8.

Zu den c_4^3 mit drei Spitzen (vgl. Archibald, *Ann. of Math.* (2) **4**, 95 (1903)) gehört auch die (*J. f. Math.* **53**, 231 (1856)) *Steinersche Hypozykloide*. Ihr entspricht das Radienverhältnis $r/R = 1/3$. Sie kann auch auf folgende Art erzeugt werden (vgl. Fig. 8): *Auf einem Kreise laufen von einem Punkt A aus zwei Punkte X, Y in entgegengesetzter Richtung so, daß Y die doppelte Geschwindigkeit hat wie X; dann ist die Enveloppe der Geraden XY eine Steinersche Hypozykloide.* Für den jeweiligen Berührungspunkt B ist $BX = XY$. Die Gleichung der Kurve in Punktkoordinaten lautet

$$(10) \qquad (x^2 + y^2 - 12rx + 9r^2)^2 + 4r(2x - 3r)^3 = 0$$

und in Linienkoordinaten

$$(11) \qquad u^2 + v^2 = rv(3u^2 - v^2).$$

Die orthoptische Kurve der Steinerschen Hypozykloide ist ein Kreis, der sie dreifach berührt (Inkreis). Der umschriebene Kreis eines Dreiecks hat die Eigenschaft, daß die Fußpunkte der

von einem seiner Punkte auf die Dreiecksseiten gefällten Lote in einer Geraden liegen. Eine solche Gerade heißt *Wallacesche Gerade. Die Einhüllende aller Wallaceschen Geraden ist eine Steinersche Hypozykloide mit dem Feuerbachschen Kreis des Dreiecks als Inkreis* (Steiner; vgl. Gob u. Neuberg in *Mém. Soc. Liége* (3) **6** (1906); Collignon in *Proc. Edinb. Math. Soc.* **23**, 2 (1905); Roegner, *Diss.*, Jena 1908). Fußpunktskurve der Steinerschen Hypozykloide in bezug auf den Mittelpunkt ist das *regelmäßige Dreiblatt,* eine Rosenkurve mit der Polargleichung $\varrho = r \cos 3\,\theta$.

Die elliptische Bewegung ist ein Speziallfall der Bewegung, bei der die Endpunkte P, Q einer festen Strecke l gezwungen sind, auf zwei Kreisen um O und O' zu laufen. Man nennt das Viereck $POO'Q$ ein Gelenkviereck, OO' den Steg, PQ die Koppel, das Ganze ein Kurbelgetriebe. Jeder mit der Koppel fest verbundene Punkt L beschreibt eine *Koppelkurve.* Diese ist eine isotropische c_6 mit drei außerordentlichen Brennpunkten in O, O' und einem Punkt O'', der so liegt, daß $\triangle O''OO' \sim \triangle LPQ$. Die Kurve hat immer drei Doppelpunkte, die auf dem Umkreis des $\triangle OO'O''$. Sie kann auf dreierlei Weisen erzeugt werden, indem man auch OO'', $O'O''$ als Steg benutzt (Roberts, *Proc. Lond. math. Soc.* **7**, 14 (1876); Burmester, *Kinematik,* 283; Vaes, *Handel. 5. Nederl. Natuur-Congr.* 1895, 238). Liegt L auf der Koppel selbst so, daß $PL = LQ$, und ist außerdem $OP = O'Q$, so entsteht die sog. *Wattsche Kurve* (Bibliogr. im *Interm. math.* **4**, 184 (1897)), die für $PQ = OO'$ in einen Kreis und eine Boothsche Lemniskate zerfällt. Das System heißt dann eine Zwillingskurbel, und ein beliebiger mit PQ verbundener Punkt beschreibt, wenn das System gleichläufig ist, die Fußpunktskurve einer Ellipse, wenn es gegenläufig ist, die einer Hyperbel. Als Polkurven der Bewegung ergeben sich kongruente Ellipsen bzw. Hyperbeln. Ist $OO' = O'Q$, $OP = PQ$, so beschreibt ein beliebiger Punkt L wieder die Fußpunktskurve eines Kegelschnitts; die Polkurven sind aber dann zwei Pascalsche Schnecken verschiedener Art.

Zum Schluß seien noch die *Sektrix-Kurven* erwähnt (Übersicht bei G. Loria, *Spezielle Kurven,* V. Abschn., 12. Kap.), die dazu dienen, einen Winkel in beliebig viele gleiche Teile zu teilen. Mechanismen zur kontinuierlichen Erzeugung allgemeiner Sektrix-Kurven verschiedener Art haben angegeben Heymann (*Zeitschr. Math.* **44**, 263 (1899)) und Kempe (*Verh. III. Internat. Math.-Kongr.,* Leipzig 1905, 492). Eine andere Gattung wurde von Schoute aufgestellt (*J. math. spéc.* (2) **4**, 172 u. a. (1885)).

§ 6. Rollkurven verschiedener Art.

Man nennt *höhere Kreisevolventen* die erste, zweite, dritte usw. Evolvente der gewöhnlichen Kreisevolvente. Hat der Grundkreis den Radius a_0, so ist für seine n^{te} Evolvente die natürliche Gleichung in $\mathcal{R}$, τ

$$(1) \qquad \mathcal{R} = \frac{1}{n!}\, a_0 \tau^n + \frac{1}{(n-1)!}\, a_1 \tau^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\tau + a_n.$$

Die Kurve hat n Spitzen, die den Werten von τ für $\mathcal{R} = 0$ entsprechen. Besonders bemerkenswert ist eine zweite Kreisevolvente mit der Gleichung $\mathcal{R} = a\tau^2 + 2a\tau + 2a$ oder in $\mathcal{R}$, s

$$(2) \qquad s = \frac{\mathcal{R} + 2a}{3}\sqrt{\frac{\mathcal{R} - a}{2}},$$

die *Sturmsche Spirale* heißt (Ch. Sturm, *Cours d'Analyse*, Paris 1857). Ihre beiden Spitzen sind imaginär, und sie hat die Eigenschaft, *daß ihr Radiusvektor vom Mittelpunkt des Fundamentalkreises aus immer gleich dem Krümmungsradius ist.* Für die höheren Kreisevolventen sind sowohl die Mannheimschen Kurven wie die Örter des Grundkreismittelpunktes beim Abrollen auf einer Geraden rationale algebraische Kurven $(n+1)^{ter}$ Ordnung, für die x, y sich durch ganze Funktionen des Winkels τ ausdrücken lassen. *Für die Sturmsche Spirale ist der letztere Ort eine Tschirnhausensche Kubik* (Wieleitner, *Arch. Math.* (3) **11**, 311 (1907)).

Die Fußpunktskurven der höheren Kreisevolventen für den Mittelpunkt des Grundkreises als Pol sind *algebraische Spiralen* von der Gleichungsform in Polarkoordinaten

$$(3) \qquad \varrho = b_0\theta^n + b_1\theta^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\theta + b_n.$$

Für $n = 1$ ergibt sich eine Archimedische Spirale, für $n = 2$ läßt sich die Gleichung immer auf die Form bringen $\varrho = a\theta^2 - l$. Die Spirale heißt nach Fermat (1660) *Galileische Spirale.* Andere algebraische Spiralen sind die *Fermatsche Spirale* mit der Gleichung $\varrho^2 = a^2\theta$ und ihre Konchoide $\varrho = a\sqrt{\theta} + l$. Erstere hat die Eigenschaft, daß ihre Windungen, je weiter sich die Kurve hinaus erstreckt, immer enger werden, letztere heißt nach Jak. Bernoulli (1691) *parabolische Spirale.* Die Inverse der Fermatschen Spirale nennt man nach Cotes (1722) *Lituus.* Die Kurve hat die Gleichung $\varrho^2\theta = a^2$ und die Gestalt von Fig. 9.

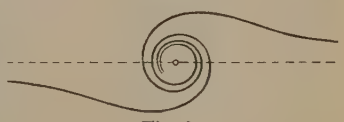


Fig. 9.

Man erhält Verallgemeinerungen der gestreckten und verschlungenen Trochoiden, wenn man Ellipsen oder Hyperbeln auf einer Geraden rollen läßt und die Bahn eines Brennpunktes verfolgt. Ist ε die numerische Exzentrizität des Kegelschnitts $\left(\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}\right)$, so lautet die natürliche Gleichung des Ortes

$$\mathcal{R} = a \cdot \frac{1 - 2\varepsilon\cos(s/a) + \varepsilon^2}{\varepsilon(\varepsilon - \cos(s/a))}. \tag{4}$$

Die Kurven heißen *Delaunaysche Kurven* (*J. de Math.* (1) **6**, 309 (1841)), und entsprechen für $\varepsilon < 1$ der Ellipse, für $\varepsilon > 1$ Hyperbel. Für $\varepsilon = 1$ entstehen Kreise. *Die Kurven sind Meridiankurven der Rotationsflächen mit konstanter mittlerer Krümmung.* Ihre Parallelkurven im Abstande a sind Kurven, für die das Produkt $\mathcal{R} \cdot \mathcal{N}$ aus Krümmungsradius und Normale konstant ist. Diese sind Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter totaler Krümmung (vgl. Scheffers, *Einf. i. d. Theorie der Curven,* Leipzig 1901, 97 ff.). Ihre natürliche Gleichung ist

$$\mathcal{R} = \frac{a}{\varepsilon}\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2)\operatorname{tg}^2\frac{s}{a}}. \tag{5}$$

Rollt eine Parabel auf einer Geraden, so hat der Ort des Brennpunktes die Gleichung

$$\mathcal{R} = \frac{s^2}{p} + p \tag{6}$$

oder in Cartesischen Koordinaten

$$y = \frac{p}{2}\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right) = p\operatorname{ch}\frac{x}{p}. \tag{7}$$

Es ist dies die *Kettenlinie* (Catenaria), die so heißt, weil eine an zwei Enden aufgehängte homogene Kette die Form dieser Kurve annimmt (Huygens, Leibniz, Joh. Bernoulli, *Act. Erud.* 1690 ff.). Als *Pseudokatenarien* bezeichnet man nach E. Cesàro (*Natürl. Geom.*, S. 17) die Kurven mit der Gleichungsform

$$\mathcal{R} = \frac{s^2}{p} - q. \tag{8}$$

Sie haben zwei doppelte asymptotische Punkte. Bemerkenswert ist die vom Scheitel ausgehende Evolvente der Kettenlinie, die sog. *Traktrix.* Es ist dies die Kurve, die ein schwerer Punkt P beschreibt, wenn er an einem Faden von der Länge p gezogen wird und das andere Ende des Fadens auf einer Geraden zu bleiben

gezwungen ist (Leibniz, Huygens 1693). Sie hat die natürliche Gleichung

$$\mathcal{R} = p\sqrt{e^{2s/p} - 1}. \tag{9}$$

Auch für sie ist $\mathcal{R} \cdot \mathcal{N} = \text{const}$. Entsprechend heißen die Kurven mit der Gleichung

$$\mathcal{R} = p\sqrt{1 - e^{2s/p}} \tag{10}$$

Pseudotraktrizen. Sie sind die Evolventen der Pseudokatenarien in bezug auf den Scheitel und haben zwei asymptotische Kreise.

Diejenigen Kurven, für welche das Verhältnis $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ des Krümmungsradius zur Normalen konstant ist, nennt man *Ribaucoursche Kurven* (Joh. Bernoulli 1716; Ribaucour, *Mém. cour. Ac. Bruxelles* **44** (1881), Kap. XIV). *Man erhält sie als Ort des Poles einer Sinusspirale, wenn diese auf einer Geraden rollt* (Bonnet, *J. de math.* (1) **9**, 97 (1844)). Ihre natürliche Gleichung schreibt man gewöhnlich in der Form

$$s = \frac{\nu+1}{\nu-1} \int \frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{R}}{b}\right)^{2\frac{\nu+1}{\nu-1}} - 1}}, \tag{11}$$

wo zwischen den Indizes n, ν der Sinusspirale und Ribaucourschen Kurve die Beziehung besteht $n(1-\nu) = 1+\nu$, während $b = (n+1)\,a/n$ und $\mathcal{R}/\mathcal{N} = 2/(\nu+1)$ ist. Man hat für $\nu = 0$ eine Zykloide, für $\nu = -2$ eine Parabel, für $\nu = -3$ eine Kettenlinie, für $\nu = \pm 1$ Kreis und Gerade und für $\nu = -\frac{1}{3}$ diejenige schiefe Astroide, bei der zweimal je zwei Spitzen und ein Knoten sich in einen Spitzpunkt vereinigen. *Läßt man die Ribaucoursche Kurve auf einer Geraden rollen, so hüllt ihre Leitlinie, auf die sich die Länge von $\mathcal{N}$ bezieht, wieder eine Ribaucoursche Kurve vom Index $(\nu-1)/(\nu+3)$ ein.*

Sinusspiralen und Ribaucourschen Kurven sind Glieder einer größeren Kurvenfamilie, die man *Cesàrosche Kurven nennt* (Cesàro, *Nouv. Ann. math.* (3) **7**, 171 (1888) u. flgd. Bde.). *Diese sind durch die Bedingung definiert, daß der Krümmungsradius $\mathcal{R}$ proportional sein soll demjenigen vom Kurvenpunkt P aus gerechneten Normalenabschnitt $\mathcal{N}$ der durch die Polare Π von P in bezug auf einen festen Kreis (Leitkreis) abgeschnitten wird.* Wird der Radius dieses Kreises Null, so ergeben sich die Sinusspiralen, wird er unendlich, die Ribaucourschen Kurven. Die natürliche Gleichung der Cesàroschen Kurven ist

$$(12)\qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\mathfrak{R}}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{\mathfrak{R}}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{\mathfrak{R}}{c}\right)^{\frac{2}{n-1}} - 1}}.$$

Für $n = 0$ enthält diese Gleichung die zykloidalen Kurven, für $n = -2$ die Kegelschnitte.

Man erhält eine Reihe von Beziehungen zwischen den eben angegebenen Kurven mittels der folgenden Theoreme: *Beschreibt der Punkt P in der Ebene der Kurve* K, *wenn diese auf einer Geraden* G *rollt, eine Kurve* Φ, *so ist jeder Bogen von* Φ *gleich dem entsprechenden Bogen der Fußpunktskurve* F *von* K *in bezug auf P* (J. Steiner, *J. f. Math.* **21**, 101 (1840)).

Der Pol P der Fußpunktskurve F *einer Kurve* K *beschreibt, wenn* F *auf derjenigen Kurve* Φ *abrollt, die von P beim Rollen von* K *auf einer Geraden erzeugt wird, eine Gerade* G.

Rollt Φ *auf* F *ab, so dreht sich die Gerade* G *immer um den in der Ebene von* F *festen Punkt P* (Habich, *Mathesis* **2**, 145 (1882)).

§ 7. Die Methode der Koordinatenverwandlung.

Von den einfachen Gleichungen in x, y, die durch die Substitution $x = s$, $y = \mathfrak{R}$ bemerkenswerte Kurven ergeben, ist noch zu erwähnen die der gleichseitigen Hyperbel $xy = a^2$, die zur Entstehung der *Klothoide* mit der Gleichung

$$(1)\qquad \mathfrak{R}s = a^2$$

Veranlassung gibt (vgl. Fig. 10). Diese Kurve spielt in der Theorie der Lichtbrechung eine Rolle (Fresnel, *Œuvres complètes*, t. I, p. 319). In rechtwinkligen Koordinaten hat sie die Parameterdarstellung

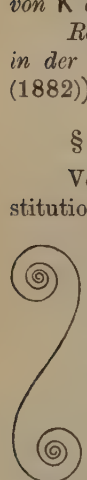


Fig. 10.

$$(2)\qquad x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\tau \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau,\quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\tau \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

Geometrisch ist sie durch den folgenden Satz gekennzeichnet: *Der Schwerpunkt eines beliebigen Bogens ist äußerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Krümmungskreise in den Endpunkten des Bogens* (Cesàro, *Nouv. Ann. math.* (3) **5**, 511 (1886)). Außerdem entspricht der gewöhnlichen Kettenlinie $y = p\,\mathrm{ch}(x/p)$ in natürlichen Koordinaten die Kurve mit der Gleichung

$$(3)\qquad \mathfrak{R} = p\,\mathrm{ch}(s/p) = \tfrac{1}{2}p(e^{s/p} + e^{-s/p}).$$

Sie heißt *Kettenlinie gleichen Widerstandes*; denn sie ist die Gleichgewichtsfigur eines Fadens, der an zwei Punkten aufgehängt ist, dessen Dicke aber so variiert, daß er an jeder Stelle derselben Spannung unterworfen ist (Coriolis, *J. de math.* **1**, 75 (1836)). Sie hat die Cartesische Gleichung

$$y = -p \log \cos (x/p) \tag{4}$$

und wird geometrisch durch die Bedingung charakterisiert, *daß die Projektion ihres Krümmungsradius auf eine feste Gerade konstant ist.*

Setzt man in der Polargleichung der binomischen Spiralen $\varrho = a\theta^n$, von denen wir oben Beispiele gaben, $\varrho = y$, $\theta = x/a$, so erhält man die *binomischen Kurven* mit der Cartesischen Gleichung

$$y = a^{1-n} x^n, \tag{5}$$

wo die Koordinatenachsen auch schiefwinkelig gedacht werden können. Die Kurven haben dieselbe Ordnungs- und Klassenzahl und besitzen, wenn n rational und > 0, im Anfangspunkt und im unendlich Fernen je eine zur andern reziproke höhere Singularität (Analyse bei Wieleitner, *Spez. Kurven,* S. 331). Sie heißen *höhere Parabeln*; (so werden aber auch gelegentlich Kurven mit der Gleichungsform

$$y = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \cdots + \varepsilon x + \eta \tag{5a}$$

bezeichnet). Für $n < 0$ (*höhere Hyperbeln*) liegen beide Singularitäten im Unendlichen. Konstruktionen des Krümmungsradius für die binomischen Kurven gaben Kosch und Dingeldey (*Zschr. Math. Phys.* **45**, 165 (1900) u. **54**, 89 (1906)). Die Quadratur dieser Kurven ist elementar, ihre Rektifikation nur, wenn $n = 1 \pm \frac{1}{g}$, wo g eine ganze Zahl > 1 bedeutet; für $g = 2\nu$ sind sie algebraisch rektifizierbar. Als Beispiel ist die *Neilsche Parabel* (Neil 1659) mit der Gleichung $y = a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, die Evolute der Parabel, hervorzuheben.

Unterwirft man eine binomische Kurve irgend einer Projektion und nimmt die Bilder der Koordinatenachsen und der unendlich fernen Geraden zu Seiten eines Koordinatendreiecks, so erhält man die Gleichung

$$x_1^p x_2^q x_3^r = \varkappa \qquad (p + q + r = 0). \tag{6}$$

Kurven mit dieser Gleichung, wo die Exponenten im allgemeinen als Irrationalzahlen gedacht sind, heißen *W-Kurven erster Art*

(F. Klein u. S. Lie, *Math. Ann.* **4**, 50 (1871)). *Sie sind die Bahnkurven der eingliedrigen kontinuierlichen projektiven Transformationsgruppe,* mit anderen Worten die Integralkurven der Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{a_1 x_1} = \frac{dx_2}{a_2 x_2} = \frac{dx_3}{a_3 x_3}. \tag{7}$$

Ihr Verlauf ist durch einen über eine Koordinatenseite gespannten Bogen, der im Anfangs- und Endpunkt die beiden andern Koordinatenseiten berührt, gegeben. Der zweite Zug, der bei den Formen mit rationalen Exponenten sich anschließt, entsteht erst durch Berücksichtigung negativer Koordinatenwerte oder zweier Vorzeichen einer geraden Wurzel, was bei irrationalen Exponenten ausgeschlossen ist.

Die *W-Kurven zweiter Art* genügen einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{dx_1}{x_1 + x_3} = \frac{dx_2}{2x_2} = \frac{dx_3}{x_3}. \tag{8}$$

Sie sind Projektionen der sog. *Exponentialkurve* oder *logarithmischen Linie* (Descartes 1638; Torricelli 1644; Pardies 1671; Huygens 1690)

$$y = ae^x. \tag{9}$$

Diese Kurve ist elementar dadurch definiert, daß ihre Subtangente konstant ist. Für die *W*-Kurven beider Arten gelten die Sätze: *Jede Kurve ist in bezug auf einen Kegelschnitt, der sie berührt, zu sich selbst reziprok.*

Das Doppelverhältnis δ des Berührungspunktes P einer Tangente T *einer W-Kurve und der drei Schnittpunkte von* T *mit den Seiten des Fundamentaldreiecks ist konstant auf der ganzen Kurve; es ist gleich dem Doppelverhältnis δ' der Tangente* T *der Kurve und der drei von ihrem Berührungspunkte P nach den Ecken des Grunddreiecks gehenden Geraden; derselbe Wert $\delta = \delta'$ ergibt sich für alle W-Kurven desselben durch (7) oder (8) definierten Systems.*

Der Ort der Berührungspunkte aller von einem Punkte P an die W-Kurven eines Systems gehenden Tangenten, ebenso die Einhüllende der in den Schnittpunkten aller Kurven des Systems mit einer Geraden G *gelegten Tangenten ist ein Kegelschnitt.*

Liegen zwei Eckpunkte des Koordinatendreiecks in den imaginären Kreispunkten, so werden die *W*-Kurven des Systems zu logarithmischen Spiralen mit konstantem Steigungswinkel. In der

Tat kann die Cartesische Gleichung der logarithmischen Spirale geschrieben werden

$$(10) \qquad (x+iy)^{i+\varkappa}(x-iy)^{i-\varkappa} = \text{const.} \quad (i=\sqrt{-1}).$$

Die Substitution $x = s$, $y = \mathfrak{R}$ macht aus den binomischen Kurven (5) *Pseudospiralen* (Pirondini, *J. Sc. math. Coimbra* **15**, 145 (1905)) mit der Gleichung

$$(10) \qquad \mathfrak{R} = a^{1-n}s^n.$$

Unter ihnen ist außer der Klothoide ($n = -1$) noch die schon von K. Ch. F. Krause (*Nov. theor. lin. curv.*, München 1835, S. 88) aufgestellte *Antiloga* für $n = 2$ bemerkenswert.

Die W-Kurven erster Art stellen einen Grenzfall der sog. *triangulär-symmetrischen Kurven*

$$(11) \qquad \sigma_1 x_1^m + \sigma_2 x_2^m + \sigma_3 x_3^m = 0$$

dar für $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ und $m = 0$ (de la Gournerie, *Rech. sur les surf. reglées etc.*, Paris 1867, 196 ff.). Die Kurven (11) sind wieder Projektionen der *Laméschen Kurven* (*Exam. des diff. méth. etc.*, Paris 1818, p. 105 ff.)

$$(12) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1.$$

(Diskussion bei Teixeira, *Tratado*, p. 494 ff., *Traité*, t. II, 244 ff.) Aus den triangulär-symmetrischen Kurven gehen ferner die Sinusspiralen hervor, wenn zwei Ecken des Fundamentaldreiecks in die imaginären Kreispunkte gelegt werden. Für die Kurven (11), bei denen m im allgemeinen als irrational vorausgesetzt ist, gilt der Satz:

Sind Φ und Φ' zwei auf dasselbe Dreieck bezogene triangulär-symmetrische Kurven, so ist die Einhüllende der geraden Polaren aller Punkte von Φ in bezug auf Φ' wieder eine zum Dreieck gehörige triangulär-symmetrische Kurve.

Ferner ergibt sich der Satz von Jamet (*Ann. Éc Norm.* (3) **4**, 19 (1887)):

Berühren sich zwei triangulär-symmetrische Kurven desselben Fundamentaldreiecks in einem Punkte, so ist das Verhältnis ihrer Krümmungsradien in diesem Punkte $(m-1):(n-1)$.

Von bekannten Kurven gehören hieher die projektive (bzw. reguläre) Astroide, die Evoluten der Mittelpunktkegelschnitte, die Kreuzkurve und Kohlenspitzenkurve, die Bernoullische Lemniskate sowie die Steinersche Hypozykloide. Diese ergibt sich für ein gleichseitiges Fundamentaldreieck mit dem Schwerpunkt als Einheitspunkt der Koordinaten und $m = -\frac{1}{2}$.

Von besonderen Radialen (vgl. S. 451) verdienen Erwähnung die Rosenkurven als Radialen der Zykloidalen, die Kampyla des Eudoxus als Radiale der Kettenlinie, die Kappakurve für die Traktrix und die Gerade für die Kettenlinie gleichen Widerstandes. Die Radialen der Mittelpunktskegelschnitte sind Kurven 6. Ordnung mit Spitzen in den unendlich fernen Punkten, die Radialen der Parabel rationale Kurven 3. Ordnung. Weitere Beispiele für Radialen, Mannheimsche Kurven und deren Verallgemeinerungen bei Santangelo, *Pal. Rend. Circ. M.* **29** (1910).

Spezielle Arkuiden (vgl. S. 452) sind die schiefe (bzw. reguläre) Astroide für die Zykloide als Grundkurve, die Parabel für die Kettenlinie, die Steinersche Hypozykloide für die reguläre Astroide, die Zykloide für den Kreis. Von besonderem Interesse ist die Arkuide der logarithmischen Spirale, die von Köstlin (*Mitt. math. V. Württ.* (2) **9**, 21 (1907)) aufgestellt und *Logarithmoide* genannt wurde (vgl. Fig. 11). Ihre Gleichung in axialen Linienkoordinaten (w, φ) ist

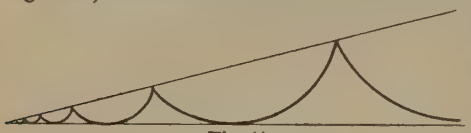


Fig. 11.

$$w = ce^{x\varphi}. \tag{13}$$

Die Kurve ist eine Verallgemeinerung der Zykloide, wie die logarithmische Spirale eine solche des Kreises ist. Sie besteht aus unendlich vielen zueinander ähnlichen, in bezug auf den Scheitel eines Winkels, der die ganze Kurve einschließt, ähnlich gelegenen Bogen, die mit Spitzen aneinander schließen. Über den Scheitel des Winkels hinaus setzt sich die Kurve nicht fort. *Rollt eine logarithmische Spirale auf einer Geraden, so hüllt jede durch ihren Pol gehende Gerade eine Logarithmoide ein.*

Die Katakaustiken der binomischen Kurven (5) für Strahlen parallel zu einer Achse sind Richtungskurven mit einer Rektifikationsachse. Zu jeder solchen Katakaustik gehören zwei Grundkurven, speziell zur Tschirnhausenschen Kubik die gewöhnliche und die Neilsche Parabel (Köstlin, *Diss.*). Die Tangenten dieser Katakaustiken schneiden auf ihrer Rektifikationsachse vom Anfangspunkt aus gerechnet Stücke ab, die den von einem beliebigen Punkt an gemessenen Kurvenbogen proportional sind. Daher nennt man diese Kurven auch *Verfolgungskurven der Geraden.* Zum Schlusse sei erwähnt, daß die Substitution $y = s$ in der Gleichung der binomischen Kurven neue Kurven ergibt, die Cesàro (*Nouv.*

Ann. (3) **13**, 103 (1894)) als Evoluten der Ribaucourschen Kurven erkannte.

Zur Einteilung der transzendenten Kurven hat Loria einen wichtigen Schritt getan (*Prag. Ber. d. böhm. Ges.* 1901). Er faßt alle Kurven, die einer algebraischen Differentialgleichung 1. Ordnung μ^{ten} Grades

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \equiv \sum_{0}^{\mu} f_i(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^i = 0 \tag{14}$$

genügen, in eine Klasse, die der *panalgebraischen Kurven*, zusammen, zu der natürlich auch alle algebraischen Kurven gehören. Jede Gleichung (14) stellt aber ein System von Kurven dar, das zwei Charakteristiken μ, ν hat, von denen μ die Anzahl der durch jeden Punkt der Ebene gehenden, ν die Anzahl der jede Gerade der Ebene berührenden Kurven des Systems bedeutet. Diese Charakteristiken hat Loria in seinem Buche (*Spez. Kurven*) für jede panalgebraische Kurve angegeben. Unter den von uns besprochenen Kurven sind nur die Pseudospiralen, die Kettenlinie gleichen Widerstandes und die allgemeinen Cesàroschen Kurven nicht panalgebraisch.

Kapitel XXIII.

Ebene Differentialgeometrie.

Von *H. Liebmann* in Leipzig.

§ 1. Tangenten, Asymptoten, Normale.

Die analytischen Differentialoperationen hängen davon ab, in welcher Form die Kurve analytisch gegeben ist. Die ebenen Kurven lassen sich, wenn x und y die Koordinaten eines Kurvenpunktes sind, in dreifacher Weise darstellen:

a) x und y sind als Funktionen eines Parameters gegeben

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

z. B. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (*Zykloide*).

b) y ist als Funktion von x gegeben, was sich für $x = t$ aus a) ergibt:

$$y = f(x)$$

z. B. $y = \sin x$ (*Sinuslinie*).

c) Es wird allgemeiner gefordert, daß eine Funktion von x, y verschwindet:

$$F(x, y) = 0.$$

Dies ist der gewöhnliche Fall algebraischer Kurvengleichungen. Die *Tangente* der Kurve im Punkte $P(x, y)$ ist die Grenzlage einer Sekante durch $P(x, y)$, wenn ihr zweiter Schnittpunkt P_1 mit der Kurve sich dem Punkte $P(x, y)$ unbegrenzt nähert.

Sind ξ, η die Koordinaten eines Punktes auf der Tangente, so ist für die drei Darstellungsformen die Tangentengleichung:

$$\text{a)} \quad (\xi - x)\frac{dy}{dt} - (\eta - y)\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\text{b)} \quad (\xi - x)\frac{dy}{dx} - (\eta - y) = 0,$$

$$\text{c)} \quad (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Für die *Normale*, d. h. die auf der Tangente im Berührungspunkt senkrecht stehende Gerade, folgt entsprechend

$$\text{a)}\quad (\xi - x)\frac{dx}{dt} + (\eta - y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

$$\text{b)}\quad (\xi - x) + \frac{dy}{dx}(\eta - y) = 0,$$

$$\text{c)}\quad (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial y} - (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Die Länge τ der Tangente vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt mit der x-Achse ist für die Darstellungsform b):

$$\tau = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2},$$

die Projektion von τ auf die x-Achse (*Subtangente*)

$$\tau_x = y : y'.$$

Die Länge ν der Normale vom Kurvenpunkt bis zur x-Achse ist

$$\nu = y\sqrt{1 + y'^2};$$

die Projektion von ν auf die x-Achse (*Subnormale*)

$$\nu_x = yy'.$$

Ist O der Koordinatenanfang, P der Kurvenpunkt, und schneiden Tangente und Normale den auf OP senkrechten Strahl durch O in T und N, so ist, in Polarkoordinaten r, φ ausgedrückt,

$$PT = r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \quad (\textit{Polartangente}),$$

$$PN = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \quad (\textit{Polarnormale}),$$

$$OT = r^2\frac{d\varphi}{dr} \quad (\textit{Polarsubtangente}),$$

$$ON = \frac{dr}{d\varphi} \quad (\textit{Polarsubnormale}).$$

Konstruktion der Tangente. In vielen Fällen, namentlich bei solchen Kurven, die durch Beziehungen zwischen Abständen von festen Punkten oder Geraden, oder auch kinematisch definiert sind, kann die Tangente durch infinitesimale Betrachtungen konstruiert werden. Für sehr viele Kurven haben bereits Descartes, Huygens, Fermat u. a. Tangentenkonstruktionen angegeben (vgl.

M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II, 2. Aufl., Leipzig 1900, S. 555ff.).

In ähnlicher Weise wie bei der Ellipse kann die Tangente bei den Cassinischen Kurven konstruiert werden, welche dadurch definiert sind, daß das Produkt der Abstände eines Kurvenpunktes von zwei festen Brennpunkten konstant ist, also

$$r_1 \cdot r_2 = K,$$

ebenso bei den Kurven, für die

$$r_1^m r_2^n = K,$$

und allgemeineren Kurven.

Ein Beispiel einer *kinematischen Konstruktion* gibt die *Zykloide,* nämlich die Bahn eines Punktes P auf der Peripherie eines Kreises, der auf einer Geraden abrollt. Ist T der augenblickliche Berührungspunkt des Kreises mit der Geraden, so kann seine Momentanbewegung als Drehung um T aufgefaßt werden, die Tangente steht daher auf PT senkrecht.

Dieselbe Konstruktion gilt allgemein für *Rollkurven*, d. h. für die Bahn eines Punktes P, der mit einer starren, auf einer festen Kurve abrollenden Kurve starr verbunden ist. Über *Rollkurven* (vgl. Kap. XXI, § 5) siehe G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven,* deutsch von Schütte, Leipzig 1902, S. 461 (im folgenden zitiert mit Loria-Schütte). Ferner E. Wölffing, *Mathematischer Bücherschatz* I, Leipzig 1903, S. 330 (zitiert mit Wölffing).

Die *Fußpunktkurven* (Kap. XXI, § 3) sind definiert als Ort der Fußpunkte P der auf die Tangenten t einer gegebenen Kurve von einem festen Pol O gefällten Lote. Ist T der momentane Berührungspunkt von t, so besteht die Momentanbewegung von t in einer Drehung um T. Hieraus folgt, daß der über OT als Durchmesser konstruierte Kreis die Fußpunktkurve in P berührt.

Weitere Literatur über die Tangentenkonstruktion findet sich bei H. v. Mangoldt, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen, Math. Encyklopädie* III D 1, 2, (im folgenden zitiert mit Mangoldt).

Asymptoten. Erstreckt sich die Kurve ins Unendliche, wird also in der (Darstellungsform a) für einen bestimmten Wert t von t mindestens eine der beiden Funktionen $x(t)$, $y(t)$ unendlich, so kann dabei doch die Tangente, wenn der Berührungspunkt P auf dem betreffenden Ast in unendliche Entfernung rückt, eine bestimmte Grenzlage erreichen (vgl. Kap. XX, § 1). Dann

muß *erstens* die *Richtung* der Tangente und *zweitens* ihr *Abstand* von einem beliebigen festen Punkt einer bestimmten Grenzlage zustreben.

Bei der *Hyperbel* $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$ ist die Tangentengleichung

$$\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b}\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t} - \frac{1}{\mathrm{ch}\,t} = 0.$$

Für $t = \infty$ wird $\mathrm{ch}\,t = \infty$, $\mathrm{sh}\,t = \infty$ und $\mathrm{sh}\,t : \mathrm{ch}\,t = 1$, die Tangentengleichung lautet dann

$$\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b} = 0,$$

dies ist die Gleichung der *Asymptote.*

Bei der *Parabel* nähert sich wohl die *Richtung* der Tangente einer bestimmten Grenze, nämlich der Achsenrichtung, nicht aber die Lage.

Umgekehrt gibt es Kurven, die, wie die *logarithmische Spirale* $r = a e^{c\varphi}$ für $\varphi = -\infty$, $r = 0$, einen *asymptotischen Punkt* besitzen, in dem die *Richtung* der Tangente unbestimmt wird, oder einen *asymptotischen Kreis*, dem sie sich unbegrenzt nähern, so daß wohl für den Abstand der Tangente vom Mittelpunkt dieses Kreises ein bestimmter Grenzwert existiert, nämlich der Radius dieses Kreises, nicht aber für die Richtung.

Über *Asymptoten* vgl. v. Mangoldt, S. 16—18; ferner über asymptotische Punkte und Kreise Cesàro, *Vorlesungen über natürliche Geometrie,* übers. von G. Kowalewski, Leipzig 1901, im folgenden zitiert mit Cesàro (S. 11ff.).

Singularitäten. Solange x und y analytische Funktionen von t in der Umgebung der betrachteten Stelle sind, erhält man stets eine bestimmte Tangente an dieser Stelle. Durch Drehung des Koordinatensystems kann immer erreicht werden, daß die x-Achse die Tangente wird. Dann beginnt y mit Gliedern höherer Ordnung als x. In einem gewöhnlichen Punkt beginnt x mit einem Glied 1., y mit einem Glied 2. Ordnung, und der betreffende Kurvenast liegt in der Umgebung des Punktes nur auf einer Seite der Normale.

Lautet die Entwicklung, indem man für die betreffende Stelle der Einfachheit wegen $t = 0$ wählt,

$$x^2 = at + \cdots,\ y = bt^3 + \cdots,$$

so durchsetzt die Kurve die Tangente und sie ist eine *Wende-*

tangente, ihr Berührungspunkt ein *Wendepunkt*. Eine Entwicklung

$$x = at^2 + \cdots, \; y = bt^3 + \cdots$$

gibt eine *Spitze* oder einen *Rückkehrpunkt*; der Kurvenast liegt zu beiden Seiten der *Rückkehrtangente* $y = 0$, aber nur auf einer Seite der Normale $x = 0$. Bei der *Schnabelspitze*

$$x = at^2 + \cdots, \; y = bt^4 + \cdots$$

liegt der Kurvenast nur auf einer Seite der Tangente und nur auf einer Seite der Normale (vgl. Kap. XIII, § 10).

Durch einen Punkt können mehrere Kurvenäste laufen, ohne daß dort der einzelne Ast eine Singularität besitzt. Wird dieser Punkt zum Koordinatenanfang gewählt, so enthält in der dritten Darstellungsform F kein Glied 1. Ordnung, z. B. bei der *Lemniskate*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Der Richtungswinkel φ der Tangente wird dann gefunden, indem man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = 0$ setzt, z. B. wird die Lemniskatengleichung in Polarkoordinaten

$$r^2 - 2a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,$$

macht man darin $r = 0$, so ergibt sich

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \; \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

Über die Tangentenbestimmung vgl. auch: R. v. Lilienthal, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I, 1 ff., Leipzig 1908 (zitiert mit Lilienthal).

§ 2. Berührung höherer Ordnung zwischen zwei Kurven. Krümmungskreis, Evolute, Evolvente.

1. *Berührungen.* Zwei Kurven $y = f(x)$, $y = g(x)$ *berühren* einander in einem Punkt x, y *zur* n^{ten} *Ordnung* oder haben $n + 1$ benachbarte Punkte gemein, wenn in diesem Punkt

$$f(x) = g(x), \; f'(x) = g'(x), \ldots f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$$

wird, dagegen

$$f^{(n+1)}(x) \neq g^{(n+1)}(x).$$

2. *Krümmungskreis, Krümmungsmittelpunkt.* Durch einen regulären Punkt der Kurve geht ein in 2. Ordnung berührender (*oskulierender*) Kreis, der *Krümmungskreis*, eine in 3. Ordnung berührende *Parabel*, deren durch P gehender Durchmesser die

Deviationsachse heißt (A. Transon, *Recherche sur la courbure des lignes et des surfaces, Journ. de Mathém.* **6**, 191 (1841)), ferner ein in 5. Ordnung berührender Kegelschnitt usw. In besonderen Punkten kann es eintreten, daß eine solche Kurve in höherer als der angegebenen Ordnung berührt (*Scheitelpunkte, parabolische Punkte, sextaktische Punkte*).

Die allgemeinste Definition des Krümmungskreises hat H. A. Schwarz aufgestellt und durch Erweiterung des Mittelwertsatzes verwendbar gemacht.

Gegeben sind auf einer Kurve drei Punkte $P_1 P_2 P_3$, durch die ein Kreis gelegt wird. Aus diesem Kreis wird der *Krümmungskreis der Kurve in P, wenn* P_1, P_2, P_3 *sich nach beliebigem Gesetz dem Punkte P unbegrenzt nähern* (H. A. Schwarz, *Annali di mat.*, (2) **10**, 129 (1880), *Ges. Abhandlungen* II, Berlin 1890, S. 296).

Der Mittelpunkt M des Krümmungskreises (*Krümmungsmittelpunkt*) ist die Grenzlage des Schnittes zweier benachbarten Normalen. M ist zugleich *Drehungsmittelpunkt* (Lilienthal, S. 11), d. h. es gibt eine bestimmte Drehung, welche einen Kurvenpunkt P und die eine Halbtangente mit einem benachbarten Punkt P_1 und der entsprechenden Halbtangente zur Deckung bringt. M ist die Grenzlage dieses Punktes, wenn P_1 mit P zusammenfällt.

Bei der Darstellung a) werden die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\xi = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \quad \eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

und der *Krümmungsradius*, d. h. der Radius ϱ des Krümmungskreises

$$\varrho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

Bei der Darstellung b) spezialisieren sich diese Werte zu

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Bei der Darstellung c) oder auch wenn die Kurve durch die Differentialgleichung erster Ordnung

$$Y(x, y) - \frac{dy}{dx} \cdot X(x, y) = 0$$

definiert ist, gilt folgende Darstellung, in der (n, x) den Winkel der Normale gegen die x-Achse, (n, y) den Winkel gegen die y-Achse bedeutet:

$$\xi = x - \frac{\cos(n,x)}{\frac{\partial \cos(n,x)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(n,y)}{\partial y}}, \quad \eta = y - \frac{\cos(n,y)}{\frac{\partial \cos(n,x)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(n,y)}{\partial y}},$$

$$\varrho = \frac{\partial \cos(n,x)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(n,y)}{\partial y}.$$

Ist die Kurve in *Polarkoordinaten* gegeben, so wird für $r' = \frac{dr}{d\varphi}$, $r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}$

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Der reziproke Krümmungsradius heißt die *Krümmung* und wird auch durch folgende *zyklische Abbildung* gewonnen: Man ziehe von einem festen Punkt O aus die Parallelen OT_1, OT_2, ... zu den Tangenten in $P_1, P_2, \ldots$; $T_1, T_2, \ldots$ seien ihre Schnittpunkte mit dem um O als Mittelpunkt beschriebenen Einheitskreis. Der Grenzwert des Quotienten $\Delta\tau : \Delta s$, wobei $\Delta\tau$ der Bogen auf dem Kreis, also der Winkel der Tangenten (*Kontingenzwinkel*) und Δs der Kurvenbogen P_1P_2 ist, wird die Krümmung, also ist

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\varrho}.$$

Historisches über diese Begriffe bei v. Mangoldt, S. 14ff. sowie Wölffing, S. 325.

Der Krümmungskreis berührt die Kurve und *durchdringt* sie dabei im allgemeinen; nur in den *Scheitelpunkten*, wo eine Berührung dritter oder höherer ungerader Ordnung eintritt und auf jeden Fall unter Voraussetzung der Darstellungsform b)

$$3y'y'' - y'''(1 + y'^2) = 0$$

ist, liegt er in der Umgebung des Punktes auf derselben Seite der Kurve.

In den *Wendepunkten*, für die

$$\text{a)} \quad x'y'' - y'x'' = 0 \quad \text{oder b)} \quad y'' = 0$$

wird, ist die Krümmung Null; in einer gewöhnlichen Spitze ist es der Krümmungsradius, nicht dagegen in einer Schnabelspitze.

Hat eine Kurve einen *asymptotischen Kreis*, so nähert sich ϱ, je mehr die Kurve dem Kreis sich nähert, dem Radius desselben, und M seinem Mittelpunkt (Cesàro, S. 23). M und ϱ ($= PM$) kann, vor allem bei kinematisch definierten Kurven, oft einfach durch Grenzbetrachtung als Schnitt zweier benachbarten Normalen

gefunden werden. Bei der Zykloide z. B. liegt der Krümmungsmittelpunkt M auf der Normale im doppelten Abstand wie der momentane Berührungspunkt T des rollenden Kreises und der geradlinigen Bahn.

Über weitere Konstruktionen auf kinematischer Grundlage vgl. die Angaben bei v. Mangoldt, S. 36 ff.; ferner Rohn-Papperitz, *Darstellende Geometrie* I, 3. Aufl., Leipzig 1906, S. 229—238.

3. *Evoluten.* Der Ort der Krümmungsmittelpunkte $M(\xi, \eta)$ heißt die *Evolute* der gegebenen Kurve. Die Normale der gegebenen Kurve in P ist Tangente der Evolute in M, die Bogenlänge MM_1 der Evolute ist gleich der Differenz der Krümmungsradien $\varrho = PM$ und $\varrho_1 = P_1M_1$.

Die Normale der gegebenen Kurve in einem Wendepunkt ist Asymptote der Evolute, einem Scheitelpunkt entspricht eine Spitze, eine Schnabelspitze wieder eine Schnabelspitze.

Beispiele von Evoluten. Für die *Ellipse* $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ist die Evolute $\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$, $\eta = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t$, eine Kurve 6. Ordnung mit vier Spitzen, die auf den Hauptachsen der Ellipse liegen und diese zu Rückkehrtangenten haben.

Für die *Hyperbel* $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$ ist die Evolute:

$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a}\,\mathrm{ch}^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 + b^2}{a}\,\mathrm{sh}^3 t.$$

Für die *Parabel* $2px = t^2$, $y = t$ ist die Evolute:

$$\xi = \frac{3t^3 + 2p^2}{2p}, \quad \eta = -\frac{t^3}{p^2},$$

woraus

$$8(\xi - p) - 27p\eta^2 = 0 \text{ (Neilsche Parabel).}$$

Für die *logarithmische Spirale* $x = ae^{ct}\cos t$, $y = ae^{ct}\sin t$ wird die Evolute $\xi = -cy$, $\eta = cx$ wieder eine logarithmische Spirale mit demselben asymptotischen Punkt.

Die *Zykloide* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ liefert die Evolute

$$\xi = a(t + \sin t), \quad \eta = a(-1 + \cos t),$$

also wieder eine der ersten kongruente und um eine halbe Periode verschobene Zykloide.

Über *Evoluten* vgl. Loria-Schütte, S. 609, 614; Wölffing, S. 329; v. Lilienthal, S. 24. Über Evoluten als *Hüllkurven* vgl. § 4.

4. *Evolventen.* Die Grundkurve entsteht rückwärts aus der Evolute als Bahn eines Punktes der auf der Evolute abrollenden Tangente, oder als Bahn eines Punktes von einem Faden, der um die Evolute gelegt ist, und, straff angezogen, von ihr fortgenommen wird; sie heißt die *Evolvente* der Evolute. Zu einer Kurve gehören, je nach der Wahl von P, verschiedene *Evolventen*, welche gemeinsame Normale und konstanten Normalabstand haben (*Parallelkurven*). Der Krümmungsmittelpunkt für alle Punkte der verschiedenen Evolventen auf einer Tangente der Grundkurve ist der Berührungspunkt der Grundkurve (vgl. Loria-Schütte, S. 643; Lilienthal, S. 41, 155, 163; Wölffing, S. 329).

Trägt man von einem festen Punkt O aus die Krümmungsradien einer Kurve der Größe und Richtung nach auf, so heißt der Ort der Endpunkte *Radiale* (Tucker, *Radial Curves*, *Proc. London Math. Soc.* **1** (1865), vgl. auch Loria-Schütte, S. 652). Der Inhalt der Radiale zwischen zwei Radien ist gleich dem des Vierecks, das von Evolute, Evolvente und den entsprechenden Krümmungsradien begrenzt wird (vgl. P. Ernst, *Die Radiale einer ebenen Kurve, Archiv f. Math.* (3) **14**, 94 (1909)).

§ 3. Natürliche Geometrie. Differentialinvarianten.

1. *Natürliche Koordinaten.* Verwendet man Koordinaten, welche auf ein in der Ebene festes Gebilde Bezug nehmen, also z. B. rechtwinklige Koordinaten oder Polarkoordinaten, so bringt man damit Größen in die Untersuchung, die mit der betrachteten Kurve an sich nichts zu tun haben, auch weisen Kurven von einfachem geometrischen Erzeugungsgesetz dann mitunter recht komplizierte Gleichungen auf. Diesem Übelstand sucht die *natürliche Geometrie* abzuhelfen, indem sie Größen einführt, welche damit weniger oder gar nicht behaftet sind, z. B.

s (Bogenlänge) und τ (Richtungswinkel der Normale)

oder

s (Bogenlänge) und ϱ (Krümmungsradius) (Cesàro)

oder

$k = \frac{1}{\varrho}$ (Krümmung) und $\frac{dk}{d\tau}$

(Scheffers, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie* I, 52, Leipzig 1901, im folgenden zitiert als Scheffers I).

Die Fragestellung der *natürlichen Geometrie* ist zuerst von dem Philosophen K. C. F. Krause (*De philosophiae et matheseos*

ratione earumque intima conjunctione, *Diss. Jena* 1802) aufgeworfen worden; der wahre mathematische Grund für die ganze Forschungsrichtung ist, daß die Rechnung mit Größen, welche bei Bewegung Invarianten sind, eben am besten Aufschluß gibt über innere d. h. bei Bewegung invariante Eigenschaften der Kurven (vgl. Wölffing, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten, Bibliotheca mathematica* **1**, 142 (1900)).

Die natürliche Gleichung (in s und ϱ) kann gefunden werden, indem man s und ϱ für sich als Funktionen des Parameters t berechnet.

So ergibt sich z. B. bei der *Zykloide* $s = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)$, $\varrho = 4a \sin\frac{t}{2}$, und daraus folgt die natürliche Gleichung

$$\varrho^2 + (s - 4a)^2 = 16a^2$$

oder bei Verlegung des Anfangspunktes von s

$$\varrho^2 + s^2 = 16a^2.$$

Weniger einfach werden aber die natürlichen Gleichungen eines *Mittelpunktskegelschnittes* mit den Halbachsen a, b

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{b\varrho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[\left(\frac{a\varrho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]}}$$

(Cesàro, p. 46). Führt man die Krümmungsradien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ der ersten, zweiten, ... Evolute ein, so erhält man die einfachere natürliche Gleichung

$$45\varrho\varrho_1\varrho_2 - 9\varrho^2\varrho_3 - 36\varrho^2\varrho_1 - 40{\varrho_1}^3 = 0$$

und für die *Parabel*

$$9\varrho^2 + 4{\varrho_1}^2 - 3\varrho\varrho_2 = 0$$

(Curran Skarp, *On the successive evolutes of a curve, Mess. of Math.* $\mathbf{9_2}$, 95 (1880)). Die *zykloidalen Kurven* haben dann die Gleichung $\varrho\varrho_3 - \varrho_1\varrho_2 = 0$ (Cesàro, *Remarques sur l'osculation, Nouv. Ann.* (2) **19**, 143 (1880)).

Die natürliche Gleichung der *Evolute* (s_1, ϱ_1) bekommt man durch Elimination von s aus

$$s_1 = \varrho, \ \varrho_1 = \varrho\frac{d\varrho}{ds}$$

(Cesàro, p. 34), wenn s und ϱ sich auf die Grundkurve beziehen.

Die natürliche Gleichung der *Fußpunktkurve* (s', ϱ') erhält man, wenn r den Abstand des Kurvenpunkts P vom Ausgangspunkt O der Lote, ϑ den Winkel der Tangente in P mit r bezeichnet, durch Elimination von s aus den Gleichungen:

$$s' = \int \frac{r}{\varrho}\, ds, \quad \varrho' = \frac{r^2}{2r - \varrho \sin\vartheta}$$

(Cesàro, p. 30). Hieraus ergibt sich, daß der Krümmungsmittelpunkt M' der Fußpunktkurve auf der Geraden liegt, welche P mit der Projektion M_1 des Krümmungsmittelpunktes M der Grundkurve auf OP verbindet. M' kann also konstruiert werden, da M_1 auf der bereits konstruierten Normale (§ 1) liegt.

Für *Rollkurven* ergibt sich die natürliche Gleichung durch Elimination von s aus

$$s' = \int \frac{r}{R}\, ds, \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{r} - \frac{Rp}{r^3}, \quad R = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_0}$$

(Cesàro, p. 82). Hierin ist ϱ der Krümmungsradius der Basiskurve K, ϱ_0 der der abgerollten Kurve (K_0) im momentanen Berührungspunkt T, $TP_0 = r$ der Abstand dieses Berührungspunktes von dem mit K_0 fest verbundenen Punkt P_0, dessen Bahn gesucht ist, p der Abstand des Punktes P_0 von der gemeinsamen Tangente beider Kurven in T.

Über *Rollkurven* hat Steiner folgenden Satz bewiesen: *Jeder Bogen einer Rollkurve mit geradliniger Basis ist gleich dem entsprechenden Bogen der Fußpunktkurve der beweglichen Kurve in bezug auf den erzeugenden Punkt* (Steiner, *Über Krümmungsschwerpunkte ebener Kurven*, *J. f. Math.* **21**, 33, 101, 1838; *Werke* II, 97).

Der Satz von Habich lautet:

Wenn bei der Abrollung einer Kurve auf einer Geraden ein in der Ebene der Kurve fester Punkt P die Rollkurve (P) beschreibt, so läßt die Fußpunktkurve der ersten Kurve in bezug auf P, wenn sie sich auf (P) abwickelt, den Punkt P eine Gerade beschreiben (vgl. Cesàro, p. 90).

2. *Die Differentialinvarianten einer ebenen Kurve.* Scheffers zeigt (Scheffers I, 51ff.), daß alle Kurven, welche dieselbe natürliche Gleichung

$$\frac{dk}{d\tau} = \omega(k) \quad \left(k = \frac{1}{\varrho}\right)$$

erfüllen, einander kongruent sind. Als *Differentialinvariante* einer Kurve $y = f(x)$ *gegenüber der Gruppe der Bewegungen* werden

diejenigen Funktionen $J(x, y, y', y'' \ldots)$ bezeichnet, welche bei der Transformation der rechtwinkligen Koordinaten oder bei Bewegungen ihren Wert nicht ändern. Diese lassen sich auf gewisse *wesentliche Differentialinvarianten* reduzieren. Als solche kann man eine der folgenden Reihen nehmen (Scheffers I, 50):

$$k = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{dk}{d\tau}, \quad \frac{d^2k}{d\tau^2}, \ldots$$

$$\varrho_1 = \frac{d\varrho}{d\tau}, \quad \varrho_2 = \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}, \ldots$$

$$k, \quad \frac{dk}{ds}, \quad \frac{d^2k}{ds^2}, \ldots$$

$$\varrho, \quad \frac{d\varrho}{ds}, \quad \frac{d^2\varrho}{ds^2} \ldots.$$

Die zweite Reihe beginnt mit dem Krümmungsradius und wird gebildet aus den Krümmungsradien der ersten und der höheren Evoluten.

Über die Ableitung der Kongruenz aus der Identität der Differentialinvarianten zweier Kurven vgl. die kritischen Bemerkungen von Study, *Math. Ver.* 1908, S. 125—142.

§ 4. Kurvenscharen. Einhüllende Kurve. Striktionslinie.

Ist in der Ebene eine einfach unendliche Kurvenschar gegeben durch die Gleichung

$$f(x, y, c) = 0,$$

in der c von Kurve zu Kurve variiert, so gibt es eine gemeinsame Berührungskurve, wenn die Gleichungen

$$f(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

eine reelle Lösung

$$x = x(c), \quad y = y(c)$$

besitzen, für die $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht gleichzeitig verschwinden.

Diese Kurve berührt die Einzelkurven der Schar in der n^{ten} Ordnung, wenn außer $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$ auch noch $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}, \cdots \frac{\partial^n f}{\partial c^n}$ Null ist, nicht dagegen $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial c^{n+1}}$. Wenn n ungerade ist, dann ist die Kurve wirklich *Einhüllende*, ist n gerade, dann durchdringt sie berührend

die Einzelkurven der Schar. So durchdringt z. B. jede Kurve die Schar ihrer Krümmungskreise (Lilienthal, S. 74).

Eine einfach unendliche Schar von Geraden, die weder einander parallel sind, noch ein und denselben Punkt gemein haben, besitzt eine Einhüllende.

Als Beispiele solcher Geradenscharen nennen wir die *Normalen* einer Kurve, welche die *Evolute* einhüllen, oder die unter dem Winkel α gegen die Tangente von der Kurve ausgehenden Strahlen, welche eine *Evolutoïde* einhüllen, oder die Geraden, welche aus einer gegebenen Geradenschar hervorgehen, wenn sie an einer Kurve Γ gespiegelt oder gebrochen werden. Sie umhüllen die *Brennlinie* (die bei Spiegelung *Katakaustika*, bei Brechung *Diakaustika* genannt wird). Brennlinien sind zuerst von Johann Bernoulli untersucht: *Lineae cycloidales, evolutae, antevolutae, causticae, anticausticae, pericausticae, Acta erud.* Mai 1692. Siehe Loria-Schütte, S. 662ff., wo sich viele Literaturangaben finden, und auch Lilienthal, S. 77ff.

Aus der Lehre von den Brennlinien seien folgende Sätze herausgegriffen:

Ist M (ξ, η) ein Punkt der spiegelnden Kurve und C das zugehörige Krümmungszentrum, so findet man den entsprechenden Punkt P (x, y) der Brennlinie für parallele Strahlen, indem man den Mittelpunkt der Strecke MC auf den reflektierten Strahl projiziert.

Die Kaustika B *einer beliebigen (spiegelnden oder brechenden) Kurve Γ für solche Strahlen, die eine Kurve* A *berühren (oder zu einer Kurve* A'*, der Evolvente von* A*, normal sind), ist die Evolute einer Kurve* B'*, welche die Enveloppe der unendlich vielen Kreise K ist, deren Mittelpunkte auf der Kurve Γ liegen und deren Radien zu den Abständen der Mittelpunkte von den entsprechenden Punkten der Kurve* A' *in einem konstanten Verhältnis stehen,* nämlich dem des Sinus des Einfallwinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels (Gergonne, *Sur les caustiques planes, Annales de Mathém.* **15** (1824)).

Über die Bestimmung der Berührungskurve der Kurven $v = \text{const.}$ in dem Fall, wo die Kurven durch Gleichungen

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

gegeben sind, vgl. Lilienthal, S. 85—95.

Die senkrechten Durchdringungskurven einer Kurvenschar haben in den Punkten der Einhüllenden dieser Schar Spitzen, doch gilt die Umkehrung dieses Satzes nicht (Lilienthal, S. 95).

Striktionslinie einer Kurvenschar heißt diejenige Kurve, längs deren die Normalabstände benachbarter Kurven ein *Maximum* (*Stauungslinie*) oder *Minimum* (*Einschnürungslinie*) werden (Lilienthal, S. 96—106).

Ist

$$Y(x, y)\,dy - X(x, y)\,dy = 0$$

die Differentialgleichung der Kurvenschar, so ist die Differentialgleichung für die Striktionslinie

$$XY\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right) + X^2\frac{\partial Y}{\partial y} + Y^2\frac{\partial X}{\partial x} = 0\,.$$

Im allgemeinen schneidet die Striktionslinie die Kurvenschar senkrecht, doch ist z. B. für die Schar der Krümmungskreise einer Kurve diese Kurve Striktionslinie, *berührt* aber die Kurvenschar.

§ 5. Kurvennetze in der Ebene. Abbildungsaufgaben.

Führt man durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v),\quad y = \psi(u, v)$$

in der Ebene *krummlinige Koordinaten* u, v ein, so verwandelt sich der Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes für

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u},\quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\ \text{usw.}$$

in

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 =$$
$$(\varphi_u{}^2 + \psi_u{}^2)\,du^2 + 2\,(\varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v)\,du\,dv + (\varphi_v{}^2 + \psi_v{}^2)\,dv^2.$$

Der Winkel zwischen den durch einen Punkt gehenden Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ ist gegeben durch

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\varphi_u\psi_v - \psi_u\varphi_v}{\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v},$$

die Bedingung des Senkrechtstehens ist also

$$\varphi_u\psi_u + \varphi_v\psi_v = 0\,.$$

Ist sie für alle Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ erfüllt, so spricht man von einem Orthogonalsystem.

Der Inhalt eines Ebenenstückes ist durch das Doppelintegral

$$\int\int dx\,dy = \int\int du\,dv\,(\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u)$$

ausgedrückt. Im Fall des Orthogonalsystems wird hieraus

$$\int\int dx\,dy = \int\int du\,dv\,\sqrt{\varphi_u{}^2 + \varphi_v{}^2}\,\sqrt{\psi_u{}^2 + \psi_v{}^2}\,.$$

Es wird z. B. in Polarkoordinaten (r, φ)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad \int\int dx\,dy = \int\int r\,dr\,d\varphi;$$

in den elliptischen Koordinaten (λ_1, λ_2), welche die stets reellen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$$

sind, wobei x, y die Koordinaten des darzustellenden Punktes bedeuten,

$$ds^2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{4}\left(\frac{d\lambda_2^2}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)} - \frac{d\lambda_1^2}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)}\right).$$

Ein orthogonales Kurvennetz heißt *isotherm*, wenn es möglich ist, statt u eine solche Funktion u_1 von u, statt v eine solche Funktion v_1 von v einzuführen, daß das Quadrat des Bogenelementes die Form bekommt

$$ds^2 = \Omega(u_1, v_1)(du_1^2 + dv_1^2),$$

d. h. die Kurven des Systems so anzuordnen, daß die Ebene durch sie in infinitesimale *Quadrate* zerlegt wird. Der Ausdruck *isotherm* wurde zuerst von Lamé in den *Annales de Chimie et de Physique* **53**, 195 (1833) gebraucht.

Die Polarkoordinaten r, φ werden *isotherm*, wenn man statt r einführt

$$u = \log r.$$

Vgl. z. B. Scheffers I, 124 ff.

Die Kurven (u, v) lassen sich allgemeiner in ein *rhombisches Netz* anordnen, wenn es möglich ist, solche Funktionen $\alpha(u)$ und $\beta(v)$ zu bestimmen, daß

$$\alpha^2(u)(\varphi_u^2 + \psi_u^2) - \beta^2(v)(\varphi_v^2 + \psi_v^2) = 0$$

wird. Es bilden dann die Kurven

$$u_1 = \int \frac{du}{\alpha(u)} = \text{const.}, \quad v_1 = \int \frac{dv}{\beta(v)} = \text{const.}$$

das rhombische Netz (vgl. Scheffers I, 113 ff.).

Deutet man in den Gleichungen $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ u und v als rechtwinklige Koordinaten in einer zweiten Ebene, so stellen sie eine *Abbildung* dar.

Man erhält eine *winkeltreue* (in den kleinsten Teilen *ähnliche*, *konforme*) Abbildung, indem man x dem reellen, y dem imaginären Teil einer komplexen Funktion von $u + iv$ gleichsetzt. Die Be-

zeichnung *konform* rührt von Gauß her, *Gött. Abh.* II, 1844, *Werke* IV, 262, die Verdeutschung *winkeltreu* von Breusing.

Die Lehre von der konformen Abbildung der Ebene gehört der Theorie der komplexen Funktionen an. Wir verweisen auf G. Holzmüller, *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen*, Leipzig 1892, sowie auf die *Literaturangaben* bei Wölffing, S. 355f.

Bei der *flächentreuen* (*äquivalenten*) Abbildung wird gefordert, daß der Flächeninhalt ungeändert bleibt, also

$$\int\int dx\,dy = \int\int du\,dv, \text{ d. h. } \varphi_u\psi_v - \psi_u\varphi_v = 1.$$

Gravé, *Sur la construction des cartes géographiques, Journ. de Math.* (5) **1**, 317 (1896), setzt die Transformationsgleichungen in der Form an

$$y = y(x, u), \quad v = v(x, u);$$

hierdurch bekommt die Forderung die Gestalt

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Wenn $\omega\,(x, u)$ eine im übrigen beliebige Funktion von u und x ist, für die nur

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial u} \neq 0,$$

so entsteht eine flächentreue Abbildung der x, y auf die uv-Ebene, wenn gesetzt wird

$$y = -\frac{\partial \omega\,(x, u)}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \omega\,(x, u)}{\partial u}.$$

Sollen den Geraden $x = \text{const.}$ die Geraden $u = \text{const.}$ entsprechen, so ist zu setzen

$$x = \varphi(u), \quad y = \frac{v}{\frac{d\varphi}{du}} + \omega(u).$$

Tissot hat sich mit dem Problem der Abbildung eingehend beschäftigt; er beweist, daß es bei jeder Abbildung ein bestimmtes Orthogonalsystem gibt, dem wieder ein Orthogonalsystem entspricht, auch untersucht er, wie man die Abbildung einzurichten hat, damit die Strecken- und Winkelverzerrung möglichst klein wird. Es handelt sich dabei um die Abbildung begrenzter Teile krummer Flächen, z. B. der Erdoberfläche, auf die Ebene.

Vgl. A. Tissot, *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Nouv. Annales de*

Math. (2) **17** (1878), **18** (1879), **19** (1880) Supplément; *Netzentwürfe geographischer Karten,* übersetzt von E. Hammer, Stuttgart 1887. Ferner G. Scheffers, *Verzerrung bei perspektiver Abbildung ebener Figuren, Ber. der K. Sächs. Ges. d. W.* **44**, 162 (1892).

§ 6. Sätze über zweifach unendliche Kreisscharen, Kurvennetze ohne Umwege, Isogonal- und Äquitangentialkurven.

1. *Kreisscharen.* G. Scheffers hat, *Math. Annalen* **60**, 491 (1905), eine Reihe von Sätzen über gewisse Kurvennetze gegeben, welche hier kurz entwickelt werden sollen.

Ist in der Ebene eine Schar von ∞^1 Kurven gegeben, so gehören zu jeder Kurve ∞^1 Krümmungskreise, zur ganzen Schar also ∞^2. Sind umgekehrt ∞^2 Kreise gegeben:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\quad r=r(a,\,b),$$

so stellen wir uns die Aufgabe, die Kreise so *in Scharen von* ∞^1 *Kreisen anzuordnen, daß die Kreise jeder Schar die einhüllende Kurve dieser Schar oskulieren.*

Soll a, b der zu x, y gehörige Evolutenpunkt, r der Krümmungsradius und φ der Winkel der Normale mit x-Achse sein, so muß sein

$$da=dr\cos\varphi,\quad db=dr\sin\varphi,$$

oder für $\dfrac{\partial r}{\partial a}=r_1,\quad \dfrac{\partial r}{\partial b}=r_2$

$$da^2+db^2=dr^2=(r_1\,da+r_2\,db)^2. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung 1. Ordnung und zweiten Grades zeigt, daß es *zwei* Anordnungen der Krümmungskreise gibt, und jeder Kreis eine Kurve der einen Schar und eine der andern oskuliert. Die beiden Punkte (x, y), in denen der Kreis oskuliert, sind bestimmt durch

$$1+r_1\cos\varphi+r_2\sin^2\varphi=0, \tag{2}$$

$$x=a+r\cos\varphi,\quad y=b+r\sin\varphi.$$

Daß die Enveloppen in den beiden Punkten welche den durch (2) bestimmten Werten φ_1 und φ_2 entsprechen, wirklich oskuliert, zeigt die Rechnung; die Formeln (2) geben

$$x'=-r\sin\varphi\cdot\varphi',\quad y'=r\cos\varphi\cdot\varphi'$$

und

$$\xi=a,\quad \eta=b.$$

2. *Kurvennetze ohne Umwege.* Die Gleichung (1) oder, wenn man für a, b, r schreibt x, y, $f(x, y)$,

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right)^2$$

definiert ein Kurvensystem in der Ebene, das durch jeden Punkt P der Ebene im allgemeinen zwei Kurven schickt. Führt man einen Punkt P auf lauter Stufen, deren Bogen aus Kurven des Systems zusammengesetzt sind, von $P_0(x_0 y_0)$ nach $P_1(x_1 y_1)$ über, so ergibt sich als Weglänge

$$s = \int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} \sqrt{dx^2 + dy^2} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0).$$

Alle diese Wege sind *gleich lang*, wobei aber zu beachten ist, daß die Wegstücke algebraisch und nicht dem absoluten Betrage nach zu addieren sind.

Ein Beispiel sind die Tangenten an den Kreis

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

deren Differentialgleichung lautet

$$dx^2 + dy^2 = \left(d\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\right)^2.$$

Zwei durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \alpha(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \beta(x, y)$$

definierte Kurvenscharen bilden ein *Netz ohne Umweg,* wenn

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\sqrt{1 + \beta^2} = \pm\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Abgesehen von dem Fall, in dem eine oder beide Scharen Gerade sind, sind die Kurven des Netzes immer Evoluten zweier Kurvenscharen mit gemeinsamen Krümmungskreisen.

Die beiden Punkte P_1, P_2, in denen der Kreis $K(a, b, r)$ von den Einhüllenden oskuliert wird, mögen *Oskulationspunkte* heißen, ihre Verbindungsgerade

$$(x - a)r_1 + (y - b)r_2 + r = 0$$

die *Oskulationssehne* des Kreises K, der Pol der Oskulationssehne in bezug auf K (*Oskulationspol*) hat die Koordinaten

$$u = a - rr_1, \quad v = b - rr_2.$$

Betrachtet man die *Isogonalkurven* einer Kurvenschar, d. h. diejenigen Kurven, welche die Kurven einer gegebenen Schar unter dem Winkel γ schneiden, so gilt der Satz:

Legt man durch einen Punkt P alle ∞^1 Isogonalkurven einer gegebenen Kurvenschar, so bilden deren Krümmungskreise ein Büschel. Die Potenzlinie dieses Büschels ist die Oskulationssehne des Krümmungskreises der Kurve der gegebenen Schar.

Wir stellen die Kurven der gegebenen Schar dar mit Hilfe der Krümmungskreise, also der Gleichungen (2); a, b, r und φ benützen wir aber auch zur Darstellung der Isogonaltrajektorien; dann ist, wenn x_1, y_1 die Punkte der Trajektorie sind, zu fordern:

$$\frac{y_1'}{x_1'} = \frac{b' + r' \sin\varphi + r\cos\varphi \cdot \varphi'}{a' + r'\cos\varphi - r\sin\varphi \cdot \varphi'} = -\frac{\cos(\varphi+\gamma)}{\sin(\varphi+\gamma)}$$

und hieraus folgt

$$x_1' \sin\gamma = \sin(\varphi+\gamma)\cdot f, \quad y_1' \sin\gamma = \cos(\varphi+\gamma)\cdot f,$$

$$x_1' y_1'' - y_1' x_1'' = \varphi' \cdot \frac{f^2}{\sin\gamma},$$

wobei $f = a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + r'$.

Indem man beständig die Definitionsgleichung von φ benützt, ergibt sich daraus für den Krümmungsmittelpunkt (ξ_1, η_1) der Isogonalkurve:

$$\xi_1 = a + \frac{r r_1}{\cos\gamma\,(r_1\sin\varphi - r_2\cos\varphi) - \sin\gamma},$$

$$\eta_1 = b + \frac{r r_2 \sin\gamma}{\cos\gamma\,(r_1\sin\varphi - r_2\cos\varphi) - \sin\gamma}$$

und für den Krümmungskreis selbst die Gleichung

$$(\cos\gamma\,(r_1\sin\varphi - r_2\cos\varphi) - \sin\gamma)\,((x-a)^2 + (y-b)^2 - r)^2$$
$$- 2r\sin\gamma\,((x-a)r_1 + (y-b)r_2 + r) = 0,$$

hierin ist der Satz enthalten. Dieser Satz ist vor Scheffers von Cesàro aufgefunden, vgl. Cesàro, p. 149.

Sind zwei Kurvenscharen mit gemeinsamen Krümmungskreisen K (a, b, r) gegeben, und konstruiert man zur ersten die Isogonaltrajektorien (γ), zur zweiten die Isogonaltrajektorien $(-\gamma)$, so zeigt sich, *daß diese beiden Isogonalscharen wieder in derselben Beziehung stehen, d. h. gemeinsame Krümmungskreise* K (α, β, ϱ) *besitzen.*

Es zeigt sich nämlich: Die Gesamtheit der Kreise K, von denen jeder einen zugehörigen Kreis K (a, b, r) in den Oskulationspunkten P_1, P_2 (siehe oben) unter den Winkeln γ, $-\gamma$ schneidet, er gibt eine zweite zweifach unendliche Kreisschar K mit den Mittelpunkten

$$\alpha = a - \frac{sr_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \quad \beta = b - \frac{sr_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}},$$

wobei

$$s = \frac{r\sqrt{r_1^2 + r_2^2}\,|\sin\gamma}{\sin\gamma + \cos\gamma\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 1}},$$

und den Radien

$$\varrho = \frac{r}{\sin\gamma + \cos\gamma\sqrt{r_1^2 + r_2 - 1}}.$$

Bildet man für diese Kreise K die Oskulationssehne

$$(x-\alpha)\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha} + (y-\beta)\frac{\partial\varrho}{\partial\beta} + \varrho = 0,$$

so fällt sie zusammen mit der Oskulationssehne

$$(x-a)\frac{\partial r}{\partial a} + (y-b)\frac{\partial r}{\partial b} + r = 0,$$

und hieraus folgt, daß P_1 und P_2 auch die Oskulationspunkte von K sind; die von den K oskulierten Isogonalkurven haben also wieder einen K als *gemeinsamen Krümmungskreis*, dieser K oskuliert die durch P_1 gehende Isogonalkurve in P_1, die durch P_2 gehende in P_2.

Den Isogonalkurven stehen dualistisch gegenüber die *Äquitangentialkurven*: Berührt eine Gerade eine bestimmte Kurve der gegebenen Schar in $P(x, y)$ und die Äquitangentialkurve in P_1 (x_1, y_1), so ist die Entfernung PP_1 konstant, gleich h; dadurch ist die Kurvenschar definiert.

Benützt man zur Darstellung der Kurven der gegebenen Schar wieder a, b, r und φ, so wird die Äquitangentialkurve

$$x_1 = a + r\cos\varphi - h\sin\varphi, \quad y_1 = b + r\sin\varphi + h\cos\varphi,$$

und es folgt die Differentialgleichung:

$$\frac{y_1'}{x_1'} = \frac{b' + r\cos\varphi\cdot\varphi' + \sin\varphi\,(r' - h\varphi')}{a' - r\sin\varphi\cdot\varphi' + \cos\varphi\,(r' - h\varphi')} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Für den Krümmungsmittelpunkt werden die Koordinaten

$$\alpha = a - \frac{hr_1}{r_1\sin\varphi - r_2\cos\varphi}, \quad \beta = b - \frac{hr_1}{r_1\sin\varphi - r_2\cos\varphi},$$

und der Krümmungsradius

$$\varrho = r - \frac{h}{r_1\sin\varphi - r_2\cos\varphi}.$$

Man sieht, daß die Krümmungskreise aller *Äquitangentialkurven*, welche die Tangente

$$x_1 = a + r\cos\varphi - h\sin\varphi, \quad y_1 = b + r\sin\varphi + h\cos\varphi$$

(h beliebig) der Kurve der ersten Schar berühren, *noch eine zweite gemeinsame Tangente besitzen,* und zwar ist der Schnittpunkt beider Tangenten gerade der *Oskulationspol*

$$\xi = a - rr_1, \quad \eta = b - rr_2$$

des Krümmungskreises $K\ (a, b, r)$.

Ebenso existiert ein Satz, der dem Satz über die beiden Isogonalkurvensehnen $(\gamma, -\gamma)$ dualistisch entspricht.

Man leitet aus zwei gegebenen Kurvenscharen mit gemeinsamen Krümmungskreisen je eine Äquitangentialschar ab, indem man auf den Tangenten des Krümmungskreises K in P_1 und P_2 $P_1T_1 = h$ und im entgegengesetzten Sinn $P_2T_2 = h$ abträgt. Jetzt betrachtet man die Kreise K, welche P_1T_1 in T_1, P_2T_2 in T_2 berühren. K und K haben dann zufolge dieser Definition einen gemeinsamen Tangentenschnittpunkt in dem Oskulationspol von K. Für den Mittelpunkt (α, β) und den Radius ϱ von K folgt:

$$\alpha = a - \frac{hr_1}{\sqrt{r_1^2 + r_1^2 - 1}}, \quad \beta = b - \frac{hr_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 1}},$$

$$\varrho = r - \frac{h}{\sqrt{r_1^2 + r_1^2 - 1}}.$$

Die Rechnung ergibt sodann für den Oskulationspol (u_1, v_1) des Kreises $\mathsf{K}\ (\alpha, \beta, \varrho)$

$$u_1 = \alpha - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} = a - rr_1, \quad v_1 = \beta - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \beta} = b - rr_2,$$

also fällt der Oskulationspol von K mit dem des entsprechenden Kreises K zusammen, und daraus folgt, daß die von K oskulierten Äquitangentialkurven, die eine in T_1, die andere in T_2 oskuliert werden, daß also die *Äquitangentialkurven wieder gemeinsame Oskulationskreise* K *haben.*

Scheffers hat in seiner Arbeit die ganze Theorie im Zusammenhang mit der *Geometrie der Berührungstransformationen* dargestellt, während wir hier von den zweifach unendlich vielen Krümmungskreisen ausgingen. Man vergleiche auch Lilienthal, S. 120 ff.

Kapitel XXIV.

Die nichteuklidische Geometrie.

Von *J. Mollerup* in Kopenhagen.

§ 1. Einleitung.

Unter einer nichteuklidischen Begründung der Geometrie wird jede vom Euklidischen Axiom (Kap. I, § 6) oder einem gleichwertigen Axiom unabhängige Begründung der Geometrie verstanden. Den Ursprung einer solchen Geometrie bilden die zahlreichen Versuche, das Euklidische Postulat zu beweisen, die schon im Altertum begonnen und bis zum Anfang des vorigen Jahrhunderts gedauert haben. Diese Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie ist ausführlich behandelt in den Werken: Engel und Stäckel, *Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß*, Leipzig 1895, und Bonola-Liebmann, *Die nichteuklidische Geometrie*, Leipzig 1908. Die erste wesentliche Förderung der Frage verdankt man Saccheri (1667—1733), *Euclides ab omni naevo vindicatus etc.*, Mailand 1733 (Engel-Stäckel a. a. O.); er geht aus von der Betrachtung eines Vierecks mit zwei gegenüberliegenden, gleichen, auf der Grundlinie senkrechten Seiten; je nachdem man annimmt, daß die zwei unbekannten gleichen Winkel in einem solchen Viereck rechte, stumpfe oder spitze sind, gilt das gleiche auch in jedem andern Fall. Dieser Hauptsatz wird aus Stetigkeitsbetrachtungen hergeleitet; er ist mit dem folgenden sogenannten Legendreschen Satze gleichbedeutend:

Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der Winkel gleich, größer oder kleiner als zwei rechte Winkel ist, dann ist auch in jedem andern Dreieck die genannte Summe entsprechend gleich, größer oder kleiner als zwei rechte Winkel.

Dieser Satz wurde von Lambert (1728—1777), *Theorie der Parallellinien*, 1786, wiedergefunden und neu bewiesen, und zwar auch *ohne Stetigkeitsbetrachtungen* (vgl. Dehn, *Math. Ann.*

53, 405, sowie Bonola, a. a. O., S. 33). Die Unmöglichkeit der Hypothese des stumpfen Winkels wurde unter Annahme der Unendlichkeit der Geraden bewiesen; auch die Unmöglichkeit der Hypothese des spitzen Winkels sollte als evident hingestellt werden, ohne daß aber ein wirklicher Beweis gelang.

Ungefähr gleichzeitig fanden dann Gauß (1777—1855, *Werke* VIII, 175, 182), Lobatschefsky (1793—1856) und J. Bolyai (1802—1860) die Widerspruchslosigkeit der Hypothese des spitzen Winkels und damit eine dieser Hypothese entsprechende Geometrie, bei der durch einen gegebenen Punkt *zwei* Parallele zu derselben Geraden möglich sind. Die Arbeiten von Lobatschefsky sind die folgenden: *Über die Anfangsgründe der Geometrie* (1830), *Neue Anfangsgründe der Geometrie* (1835 —38); vereinigt in dem Band von F. Engel: N. J. Lobatschefskij, *Zwei geometrische Abhandlungeu usw.*, Leipzig 1899; *Imaginäre Geometrie*, 1835 und *Anwendungen der imaginären Geometrie auf einige Integrale*, 1836 (Übersetzung von Liebmann, *Abh. z. Gesch. d. Math.* XIX, Leipzig 1904); *Géometrie imaginaire, J. f. Math.* **27**, 245; *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin 1840 (1887); *Pangéometrie*, übersetzt von Liebmann, Leipzig 1902 (Ostwalds *Klassiker* Nr. 30).

J. Bolyai hat seine Geometrie veröffentlicht in: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc.* (in dem *Tentamen* seines Vaters), neu gedruckt Budapest 1902.

Während in der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie die Gerade unendlich ist, hat Riemann von sehr allgemeinen Betrachtungen ausgehend zuerst die Möglichkeit der geschlossenen Geraden in Betracht gezogen und hierdurch eine der Hypothese des stumpfen Winkels entsprechende Geometrie gefunden, in der keine Parallelen existieren (*Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen, Werke* 2. Aufl., S. 272 (1854)).

Die Tatsachen dieser nichteuklidischen Geometrien wollen wir nach Cayley (*A sixth memoir upon quantics, Phil. Trans.* **149**, 1859, **61**, *Collected math. pap.* **2**, 561 (1889)) und besonders nach F. Klein (*Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie, Math. Ann.* **4**, **6**, **7**, **37**, *Nichteuklidische Geometrie* I, II, autographierte Vorlesungen, Göttingen (Leipzig) 1893) mittels der projektiven Geometrie darstellen. *Die axiomatischen Voraussetzungen sind dann die graphischen Axiome und das Stetigkeitsaxiom;* es ist schon im Kap. VI, § 1 beschrieben, wie man sich nach Pasch durch Einführung der idealen Elemente vom Parallelenaxiom unabhängig machen kann. Außerdem

ist in Kap. VI, § 3 gezeigt, wie man die Punkte einer Strecke OEU ein-eindeutig den positiven Zahlen und die Punkte der komplementären Strecke den negativen Zahlen entsprechen lassen kann.

Wir wählen nun, um zur gewöhnlichen (Euklidischen) Geometrie zu gelangen, zwei Geraden, die sich in einem Punkte O schneiden, als X- und Y-Achse; die Punkte E_1 und U bzw. E_2 und V sollen Einheitspunkt und Unendlichkeitspunkt von OX bzw. OY sein. Der Punkt P möge aus V bzw. U auf die X- bzw. Y-Achse in P_1 bzw. P_2 projiziert werden; die inhomogenen Koordinaten von P sind dann die reellen Zahlen x und y, die den Punkten P_1 und P_2 in den Koordinatensystemen OE_1U und OE_2V entsprechen. Das Dreieck OUV ist das Koordinatendreieck; der Gleichung einer Geraden, die nicht durch V geht, läßt sich die Form geben

$$y = mx + c.$$

Für eine Gerade durch den Anfangspunkt ist $\frac{y}{x}$ eine Konstante. Schneidet diese Gerade die Gerade UV in L, dann soll auch für diesen Punkt $\frac{y}{x}$ gleich derselben Konstanten sein, obwohl x und y unendlich werden. Wir können auch homogene Koordinaten einführen, wenn wir

$$x = \frac{\xi}{\zeta} \text{ und } y = \frac{\eta}{\zeta}$$

setzen; die Gleichung der *unendlich fernen Geraden*, für deren Punkte wenigstens eine der Koordinanten x, y unendlich wird, ist dann

$$\zeta = 0.$$

Nunmehr definieren wir nach den Formeln der Cartesischen Geometrie: sind $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ zwei Punkte, dann ist der Abstand der beiden Punkte

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Sind $y = mx + a$ und $y = m_1 x + a_1$ die Gleichungen zweier Geraden l und l_1, dann verstehen wir unter dem *Winkel* (ll_1) den Ausdruck

$$(ll_1) = \text{arc tg } \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}.$$

Wir nennen zwei Gerade parallel, wenn sie die unendlich ferne Gerade in demselben Punkte schneiden; wir nennen sie aufeinander senkrecht, wenn ihre Gleichungen von der Form sind:

$$y = mx + a \text{ und } y = -\frac{1}{m}x + a_1$$

oder

$$y = a \text{ und } x = a_1.$$

Nach diesen Definitionen sehen wir ohne Schwierigkeit ein, daß die Formeln für die Parallelverschiebung und die Drehung des Koordinatensystems die gewöhnlichen sind; sodann zeigt sich auch, daß der Abstand zweier Punkte und der Winkel zweier Geraden unabhängig vom Koordinatensystem werden.

Wir können darauf die ganze Descartessche Geometrie aufbauen und haben somit gezeigt, daß alle Tatsachen dieser Geometrie sich auf den graphischen Axiomen und dem Stetigkeitsaxiom definitionsmäßig aufbauen lassen ohne Zuhilfenahme des Parallelenaxioms oder der Kongruenzaxiome.

§ 2. Die projektive Maßgeometrie.

Um eine allgemeine Maßbestimmung zu finden, brauchen wir den folgenden Satz von Laguerre, *Nouv. Ann.* (1) **12**, 64 (1853):

Der Winkel zweier Geraden ist gleich $\frac{i}{2}$ *mal dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die beiden Geraden mit den Geraden aus ihrem Schnittpunkte nach den imaginären unendlich fernen Kreispunkten bestimmen.*

Es seien zunächst x und x' zwei Punkte einer Geraden, deren *Entfernung* zu bestimmen ist; wir legen auf derselben durch eine Gleichung zweiten Grades in den homogenen Koordinaten x_1, x_2

$$(1) \qquad \Sigma_{xx} = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2$$

zwei Punkte fest, *die Fundamentalpunkte der Maßbestimmung.* Sind diese ξ und ξ', so definieren wir den Maßunterschied durch die Gleichung

$$(2) \qquad M(xx') = k \cdot \log(xx'\xi\xi'),$$

wo $(xx'\xi\xi')$ das Doppelverhältnis der vier Punkte ist. Durch diese Definition genügen wir der Regel der Addition:

$$M(xx') + M(x'x'') = M(xx'').$$

Die verschiedenen möglichen Fälle scheiden sich dann wie folgt:

1. *Die elliptische Maßbestimmung.*

Es seien die Wurzeln der Gleichung (1) *konjugiert imaginär:*

$a \pm ib$. Wir setzen dann die Konstante der Maßbestimmung (2) $k = ik'$, also

$$M(xx') = ik' \log (xx'\xi\xi').$$

Jedem Fundamentalpunkt entspricht ein Bildpunkt der komplexen Zahl $a \pm ib$, und es gilt der Satz: *Zwei reelle Punkte der Geraden haben eine reelle Entfernung; dieselbe ist $2k'$ mal dem Winkel, den die Geraden aus dem komplexen Bildpunkt eines Fundamentalpunktes nach den gegebenen Punkten einschließen. Die Länge der ganzen Geraden ist $2k'\pi$ und somit endlich.*

Die elliptische Maßbestimmung hat eine reelle Periode, nämlich $ik' \cdot 2\pi i = -2k'\pi$; wir finden (Klein, *Vorlesungen* S. 73):

Die elliptische Maßbestimmung auf der Geraden ist ein geradliniger Schnitt der gewöhnlichen Winkelbestimmung im Strahlbüschel.

Die gewöhnliche Winkelbestimmung im Strahlbüschel hat schon nach dem Satze von Laguerre den elliptischen Charakter; die konjugiert imaginären Fundamentalstrahlen sind die Strahlen nach den unendlich fernen Kreispunkten, die Konstante k der Maßbestimmung (2) ist $\frac{i}{2}$.

2. *Die hyperbolische Maßbestimmung.*

Es seien nun die Fundamentalpunkte ξ und ξ' *reell;* damit die Entfernung zweier reellen Punkte zwischen den Fundamentalpunkten reell wird, nehmen wir jetzt die Konstante k der Formel (2) reell an. Die Richtigkeit folgender Tatsachen ist leicht ersichtlich:

Die Entfernung eines Punktes von einem Fundamentalpunkte ist unendlich, die Gerade enthält also zwei unendlich ferne Punkte.

Die reelle Entfernung zweier Punkte auf der Strecke, deren Endpunkte die Fundamentalpunkte sind, ist eindeutig bestimmt, denn die Entfernung hat hier eine *imaginäre* Periode $2\pi ik$.

Die Punkte außerhalb der Fundamentalpunkte haben eine imaginäre Entfernung von den inneren Punkten; sie werden bei der Maßgeometrie als nichtexistierende Punkte aufgefaßt.

Die hyperbolische Maßgeometrie im Büschel enthält in derselben Weise zwei reelle Fundamentalstrahlen; zwischen diesen liegen die reellen Strahlen, die einen reellen Winkel bilden.

3. *Die parabolische Maßbestimmung.*

Stellen wir uns vor, daß die Fundamentalpunkte einander unendlich nahe rücken und daß die Konstante der Maßbestimmung (2) in passender Weise unendlich wird, dann erhalten wir eine sogenannte parabolische Maßbestimmung, welche die gewöhnliche Euklidische als Spezialfall enthält.

§ 3. Die elliptische Maßbestimmung in den Grundgebilden zweiter Stufe.

Wir machen uns zuerst einige Begriffe aus der gewöhnlichen analytischen Raumgeometrie geläufig (vgl. Kap. IV). Die *absolute Kegelfläche* mit der Spitze im Anfangspunkt ist die Fläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Sind die homogenen Koordinaten eines Raumpunktes (x, y, z, t), dann ist $t = 0$ die Gleichung *der unendlich fernen Ebene.* Dieselbe schneidet die Kegelfläche in dem (unendlich fernen) *Kugelkreis.* Die *Kreispunkte* einer beliebigen Ebene sind die Schnittpunkte dieser Ebene mit dem Kugelkreise; die Kreispunkte der XY-Ebene werden durch $x^2 + y^2 = 0,\ t = 0$ bestimmt. Bei einer beliebigen orthogonalen Koordinatentransformation, die den Anfangspunkt ungeändert läßt, ist immer

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Die absolute Kegelfläche bleibt also ungeändert, ebenso die unendlich ferne Ebene $t = 0$. Es werden dann auch die Kreispunkte einer Ebene durch den Anfangspunkt in die Kreispunkte der transformierten Ebene transformiert. Nach dem Satze von Laguerre finden wir demnach:

Der Winkel zweier Geraden ist gleich $\frac{i}{2}$ *mal dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die Geraden mit den Schnittlinien ihrer Ebene und der absoluten Kegelfläche, deren Spitze der Schnittpunkt der Geraden ist, bilden.*

Die beiden Geraden werden durch ihre *homogenen Koordinaten* (xyz) und $(x'y'z')$ bestimmt; (xyz) und $(x'y'z')$ sind dabei die Cartesischen Koordinaten zweier Punkte der Geraden. Ist $ux + vy + wz = 0$ eine Ebene durch den Anfangspunkt O, dann sind (uvw) die *homogenen Koordinaten der Ebene* im Bündel O. Die Bedingung dafür, daß die Ebene die absolute Kegelfläche tangiert, lautet

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist die Gleichung der absoluten Kegelfläche in Ebenenkoordinaten. Bekanntlich (s. S. 82) sind nun die Ausdrücke der Kosinus des Winkels zweier Geraden und des Winkels zweier Ebenen dualistisch:

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

und

$$\frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}.$$

Zu dem Laguerreschen Satze können wir dann auch den entsprechenden bilden:

Der Winkel zweier Ebenen ist gleich $\frac{i}{2}$ *mal dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die Ebenen mit den beiden Ebenen bilden, die demselben Büschel angehören und die absolute Kegelfläche berühren.* —

Der elliptischen Maßbestimmung zugrunde legen wir mit Cayley einen Kegelschnitt, und zwar hier einen imaginären oder nullteiligen d. h. einen Kegelschnitt, der von jeder reellen Geraden in zwei konjugiert imaginären Punkten geschnitten wird. Wir stellen den Kegelschnitt in homogenen Dreieckskoordinaten dar. Das Koordinatendreieck sei ein Poldreieck. Die Gleichung ist dann bekanntlich

$$\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{33} x_3^2 = 0,$$

wobei α_{11}, α_{22}, α_{33} gleiche Vorzeichen haben. Durch passende Wahl des Einheitspunktes wird sie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

und in Linienkoordinaten

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

Sind nun x und x' zwei Punkte und schneidet xx' den Kegelschnitt in den zwei konjugiert imaginären Punkten ξ und ξ', dann setzen wir:

$$(3) \qquad M(xx') = k \log (xx'\xi\xi'), \quad k = ik';$$

hierdurch erhalten wir eine elliptische Maßbestimmung auf den Geraden, deren Fundamentalpunkte ξ und ξ' sind. *Die Länge der Geraden ist also* $2k'\pi$.

Sind u und u' zwei Gerade, v und v' die zwei konjugiert imaginären Tangenten aus dem Schnittpunkt an den Fundamentalkegelschnitt, so setzen wir

$$(4) \qquad \mathfrak{M}(uu') = \varkappa \log (uu'vv'), \quad \varkappa = i\varkappa'.$$

Der volle Umkreis im Büschel ist dann $2\varkappa'\pi$.

Die Gleichungen des fundamentalen Kegelschnittes in Punkt- und Linienkoordinaten

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \text{und} \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

können auch als die Gleichungen der absoluten Kegelfläche in Punkt- und Ebenenkoordinaten aufgefaßt werden; $(x_1 x_2 x_3)$ sind entweder die homogenen Koordinaten eines Punktes der Ebene oder die homogenen Koordinaten einer Geraden des Raumes durch die Spitze des Kegels; $(u_1 u_2 u_3)$ sind entweder die homogenen Koordinaten einer Geraden der Ebene oder die Koordinaten einer Ebene durch die Spitze des Kegels.

Nach dem Laguerreschen Satze ist dann

$$\begin{aligned} &\sphericalangle(xx') = \frac{i}{2}(xx'\xi\xi'), \\ &M(xx') = 2k' \cdot \sphericalangle(xx'), \\ &\sphericalangle(xx') = \frac{M(xx')}{2k'}; \end{aligned} \tag{5}$$

hier bedeuten auf der rechten Seite x und x' zwei Punkte der elliptischen Ebene, auf der linken Seite aber zwei Gerade durch die Spitze des Kegels. In derselben Weise wird

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}(uu') = 2\varkappa' \cdot \sphericalangle(uu'), \\ &\sphericalangle(uu') = \frac{\mathfrak{M}(uu')}{2\varkappa'}. \end{aligned} \tag{6}$$

Links sind u und u' zwei Ebenen durch die Spitze des absoluten Kegels, rechts aber zwei Geraden der elliptischen Ebene. Betrachten wir nun eine Kugel mit der Spitze des Kegels als Mittelpunkt und dem Radius 1, dann ist

$$<(xx') = \cup XX',$$

wenn XX' der Hauptkreisbogen zwischen den entsprechenden Punkten der Kugel ist; ebenso ist

$$\sphericalangle(uu') = \sphericalangle(UU'),$$

wo U und U' die entsprechenden größten Kreise der Kugel sind. Auf diese Weise erlangen wir das Hauptergebnis der elliptischen Geometrie:

Jedem Dreieck der elliptischen Ebene entspricht ein Dreieck der Kugel; sind die Seiten und Winkel des ersteren

$$M_1, M_2, M_3, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3,$$

so sind die des letzteren

$$\frac{M_1}{2k'} \quad \frac{M_2}{2k'} \quad \frac{M_3}{2k'} \qquad \frac{\mathfrak{M}_1}{2\varkappa'} \quad \frac{\mathfrak{M}_2}{2\varkappa'} \quad \frac{\mathfrak{M}_3}{2\varkappa'};$$

für diese Größen gelten dann die Formeln der Sphärik.

Nunmehr können wir der Kugel den Radius $2k'$ geben; dann ist

$$\smile XX' = 2k' \cdot \sphericalangle(xx') = M(xx').$$

Außerdem setzen wir speziell

$$2k' = 1.$$

Einem Dreieck der elliptischen Ebene mit den Seiten und Winkeln

$$a, b, c, A, B, C$$

entspricht dann ein Dreieck der Kugel mit denselben Seiten und Winkeln. Es wird dabei stets

$$A + B + C > \pi. \tag{7}$$

Diese Beziehung zwischen der elliptischen Ebene und der Kugel ist indessen ein-zweideutig; denn jedem Punkt der Ebene entspricht ein Strahl des Bündels und deshalb zwei diametral gegenüberliegende Punkte der Kugel; die Gerade der Ebene hat die Länge $2k'\pi$, dagegen ist die Länge eines größten Kreises der Kugel $4k'\pi$.

Eine besonders einfache Maßbestimmung haben wir, wenn der absolute Kegelschnitt der nullteilige Kreis

$$x^2 + y^2 + 4k'^2t^2 = 0$$

ist; (xyt) sind hierbei homogene Koordinaten; der Radius des Kreises ist $2ik'$. Wir betrachten den absoluten Kegel, dessen Spitze im Punkte

$$x = 0, \; y = 0, \; \frac{z}{t} = 2k'$$

liegt; seine Gleichung lautet

$$x^2 + y^2 + (z - 2k't)^2 = 0.$$

Die Schnittkurve dieses Kegels mit der Ebene $z = 0$ ist der soeben benutzte Fundamentalkreis.

Die Kugel mit dem Mittelpunkt $(0, 0, 2k't)$ und dem Radius $2k'$ berührt die XY-Ebene im Anfangspunkt. Einem Punkte oder einer Geraden der elliptischen Ebene entspricht die Gerade oder Ebene des Büschels, welche den Punkt oder die Gerade enthält, und damit auch ein Punktepaar oder ein größter Kreis der Kugel.

Lassen wir k' ins Unendliche wachsen, so nähert sich die Kugel unbegrenzt der Ebene und die elliptische Geometrie der Euklidischen.

Weil das Bündel durch eine seiner Ebenen nicht in zwei getrennte Teile zerfällt, zerfällt die elliptische Ebene auch nicht durch eine ihrer Geraden in zwei getrennte Halbebenen, während die Kugel durch den entsprechenden größten Kreis in zwei getrennte Halbkugeln zerlegt wird.

Es liegen nämlich von den Strahlen des Bündels, die den Bündelscheitel O mit zwei beliebigen Punkten der elliptischen Ebene verbinden, immer zwei Halbstrahlen auf derselben Seite einer beliebigen Ebene des Bündels. Deshalb liegen auch zwei Punkte A und B der elliptischen Ebene immer auf derselben Seite einer Geraden a. Wollen wir A und B durch eine Strecke verbinden, die a nicht schneidet, so wählen wir den Halbstrahl OA und dazu den Halbstrahl OB oder den entgegengesetzten in der Weise, daß die zwei Halbstrahlen auf derselben Seite der Ebene (Oa) liegen, oder was dasselbe heißt, daß sie die Kugel in zwei Punkten schneiden, deren verbindender Hauptkreisbogen den Schnittkreis mit (Oa) nicht schneidet. Wir sprechen diese Tatsache so aus: *Die elliptische Ebene ist eine Doppelfläche.*

Wenn zwei Flächen sich in der Weise aufeinander beziehen lassen, daß der Abstand zweier Punkte der einen Fläche immer dem der entsprechenden Punkte auf der anderen Fläche gleich ist, dann heißen die Flächen *aufeinander abwickelbar.* Also:

Die gewöhnliche Kugelfläche ist auf die elliptische Ebene abwickelbar, die zwei Flächen haben aber verschiedenen Zusammenhang.

Der Ausdruck des Bogenelements ds muß auch für die zwei aufeinander abwickelbaren Flächen derselbe sein. Die elliptische Ebene denken wir uns als eine Tangentialebene der Kugel, welche von dieser letzteren in dem Ursprung der Koordinaten x, y berührt wird. Ist R der Radiusvektor vom Mittelpunkte der Kugel nach dem Punkte (xy) der elliptischen Ebene, so haben wir, wie leicht ersichtlich,

$$dx^2 + dy^2 = \frac{R^2}{4k'^2}\,ds^2 + dR^2$$

oder

$$ds^2 = \frac{4k'^2}{R^2}(dx^2 + dy^2 - dR^2).$$

Es ist aber

$$R^2 = x^2 + y^2 + 4k'^2,$$

$$dR^2 = \frac{(x\,dx + y\,dy)^2}{x^2 + y^2 + 4k'^2},$$

also findet man:

$$(8) \qquad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + \frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{4k'^2}}{\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{4k'^2}\right)^2};$$

ds^2 ist wie in der gewöhnlichen Geometrie eine homogene Funktion zweiten Grades von dx und dy; setzt man $k' = \infty$, so hat man den gewöhnlichen Ausdruck

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks wird durch dieselben Betrachtungen gefunden, die man zur Bestimmung des Dreiecksinhalts auf der Kugel braucht; es wird der Inhalt des Dreiecks ABC:

$$\Delta = \frac{J}{2\pi}(A + B + C - \pi),$$

wo J der Inhalt der ganzen Ebene ist.

Die Möglichkeit der elliptischen Geometrie ist, wie bereits erwähnt, zuerst von Riemann angegeben; von speziellen Arbeiten die sich der Riemannschen Arbeit anschließen, nennen wir: Lipschitz, *J. f. Math.* **70**, 71 (1869), **71**, 274 (1870), **72**, 1 (1870); Christoffel, *J. f. Math.* **70**, 46, 241 (1869), Beltrami, *Ann. di Mat.* (2) **2**, 232 (1868); F. Schur, *Math. Ann.* **27**, 163, 537 (1886).

Von speziellen Arbeiten über die *axiomatische Begründung der elliptischen Geometrie* ist zu nennen die Arbeit von G. Hessenberg, *Math. Ann.* **61**, 173, in der die elliptische Geometrie ohne Stetigkeitsaxiome unter Annahme der Nichtexistenz der Parallelen hergeleitet wird, ferner M. Dehn, *Math. Ann.* **60**, 166; Hjelmslev, *Math. Ann.* **64**, 449.

§ 4. Die hyperbolische Maßbestimmung in der Ebene.

Der hyperbolischen Maßbestimmung legen wir einen *einteiligen* Kegelschnitt zugrunde, d. h. einen reellen Kegelschnitt, durch den die Ebene in ein Inneres und ein Äußeres zerfällt; wir definieren wie früher den Abstand zweier Punkte x, x':

$$(9) \qquad M(xx') = k \log (xx'\xi\xi'),$$

wo ξ und ξ' die Schnittpunkte der Geraden xx' mit dem fundamentalen Kegelschnitt sind; *k soll hier reell sein.* Ebenso setzen wir den Winkel zweier Geraden u, u':

$$\mathfrak{M}(uu') = \varkappa \log (uu'vv'), \tag{10}$$

wo v und v' die Tangenten von dem Punkte (uu') an den fundamentalen Kegelschnitt sind. *Wir nehmen speziell* $\varkappa = \frac{i}{2}$; dann hat $\mathfrak{M}(uu')$ die Periode

$$\pm \frac{i}{2} \cdot 2\pi i = \mp \pi .$$

Weil die Fundamentalkurve hier reell ist, sind für den Abstand folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. Schneidet (xx') den Fundamentalkegelschnitt in reellen Punkten ξ und ξ', und liegen x und x' innerhalb der Sehne $\xi\xi'$, dann hat $M(xx')$ einen und nur einen reellen Wert, ist also eindeutig bestimmt; werden x und x' von ξ und ξ' getrennt, dann hat $M(xx')$ lauter imaginäre Werte; sind x und x' beide äußere Punkte, so hat der Abstand einen reellen Wert. Rückt x oder x' in ξ oder ξ' hinein, dann wird der Abstand unendlich.

2. Berührt (xx') den Kegelschnitt in ξ, so werden alle Abstände 0, ausgenommen wenn x oder x' in ξ hineinfällt; im letzten Falle wird der Abstand unbestimmt.

3. Schneidet (xx') den Kegelschnitt in konjugiert-imaginären Punkten, dann ist der Abstand imaginär.

Wir denken uns deshalb eine Geometrie mit hyperbolischer Maßbestimmung im Innern des fundamentalen Kegelschnittes; die Punkte des Kegelschnittes gelten als unendlich fern, und das Äußere des Kegelschnittes wird nicht in Betracht gezogen (ist ein imaginäres oder ideales Gebiet).

Nunmehr betrachten wir die Winkelbestimmung der hyperbolischen Geometrie. Schneiden sich zwei Gerade u und u' im Inneren des absoluten Kegelschnittes, dann sind die Tangenten v und v' konjugiert imaginär und $\frac{i}{2} \log (uu'vv')$ reell; schneiden sich die Geraden außerhalb des Kegelschnittes, wird das Doppelverhältnis reell und der Winkel imaginär. Schneiden sich die Geraden auf dem Kegelschnitte, so fallen v und v' zusammen, und der Winkel ist 0. Ist die eine Gerade eine Tangente, so wird der Winkel unendlich; geht außerdem die andere Gerade durch den Berührungspunkt, so wird der Winkel unbestimmt.

Wir betrachten wie oben nur die Geometrie im Inneren und definieren parallele Geraden als solche, die den Winkel 0 *bilden, d. h. sich auf dem absoluten Kegelschnitt schneiden;* es gilt dann der Satz:

Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden gibt es zu dieser zwei Parallelen.

Man verbinde nämlich den Punkt mit den für eine reelle Gerade stets reellen Punkten, in denen diese Gerade den absoluten Kegelschnitt trifft. Diese beiden Parallelen trennen die durch den Punkt gehenden Strahlen, welche die gegebene Gerade schneiden, von denen, welche sie nicht schneiden.

Wir legen nun der Maßbestimmung den speziellen Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 - 4k^2t^2 = 0$$

zugrunde; weil seine Gleichung aus der entsprechenden Gleichung der elliptischen Geometrie S. 513 dadurch entsteht, daß k'^2 durch $-k^2$ ersetzt wird, so folgt, daß *die hyperbolische Geometrie der Ebene mit der sphärischen Geometrie auf einer imaginären Kugel mit dem Radius* $\frac{2k}{i}$ *identisch ist. Demnach werden die Formeln der hyperbolischen Geometrie aus den elliptischen dadurch abgeleitet, daß* k' *durch* $\frac{k}{i}$ *ersetzt wird.*

Das *hyperbolische Bogenelement* wird in dieser Weise:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 - \frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{4k^2}}{\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{4k^2}\right)^2}$$

und für $k = \infty$

$$\lim_{k=\infty} ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Da die *Trigonometrie der hyperbolischen Ebene* durch die sphärischen Grundformeln einer Kugel mit dem Radius $\frac{2k}{i}$ bestimmt wird, haben wir die Formeln:

$$\sin\frac{ai}{2k} : \sin\frac{bi}{2k} = \sin A : \sin B,$$

$$\cos\frac{ai}{2k} = \cos\frac{bi}{2k}\cos\frac{ci}{2k} + \sin\frac{bi}{2k}\sin\frac{ci}{2k}\cos A \text{ usw.}$$

Um sie in reelle Gestalt zu bringen, führen wir die hyperbolischen Funktionen ein:

$$\cos\frac{ai}{2k} = \frac{e^{-\frac{a}{2k}} + e^{\frac{a}{2k}}}{2} = \operatorname{ch}\frac{a}{2k}$$

$$\sin\frac{ai}{2k} = i\,\frac{e^{\frac{a}{2k}} - e^{-\frac{a}{2k}}}{2} = \operatorname{sh}\frac{a}{2k}$$

Dann erhalten wir das reelle Formelsystem:

$$(11)\quad \begin{cases} \operatorname{sh}\frac{a}{2k} : \operatorname{sh}\frac{b}{2k} : \operatorname{sh}\frac{c}{2k} = \sin A : \sin B : \sin C \\ \operatorname{ch}\frac{a}{2k} = \operatorname{ch}\frac{b}{2k}\operatorname{ch}\frac{c}{2k} + \operatorname{sh}\frac{b}{2k}\operatorname{sh}\frac{c}{2k}\cos A \text{ usw.} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt der Hauptsatz: *Die Winkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks ist kleiner als π. Weil hier der Radius der Kugel $= \frac{2k}{i}$ ist, findet man für die Dreiecksfläche den Wert*

$$(12)\qquad k^2(\pi - A - B - C).$$

Die Winkelsumme eines Dreiecks, das dem fundamentalen Kegelschnitte einbeschrieben ist, wird Null, und sein Inhalt ist konstant gleich $k^2\pi$.

Zwei Gerade u und u' bilden einen rechten Winkel $(\frac{1}{2}\pi)$, wenn die eine durch den Pol der anderen in bezug auf den absoluten Kegelschnitt geht.

Die Lote einer Geraden schneiden sich sämtlich in dem Pole dieser Geraden. Eine Gerade und zwei ihrer Lote bilden aber kein eigentliches Dreieck.

Der hyperbolische Kreis, d. h. der Ort der Punkte, die um einen konstanten Abstand von einem gegebenen Punkte, dem Mittelpunkte O, entfernt sind, ist ein Kegelschnitt, der den Fundamentalkegelschnitt C in den Berührungspunkten der an ihn aus dem Mittelpunkte O gelegten Tangenten doppelt berührt.

Die Polare von O sei o; die zweimal gezählte Polare ist selbst ein hyperbolischer Kreis um O, weil das Doppelverhältnis mit O für einen Punkt der Polare -1, die Entfernung also $k\pi i$ wird. Ist K ein Kegelschnitt, der den absoluten in den Schnittpunkten der Polaren berührt, so sind die Kegelschnitte homologe Figuren in einer ebenen perspektiven Kollineation, von der die Polare o die Homologieachse und O der Mittelpunkt ist. Es ist dann

$$(ox\xi\xi') = (ox_1\xi_1\xi_1') = (ox'\xi'\xi) = (ox_1'\xi_1'\xi_1).$$

Zwei Gerade durch O schneiden k in x, x' und x_1, x_1', C in ξ, ξ' und ξ_1, ξ_1'. Der Kreis ist durch seinen Mittelpunkt und einen Punkt auf ihm bestimmt, weil die doppeltberührenden Kegelschnitte mit bestimmten Berührungspunkten ein Büschel bilden.

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

1. *Der Mittelpunkt liegt außerhalb C.*

Wir beginnen das System der Kreise mit der doppelt gezählten Berührungssehne; an diese schließen sich zuerst flache, dann immer weiter werdende Ellipsen an, die schließlich in den absoluten Kegelschnitt für einen unendlich großen Radius übergehen. Weiterhin folgen (für imaginäre Werte des Radius) noch mehr Ellipsen, die dann mit einer Parabel als Zwischenlage in Hyperbeln übergehen, diese ihrerseits gehen durch das Tangentenpaar in die konjugierten Hyperbeln über und konvergieren endlich gegen die doppelt gezählte Verlängerung der Berührungssehne.

Betrachten wir nur die Punkte im Inneren des absoluten Kegelschnittes als reell, so existiert in diesem Falle kein reeller Mittelpunkt, diese Kreise sind sogen. *äquidistante Kurven*: sie sind gegeben als die Linien, welche die nach einem imaginären Punkte (außerhalb des absoluten Kegelschnittes) konvergierenden, d. h. die auf einer geraden Linie (der Berührungssehne) senkrecht stehenden Strahlen rechtwinklig schneiden.

2. *Der Mittelpunkt liegt auf C.*

Die Kreise berühren dann C in O vierpunktig; die im reellen Gebiet bleibenden Kreise sind Ellipsen, die in C ausmünden; dann folgen im idealen Gebiet noch weitere Ellipsen, die vermittelst einer Parabel in Hyperbeln übergehen. Diese ziehen sich schließlich in die doppelt zählende Polare von O, d. h. die Tangente in diesem Punkt, zusammen. Weil O von allen Punkten der Peripherie unendlich weit entfernt ist, nennt man diese Kurven *Grenzkreise oder Horozykeln.*

3. *Der Mittelpunkt liegt innerhalb C.*

Die Doppelberührung findet in imaginären Punkten statt; die Kreise verlaufen wie gewöhnliche Kreise um O, die schließlich in C übergehen. Diese im Innern von C verlaufenden Kurven sind die eigentlichen Kreise der hyperbolischen Geometrie.

Das Spiegelbild x' eines Punktes x in bezug auf eine Gerade o und der Punkt x trennen den Pol und den Schnittpunkt p von xx' und o harmonisch.

o ist also die Spiegelungsachse der hyperbolischen Kreise mit dem Mittelpunkt O.

§ 5. Die hyperbolischen Bewegungen.

Eine *Bewegungstransformation* führt jede Figur in eine kongruente Figur über, und umgekehrt sind kongruente Figuren solche, die durch eine Bewegungstransformation in einander übergeführt werden können. In der hyperbolischen Geometrie sind die Be-

wegungstransformationen definiert als die kollinearen Transformationen, die den absoluten Kegelschnitt invariant lassen. Eine beliebige kollineare Transformation enthält acht unabhängige Parameter; soll ein gegebener Kegelschnitt in sich transformiert werden, so entstehen zwischen den acht Parametern fünf Gleichungen. Also: *Es gibt ∞^3 projektive Transformationen, die einen gegebenen Kegelschnitt in sich überführen.*

Wird ein Kegelschnitt durch eine projektive Transformation in sich übergeführt, so bleiben im allgemeinen zwei (reelle, imaginäre oder zusammenfallende) Punkte des Kegelschnittes fest.

Es müssen dann auch die Tangenten der invarianten Punkte des Kegelschnittes invariant sein; der Schnittpunkt derselben ist der dritte invariante Punkt der Ebene. Speziell können die drei Punkte in einem Punkt des Kegelschnittes zusammenfallen. Sind die zwei Punkte reell, dann ist der dritte ein äußerer Punkt; sind die zwei Punkte konjugiert imaginär, so ist der dritte Punkt ein innerer (reeller). Also: *Jede hyperbolische Bewegung ist eine Drehung um einen festen Punkt.* Dieser ist der dritte Punkt.

Ist dieser Punkt reell, so haben wir Kreise derselben Art wie die Euklidischen; die Bewegung wird periodisch. Gehört der dritte Punkt dem Kegelschnitte an, so beschreibt der bewegte Punkt einen Horozykel und erreicht nie wieder den Ausgangspunkt. Liegt endlich der dritte Punkt außerhalb des fundamentalen Kegelschnittes, so beschreiben die Punkte äquidistante Kurven; die Polare des festen Punktes wird in sich selbst verschoben.

Ein wesentlicher Unterschied der Euklidischen und der hyperbolischen Bewegungen liegt in der Tatsache, daß in der hyperbolischen Ebene jede Transformation, welche den absoluten Kegelschnitt ungeändert läßt, eine Bewegung ist. In der Euklidischen Ebene ist der absolute Kegelschnitt das Paar der Kreispunkte; es ist aber nicht jede Transformation, welche die Kreispunkte in sich überführt, eine Bewegung; vielmehr läßt auch die *Ähnlichkeitstransformation* die Kreispunkte ungeändert (vgl. Eugen Meyer, *Über die Kongruenzaxiome der Geometrie*, *Math. Ann.* **64**, 197).

Den ersten Aufbau der hyperbolischen Geometrie verdanken wir Lobatschefsky und J. Bolyai (vgl. § 1). Von Arbeiten über diese Geometrie nennen wir außer den hier benutzten von F. Klein die folgenden:

D. Hilbert: *Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie* (*Math. Ann.* **57**, 137, *Grundlagen der Geometrie*, Anhang III). Hier werden die Tatsachen der hyperbolischen

Geometrie *ohne den Stetigkeitsbegriff, aber unter Annahme des hyperbolischen Parallelenaxioms* hergeleitet; dieses letztere postuliert die Existenz der zwei Parallelen.

Mit dieser Arbeit sind zu vergleichen: F. Schur, *Math. Ann.* **59**, 314, und J. Hjelmslev, *Math. Ann.* **64**, 449; Liebmann, *Math. Ann.* **59**, 110.

Ausführliche Darstellungen dieser Geometrie finden sich in: Gérard, *Sur la géometrie noneuclidienne, Thèse,* Paris 1892; Joh. Petersen (Hjelmslev), *Nyt Tidsskrift for Math.*, **13**, B, 25 (1902).

§ 6. Andere Verwirklichungen der nichteuklidischen Geometrie.

1. Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß die elliptische Geometrie mit der Geometrie auf einer Kugel mit dem Radius $2k'$ übereinstimmt; das *Gaußische Krümmungsmaß* ist hier $\frac{1}{4k'^2}$, also positiv. Dagegen hat die hyperbolische Geometrie negatives Krümmungsmaß: $-\frac{1}{4k'^2}$; die parabolische (Euklidische) Geometrie hat die Krümmung 0. Wir wollen hier auf die Verwirklichung der nichteuklidischen Geometrien auf den Flächen mit konstanter negativer oder positiver Krümmung nicht näher eingehen und begnügen uns mit folgenden Literaturangaben: Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea*, *Giorn. di mat.* VI, 1868. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale,* 1886, deutsch von Lukat, 1899, Kap. XVI. Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung, Grundlagen,* Anhang V.

2. Man hat die nichteuklidische Geometrie innerhalb der Euklidischen in der Weise aufgebaut, daß man die Geometrie eines Kugelgebüsches, d. h. die Menge der Kugeln, die in einem Punkte O dieselbe Potenz haben, in Betracht zieht.

Wie dann die drei Geometrien in der Weise entstehen, daß man die verschiedenen Gebilde des Gebüsches als Punkte, Geraden und Ebenen definiert, findet man in Weber-Wellstein, *Enzyklopädie der elementaren Geometrie,* 2. Band (Wellstein) entwickelt.

3. Endlich bemerken wir noch, daß die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz (*Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen,* 1868, und *Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, Vorträge und Reden* II, 1884) Lie veranlaßt haben, das Problem der axiomatischen Behandlung

der Geometrie unter Voranstellung des Gruppenbegriffes in Angriff zu nehmen (Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen* III, Abt. 5); er wurde zu einem System von Axiomen geführt, von denen er mittels seiner Theorie der Transformationsgruppen nachwies, daß sie zum Aufbau der Geometrie hinreichend sind.

In ähnlichem Sinne hat D. Hilbert eine Arbeit: *Über die Grundlagen der Geometrie* veröffentlicht (*Math. Ann.* **56**, 381, *Grundlagen*, Anh. IV).

§ 7. Die nichtarchimedischen nichteuklidischen Geometrien nach F. Schur.

Im vorhergehenden wurde die nichteuklidische Geometrie mittels des Stetigkeitspostulats aufgebaut; wie aber im Kap. I, § 7 gezeigt wurde, daß die Elementargeometrie sich im wesentlichen ohne Stetigkeitspostulat begründen läßt, so zeigt sich auch die allgemeinere Geometrie, die durch Ersetzung des Parallelenaxioms mit einer Theorie der idealen Elemente entsteht, in gewissem Sinne von den Stetigkeitsvoraussetzungen unabhängig. In der Tat läßt sich ähnlich wie in Kap. VI, § 1 die projektive Geometrie aufbauen, indem *das Stetigkeitsaxiom durch die Annahme der Gültigkeit des Pascalschen Satzes ersetzt wird.* Die Voraussetzungen sind dann die graphischen Axiome und der Pascalsche Satz; aus diesen bildet der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (Kap. VI, § 1) eine Folgerung.

Die nachfolgende analytische Geometrie verdankt man F. Schur (*Math. Ann.* **55**, 286). Schur setzt in diesen die Kongruenzaxiome voraus; erstens hat er, um ohne Stetigkeitsaxiom den Pascalschen Satz zu beweisen, die Kongruenz benutzt (*Math. Ann.* **51**, 401), und zweitens braucht die analytische Geometrie, wie er sie gibt, die Kongruenzbegriffe. Es stellt sich aber heraus, daß, wenn der Pascalsche Satz einmal vorausgesetzt wird, die Kongruenzbegriffe sich auf einfache Art *definieren* und darauf die Kongruenzsätze beweisen lassen. Eine dementsprechende Umformung der Schurschen Arbeit ist es, was wir hier geben.

Wir führen wie in § 1 eine Koordinatengeometrie ein; es seien der Anfangspunkt O, die Einheitspunkte auf den Achsen E und F, die Unendlichkeitspunkte U und V. *Wir bestimmen nun auf jeder Geraden eine feste Involution in folgender Weise:* Auf der X-Achse nehmen wir eine Involution mit den entsprechenden Punkten O und U, E und E', wo E' beliebig gewählt ist. Dann ist nach der in Kap. VI, § 3 angedeuteten Rechnung mit Doppel-

verhältnissen oder *Würfen* (v. Staudt), wenn A und A' korrespondierende Punkte sind,

$$(UOEA) \barwedge (OUE'A') \barwedge (UOA'E')$$

oder

$$(UOEA) \cdot (UOEA') = (UOEE'), \text{ also}$$

$$(1) \qquad (OA) \cdot (OA') = (OE') = K.$$

Wenn mithin AA' irgendein Paar korrespondierender Punkte sind, so ist das Produkt $(OA) \cdot (OA')$ konstant. Auf der Y-Achse sollen O und V, F und F' korrespondierende Punkte sein, wenn

$$(UOEE') \barwedge (VOFF').$$

Sind dann B und B' beliebige korrespondierende Punkte auf der Y-Achse, so ist auch hier

$$(OB) \cdot (OB') = K.$$

K kann sowohl positiv als negativ sein.

Im folgenden verwerten wir besonders die Formel

$$(ABCD) = \frac{(OC) - (OA)}{(OD) - (OA)} : \frac{(OC) - (OB)}{(OD) - (OB)}.$$

Bevor wir aber die Involution auf einer beliebigen Geraden bestimmen, wollen wir die Gleichung der Geraden ableiten. Sind $P \equiv (xy)$, $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ drei Punkte einer Geraden, welche die Gerade UV in W schneidet, so ist

$$(WPP_2P_1) \barwedge (UQQ_2Q_1) \barwedge (VRR_2R_1) = \lambda;$$

Q, Q_1, Q_2 und R, R_1, R_2 sind die Projektionen von P, P_1, P_2 aus V auf die X-Achse und aus U auf die Y-Achse. Es wird dann

$$(2) \qquad \lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} \text{ oder}$$

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda},$$

und dies sind die Gleichungen der Geraden. Der konjugierte Punkt wird im folgenden immer durch einen angesetzten Akzent bezeichnet. Die *Polare* des Punktes Q der X-Achse ist die Gerade VQ'; die Polare des Punktes R der Y-Achse ist die Gerade UR'; die Polare von $P_1 \equiv (x_1 y_1)$ ist die Gerade $Q_1' R_1'$. Es wird

$$(OQ_1') = x_1' = \frac{K}{x_1}; \quad (OR_1') = y_1' = \frac{K}{y_1};$$

die Gleichung der Polare ist also

$$xx_1 + yy_1 = K. \tag{3}$$

Nun wird auf einer beliebigen Geraden die Involution dadurch bestimmt, daß jedem Punkte der Schnittpunkt der Geraden mit der Polaren des Punktes zugeordnet wird. Seien dann

$$ax + by = K, \tag{I}$$

$$cx + dy = K, \tag{II}$$

zwei Gerade, so ist (cd) der Pol der Geraden (II); dieser Punkt gehört der Geraden (I) an, wenn

$$ac + bd = K; \tag{4}$$

(cd) und der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$\frac{K(d-b)}{ad-bc}, \quad \frac{K(a-c)}{ad-bc}$$

sind konjugiert. Ebenso gehört der Punkt (ab) der Geraden (II) an und ist demselben Schnittpunkte konjugiert. *Ist die Bedingung* (4) *erfüllt, dann heißen die Geraden* (I) *und* (II) *aufeinander senkrecht; durch jeden Punkt einer Geraden geht eine und nur eine Senkrechte. Betrachten wir zwei Geraden durch den Anfangspunkt*

$$ax - y = 0 \quad cx - y = 0,$$

so heißen sie aufeinander senkrecht oder konjugiert, wenn

$$ac + 1 = 0;$$

hierdurch wird die Involution auf der Geraden UV bestimmt.

Um nun die projektive Strecke (P_1P_2), wobei P_1 und P_2 beliebige Punkte sind, zu definieren, setzen wir

$$(SOUS') \barwedge (P_2P_1P_1'P_2'),$$

wo S und S' zwei konjugierte Punkte der X-Achse sind, die sich eben durch diese Beziehung bestimmen lassen. Ist nämlich W der Schnittpunkt (UV, P_1P_2), dann ist

$$(SOUS') = \frac{(WP_2'P_2P_1)}{(WP_1'P_2P_1)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

wo

$$x_1^2 + y_1^2 - K = \lambda_1(x_1x_2 + y_1y_2 - K),$$
$$x_1x_2 + y_1y_2 - K = \lambda_2(x_2^2 + y_2^2 - K).$$

Es ist also

$$(SOUS') = \frac{(OS')}{(OS') - (OS)} = \frac{K}{K - s^2}$$
$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2 - K)^2}{(x_1^2 + y_1^2 - K)(x_2^2 + y_2^2 - K)},$$

wenn $(OS) = s$. Daraus folgt

$$(5) \qquad s^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - k(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{\{1 - k(x_1 x_2 + y_1 y_2)\}^2},$$

worin $k = \frac{1}{K}$.

Wir setzen jetzt definitionsweise:

$$(P_1 P_2) = (OS) = s.$$

Wird diese Formel auch auf $k = 0$ ausgedehnt, so geht sie in die Formel der gewöhnlichen (Cartesischen) analytischen Geometrie über:

$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Weil nun die Gleichung (5) hinsichtlich x_2 und y_2 vom zweiten Grade ist, sehen wir, daß es zwei Punkte der Geraden gibt, deren Abstand von P_1 gleich s sind. *Weil aber die Werte von s nicht rational sind, wird hier ein neues Existenzaxiom vorausgesetzt.* Hiermit ist *der Begriff der Streckenkongruenz* festgelegt. Speziell haben wir:

$$(OP)^2 = x^2 + y^2; \quad (QP)^2 = \frac{y^2}{1 - kx^2}; \quad RP^2 = \frac{x^2}{1 - ky^2}.$$

Um jetzt auch den *Begriff der Winkelkongruenz* festzulegen, betrachten wir zuerst Winkel, deren Spitze O und deren fester erster Schenkel die X-Achse ist. Wir ziehen die Gerade VE, wählen auf ihr zwei beliebige Punkte A und B aus und betrachten die Winkel EOA und EOB. Die Strahlen durch O bilden nach dem Vorhergehenden eine feste Involution von paarweise aufeinander senkrechten Geraden; dadurch werden auch die Punkte der Geraden VE paarweise involutorisch konjugiert: (AA'), (BB') usw. *Wir bestimmen nun* (vgl. die Bestimmung der Punkte S und S' im vorhergehenden) *die Punkte C und C' derart, daß*

$$(VEB'B) \curlywedge (A'AC'C);$$

dann heißt der Winkel EOC die Summe der Winkel EOA und EOB. Dieselbe Beziehung ist uns auch das Kennzeichen dafür, daß die Winkel EOA und BOC gleich sind. Speziell haben wir

als Kriterium dafür, daß der rechte Winkel $A'OA$ dem Winkel EOV gleich ist:

$$(VEAA') \curlywedge (EVA'A).$$

Weil nun die Geraden OA und OA', OB und OB', OC und OC' aufeinander senkrecht stehen, ist

$$aa' = bb' = cc' = -1,$$

wenn a, a', b, b', c, c' die Ordinaten der Punkte sind. Werden die Punkte von U auf die Y-Achse in $A_2A_2'B_2B_2'C_2C_2'$ projiziert, so wird

$$(VOB_2'B_2) = (A_2'A_2C_2'C_2)$$

oder

$$-b^2 = -\frac{(c-a)^2}{(1+ac)^2},$$

woraus

$$b = \frac{c-a}{1+ac}$$

folgt, damit für $a = 0$ auch $b = c$ resultiere. Somit finden wir

$$c = \frac{a+b}{1-ab}. \tag{6}$$

Wir stellen nunmehr mit Schur die weitere Definition auf: *Unter dem Kosinus und dem Sinus eines Winkels* $\varphi = \sphericalangle XOP$ *versteht man die Abszisse und die Ordinate des Punktes* P *mit dem Radiusvektor* $(OP) = 1$.

Ist A der Schnittpunkt (OP, VE), $(OP_1) = \cos \sphericalangle EOP$, $(OP_2) = \sin \sphericalangle EOP$, so wird

$$(UOP_1E) = (VOP_2A_2);$$

hieraus ergibt sich

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{(OA_2)}{\sin\alpha} \quad \text{oder} \quad (OA_2) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Nach der Formel (6) ist dann

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{7}$$

woraus sich die übrigen Additionstheoreme leicht ergeben. In diesen goniometrischen Formeln ist in der Tat die ganze Lehre von der Winkelkongruenz enthalten. Insbesondere sehen wir, daß die Formeln für die Drehung des Koordinatensystems genau so lauten wie in der gewöhnlichen Geometrie.

Was die Formeln der Koordinatenverschiebung betrifft, so brauchen wir nur diejenigen für die Verlegung des Anfangspunktes nach einem Punkte O' auf der Achse OX mit der Abzisse a zu geben. Die Y-Achse wird hiernach die Achse $O'V$. Zunächst ergibt sich aus (5)

$$x' = (O'Q) = \frac{x - a}{1 - kax}.$$

Weiter folgt

$$y' = (O'R') = \frac{\eta}{\sqrt{1 - ka^2}},$$

wo η, die Ordinate von R' im alten Systeme, sich dadurch ergibt, daß die drei Punkte $(a\eta)$, (xy) und $(a'o)$ in einer Geraden liegen, d. h.

$$\frac{y}{x - \frac{1}{ka}} = \frac{\eta}{a - \frac{1}{ka}} \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{y(1 - ka^2)}{1 - kax}$$

ist. Dann sind die Formeln der Koordinatenverschiebung

$$(8) \qquad x' = \frac{x - a}{1 - kax} \qquad y' = \frac{y\sqrt{1 - ka^2}}{1 - kax}.$$

Es sind nun die Formeln der nichteuklidischen Dreieckslehre ohne Schwierigkeit ableitbar, und wir haben so die Geometrie ohne direkte Benutzung der Stetigkeit auf Grund der graphischen Axiome und des Pascalschen Satzes definitionsweise vollständig aufgebaut.

Die Annahme der Gültigkeit des Pascalschen Satzes, die für die vorhergehenden Ausführungen grundlegend war, *kann nach* F. Schur (*Math. Ann.* **51**, 401) *durch die Kongruenzaxiome ersetzt werden.* Dandelin hat bewiesen, daß der Pascalsche Satz für das Geradenpaar sich auf den folgenden Satz zurückführen läßt:

Durch die Punkte zweier Geraden g und g' derselben Ebene können zwei Scharen von Geraden so gelegt werden, daß zwei Geraden verschiedener Scharen stets derselben Ebene angehören, zwei Geraden derselben Schar hingegen nicht.

Um diesen Satz mittels der Kongruenzaxiome beweisen zu können, braucht Schur *eine räumliche Theorie der Spiegelungen,* die aus den folgenden Sätzen besteht:

1. Das Spiegelbild $SP = P'$ jedes Punktes P hat wiederum den Punkt P zum Spiegelbilde, d. h. es ist $SSP = P$; jeder Punkt der spiegelnden Ebene σ ist sein eigenes Spiegelbild.

2. Das Spiegelbild jeder Strecke ist eine ihr kongruente Strecke.

3. Das Spiegelbild g' jeder Geraden g schneidet sich mit dem Originale auf der spiegelnden Ebene (in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkte), d. h. es ist $(g, \sigma) = (Sg, \sigma)$.

4. Die Aufeinanderfolge dreier Spiegelungen an drei Ebenen durch dieselbe Achse a kann ersetzt werden durch eine einzige Spiegelung an einer Ebene durch dieselbe Achse, d. h. es wird $S_3 S_2 S_1 P = SP$.

5. Zwei gerade Linien g und g', die einen eigentlichen Punkt S gemein haben, können stets durch eine Spiegelung S ineinander übergeführt werden.

Nachdem wir hier den Beweis des Pascalschen Satzes skizziert haben, sind die ferneren Ausführungen von F. Schur uns schon bekannt; sie werden hier dadurch vereinfacht, daß die Kongruenzbegriffe von vornherein angenommen werden. Ein ausführlicher Aufbau der Geometrie auf Grund der graphischen Axiome und der Axiome der Kongruenz findet sich in dem neuerdings erschienenen Buche von F. Schur, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1909.

§ 8. Die nichtarchimedische Geometrie nach M. Dehn.

Auch Dehn braucht (*Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, Math. Ann.* **53**, 405) wie Schur die mittels des Raumes ausgebildete Theorie der idealen Elemente; die Axiome, die seinen Ausführungen zugrunde liegen, sind somit sämtliche projektiven Axiome und die Kongruenzaxiome. Wir heben hervor, daß Dehn *nur von einer ebenen Kongruenzlehre Gebrauch macht.*

Aus dem Desarguesschen Satze und aus den elementaren Sätzen von dem rechten Winkel leitet man die Sätze her:

Alle Senkrechten auf einer Geraden schneiden sich in einem (idealen) Punkte, dem Pol der Geraden.

Die Pole aller der Geraden, die durch einen eigentlichen Punkt O gehen, liegen auf einer (idealen) Geraden, und jeder Punkt dieser Geraden ist Pol einer Geraden durch O.

Wir können nun die Polare eines eigentlichen Punktes O in der Weise auszeichnen, daß wir zwei Geraden *parallel* nennen, wenn sie sich in einem Punkte von o schneiden. Betrachten wir dann alle eigentlichen und idealen Punkte mit Ausnahme der Punkte von o und ebenso alle eigentlichen und idealen Geraden mit Ausnahme von o als wirklich, dann entsteht eine Geometrie, in der auch das Parallelenaxiom gültig ist. Dehn nennt diese

Geometrie *Pseudogeometrie.* Es ist eine einfache Folge des Desarguesschen Satzes, daß, wenn zwei Strecken aus derselben dritten durch Parallelverschiebung entstehen, sie sich auch ineinander parallel verschieben lassen.

Es ist nun ersichtlich, was wir in der Pseudogeometrie unter Kongruenz zu verstehen haben. Die Kongruenzbegriffe in der ursprünglichen Geometrie und in der Pseudogeometrie sollen in dem Falle identisch sein, wo es sich um Strecken mit dem Anfangspunkt O oder um Winkel mit dem Scheitelpunkt O handelt. Ist also $OA = OB$, so sind auch OA und OB pseudokongruent. Sonst nennen wir zwei Strecken oder zwei Winkel pseudokongruent, wenn sie auseinander durch Parallelverschiebung entstehen. Es entspricht diese Festlegung des Kongruenzbegriffes der Tatsache, daß alle Konstruktionen der Euklidischen Ebene sich mittelst des Lineales und eines einzigen Kreises ausführen lassen (J. Steiner, *Die Konstruktionen usw., Werke* I, 461, *Ostwalds Klassiker,* Nr. 60; vgl. auch Weber-Wellstein, *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik,* II, 1. Buch, § 5 und später).

Es gelingt nun zu zeigen (Dehn, l. c. S. 413 ff.), daß die sechs Hilbertschen Kongruenzaxiome (Kap. I, § 5) sämtlich wieder richtige Sätze werden, wenn man das Wort *kongruent* durch *pseudokongruent* ersetzt. Weil auch in der Pseudogeometrie das Parallelenaxiom gültig ist, können wir aus jedem Satze der Euklidischen Geometrie — die sich ja vollständig aus den graphischen Axiomen, den Kongruenzaxiomen und dem Parallelenaxiom herleiten läßt (vgl. Kap. I) — einen neuen Satz der Pseudogeometrie dadurch bilden, daß wir das Wort *kongruent* durch *pseudokongruent* ersetzen. Aus dem Satze der Euklidischen Geometrie *„Die Winkelsumme eines Dreiecks ist kongruent zwei Rechten"* folgt so z. B. *„Die Winkelsumme eines Dreiecks ist pseudokongruent zwei Rechten".*

Man sieht sehr einfach ein, daß, wenn der eine Schenkel eines rechten Winkels durch den ausgezeichneten Punkt O geht, der Winkel ein pseudorechter ist. Hieraus folgt:

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich auch in der nichteuklidischen Geometrie in einem Punkte.

Denn die Pseudohöhen schneiden sich in einem Punkte; legen wir aber den Punkt O in die eine Ecke des Dreiecks hinein, so fallen die Pseudohöhen mit den Höhen zusammen.

Besonders ist der Pascalsche Satz im Winkelraum eine Folge der graphischen Axiome, der Kongruenzaxiome und des

Parallelenaxioms; *er gilt auch in der nichteuklidischen Geometrie*, weil er ein reiner Schnittpunktssatz ist.

Hiermit ist der ganze Aufbau der Geometrie gesichert; denn die Schurschen Entwicklungen (§ 7) setzen nur die graphischen Axiome und den Pascalschen Satz voraus.

Außer diesem Aufbau der Geometrie enthält die Dehnsche Arbeit eine interessante axiomatische Untersuchung der Beziehung zwischen dem Satze von der Winkelsumme des Dreiecks und dem Parallelenaxiom. Bekanntlich kann das Parallelenaxiom, wenn man das *Archimedische Axiom* voraussetzt, durch die Aussage ersetzt werden, daß die Winkelsumme eines Dreiecks immer gleich zwei Rechten ist. Legendre hat den Satz bewiesen, daß die Winkelsumme eines Dreiecks niemals größer als zwei Rechte ist, indem er insbesondere von Stetigkeitsbetrachtungen Gebrauch macht. Schon Lambert hatte dagegen ohne den Stetigkeitsbegriff den Satz von Saccheri (§ 1) bewiesen:

Je nachdem die Winkelsumme in *einem* Dreieck kleiner, gleich oder größer als zwei Rechte ist, gilt das gleiche in *jedem* Dreieck.

Um nun zu untersuchen, ob der genannte Satz von Legendre auch in der nichtarchimedischen Geometrie Gültigkeit hat, gehen wir mit Dehn von der Hilbertschen analytischen nichtarchimedischen Geometrie aus (Kap. I, § 7, 17). Innerhalb dieser Geometrie bauen wir genau wie in der Cartesischen Geometrie (§ 1) eine elliptische Geometrie auf, deren Fundamentalkegelschnitt

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

ist. Endlich grenzen wir in dieser Geometrie durch die Bedingung

$$\frac{+n}{t} > \frac{x}{y} > \frac{-n}{t}$$

ein Gebiet ab; n ist eine beliebige ganze rationale Zahl, t der Parameter des Zahlensystems (vgl. Kap. I, § 7). Der nichtarchimedische Charakter des Zahlensystems zeigt sich darin, daß wir durch Winkel- und Streckenübertragung immer innerhalb des abgegrenzten Gebietes bleiben.

In dieser Geometrie ist nun die Winkelsumme eines Dreiecks immer größer als zwei rechte Winkel. Außerdem gehen durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden unendlich viele nicht schneidende Geraden.

Nach Dehn wird diese Geometrie eine *nicht-Legendresche* genannt. Der Legendresche Satz erfordert also zu seinem Beweise notwendig das Archimedische Axiom.

In ähnlicher Weise zeigt Dehn die Möglichkeit einer *semieuklidischen* Geometrie, d. h. eine Geometrie, in der die Winkelsumme jedes Dreiecks gleich zwei Rechten ist, in der aber durch einen Punkt zu jeder Geraden unendlich viele nicht schneidende Gerade gehen.

Dagegen zeigt es sich, daß in einer Geometrie, wo zwei Gerade sich immer schneiden, die Winkelsumme immer größer als zwei Rechte ist (auch ohne Voraussetzung der Stetigkeit).

§ 9. Die Hjelmslevsche Begründung der ebenen Geometrie.

Während einerseits die in § 7 und § 8 besprochenen Arbeiten von F. Schur und M. Dehn die räumliche Theorie der idealen Elemente benutzen, um eine nichtarchimedische Geometrie aufzubauen und anderseits die Arbeiten von Hilbert und Hessenberg über die Bolyai-Lobatscheffskysche und die Riemannsche Geometrie von besonderen Parallelenaxiomen ausgehen, ist es neuerdings Hjelmslev gelungen, die Geometrie mittels der ebenen graphischen Axiome und der ebenen Kongruenzaxiome aufzubauen (*Math. Ann.* **64**, 449).

Wir definieren wie früher (Kap. VI, § 1): Ein idealer Punkt (ab) ist ein Geradenpaar der Ebene, dessen einzelne Geraden a und b sich nicht schneiden.

Das Kriterium dafür, daß eine dritte Gerade c der Ebene durch den Punkt (ab) geht, ist aber ein ebenes. Um dieses Kriterium anzugeben, nennen wir S_a eine Spiegelung in der Geraden a; die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen S_b und S_a bezeichnen wir mit S_aS_b; *c geht durch den idealen Punkt (ab), wenn c Spiegelungsachse der Punkte*

$$B = S_aS_bA \text{ und } C = S_bS_aA$$

ist; A ist dabei ein beliebiger eigentlicher Punkt von c. Es zeigt sich dann ohne Schwierigkeit die Richtigkeit des Satzes: *Ein idealer Punkt (ab) und ein eigentlicher Punkt A bestimmen eine und nur eine Gerade.*

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß c durch den idealen Punkt (ab) geht, findet man $S_aS_bS_c = S_cS_bS_a$; hieraus folgt: Wenn c durch (ab) geht, so geht auch a durch (bc) und b durch (ac).

Folgende Sätze sind unmittelbar ersichtlich:

Wenn a, b, c eine Senkrechte gemeinsam haben, geht c durch den Punkt (ab).

Haben a und b eine gemeinsame Senkrechte n und geht c durch (ab), so ist n eine gemeinsame Senkrechte der drei Geraden a, b, c.

Wenn zwei Gerade zwei gemeinsame Lote besitzen, so ist jedes Lot der einen Geraden auch ein Lot der anderen.

Hieraus folgt nun: *Gibt es ein Viereck mit vier rechten Winkeln, so muß in jedem Viereck mit drei rechten Winkeln der vierte Winkel auch ein rechter sein.* Dieser Satz ist schon in dem Satze von Saccheri (§ 1) enthalten. Hiernach unterscheidet man zwei Fälle:

Im *ordinären Fall* haben irgend zwei Gerade höchstens ein gemeinsames Lot.

Im *singulären Fall* haben zwei Gerade mit einem gemeinsamen Lot unendlich viele solche Lote.

Nunmehr beweist man den Satz: *Wenn c und d durch (ab) gehen, dann geht auch d durch (bc).*

Die Hauptsätze *der ebenen Theorie der Spiegelungen* sind die auf S. 24f. bereits angeführten.

Bei jeder symmetrischen Verwandtschaft, welche keine Spiegelung ist, gibt es eine und nur eine Gerade, welche sich selbst entspricht, es gehören nämlich die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken entsprechender Punkte einer Geraden an.

Die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken entsprechender Punkte in zwei kongruenten Punktreihen fallen entweder in einem einzigen Punkt zusammen oder sie sind in einer und derselben Geraden enthalten.

Nach dem Vorhergehenden können wir noch nicht behaupten, daß zwei Punkte immer eine Verbindungsgerade haben; betrachten wir z. B. die absoluten Pole zweier Geraden, die durch einen eigentlichen Punkt gehen, dann existiert die Verbindungslinie nicht. Um in diesem Sinne die Theorie der idealen Elemente zu vervollständigen, benutzt Hjelmslev die *Halbdrehungen*. Durch eine Drehung (keine Umlegung) um einen eigentlichen Punkt O entsteht aus den Punkten einer Figur $ABC\ldots$ eine neue Figur $A_2B_2C_2\ldots$, die *Halbdrehung* führt dann $ABC\ldots$ in die Mittelpunkte $A_1B_1C_1\ldots$ der Strecken AA_1, BB_1, $OC_1\ldots$ über. Die umgekehrte Transformation heißt eine *inverse Halbdrehung*. Bei einer direkten Halbdrehung gehen die eigentlichen Punkte einer gegebenen Geraden a in eigentliche Punkte einer Geraden a_1 über; um diese Gerade zu konstruieren, fällt man das Lot OA auf a und bestimmt den Punkt A_1, welcher bei der gegebenen Halbdrehung dem Punkte A entspricht. Die Gerade AA_1 ist dann die gesuchte.

Man beweist nun der Reihe nach folgende Sätze:

Wenn mehrere Gerade einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt P gemein haben, so werden sie durch jede direkte Halbdrehung in Gerade überführt, welche ebenfalls einen Punkt gemein haben.

Wenn bei irgendeiner (direkten oder inversen) Halbdrehung zwei Punkte A und B in A_1 und B_1 übergehen, und wenn die beiden Geraden AB und A_1B_1 existieren, so wird bei dieser Halbdrehung jedem Punkt der Geraden AB ein Punkt der Geraden A_1B_1 entsprechen.

Wenn bei der Aufeinanderfolge von beliebig vielen Halbdrehungen mit gemeinsamem Drehzentrum zwei Punkte A und B in A_1 und B_1 übergehen, und die Geraden AB und A_1B_1 existieren, so wird jeder Punkt der Geraden AB in einen Punkt der Geraden A_1B_1 übergehen.

Hiernach kann man *die uneigentliche Gerade* definieren. Es wird ein für allemal ein eigentlicher Punkt O gewählt. Eine uneigentliche Gerade ist dann eine Menge uneigentlicher Punkte, die entweder durch eine Halbdrehung um O in die Gesamtheit der Punkte einer eigentlichen Geraden übergehen, oder mit der Gesamtheit der absoluten Pole aller Geraden durch O zusammenfallen. Die letzte Gesamtheit heißt *die ausgezeichnete Gerade.*

Es wird immer eine Halbdrehung die Punkte einer Geraden in die Punkte einer Geraden überführen. Endlich finden wir die Sätze:

Irgend zwei Punkte haben eine gerade Verbindungslinie. Zwei Gerade haben immer einen Punkt gemein. Es gelingt nun mit Hilfe eines Beweises von G. Hessenberg (*Neue Begründung der Sphärik, Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* **4**, 69 (1905)), *den Pascalschen Satz zu beweisen; weil sich aber der Desarguessche Satz als eine Folge des Pascalschen erweist* (Hessenberg, *Math. Ann.* **61**, 161), *ist hiermit die Begründung der Geometrie gesichert.*

In einem singulären Fall ist die ausgezeichnete Gerade die unendlich ferne Gerade der Euklidischen Geometrie. Die Winkelsumme eines jeden Dreiecks beträgt zwei Rechte. Gibt es keine anderen uneigentlichen Punkte als die der ausgezeichneten Geraden, so haben wir die Euklidische Geometrie; im entgegengesetzten Falle haben wir eine *semieuklidische* Geometrie (vgl. § 8); durch geeignete Hinzufügung idealer Elemente geht diese in die Euklidische Geometrie über.

Hiernach läßt sich nun der Satz von Saccheri über die Winkelsumme im Dreieck (§ 1) einfach beweisen.

Ist die Winkelsumme des Dreiecks größer als zwei rechte Winkel, so heißt die Geometrie eine elliptische; nach Einführung der idealen Elemente erhalten wir die vollständige elliptische Geometrie. Die von Dehn gefundene nicht-Legendresche Geometrie (vgl. § 8) wird also nach Hinzufügung idealer Elemente die gewöhnliche elliptische.

Ist die Winkelsumme des Dreiecks kleiner als zwei rechte Winkel, so ist die Geometrie die hyperbolische. Nimmt man als Axiom an, daß der Kreis jede Gerade schneidet, deren Abstand vom Mittelpunkt kleiner als der Radius ist, und führt uneigentliche Elemente ein, so erhält man die Lobatscheffskysche Geometrie.

Die Begründung der ebenen Geometrie kann alsdann auf Grund der auf S. 24 gegebenen Axiome 1. bis 6. durchgeführt werden unter Fortlassung des Parallelenaxioms und Hinzufügung des folgenden:

Die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks liegen nicht auf einer Geraden.

Dies letzte Axiom ersetzt die Axiome der Anordnung, soweit sie hier nötig sind. Es ist nun eine sehr interessante Frage, ob die in dem Wort *zwischen* ausgedrückte Anordnung sich innerhalb dieser Kongruenzlehre definieren läßt; wir haben ja früher gesehen, daß die Kongruenz sich innerhalb einer graphischen Geometrie, in der der Pascalsche Satz gültig ist, definieren läßt. Hjelmslev bemerkt, daß die Anordnung jedenfalls nach Hinzufügung eines neuen Axioms 8. definierbar ist:

Wenn zwei Strecken nicht kongruent sind, so existiert immer ein rechtwinkliges Dreieck, von dem die Hypotenuse der einen Strecke und die eine Kathete der anderen Strecke kongruent ist.

Druckfehler.

S. 160 Zeile 12 v. unten l. $\xi' i + \eta' j + \zeta' k$ statt $\xi' i + \eta' j + \zeta' k$.
S. 338 Zeile 6 „ „ l. „zurückgeführt“ statt „übergeführt“.
S. 383 Zeile 15 „ oben l. 177 statt 117.
S. 383 Zeile 25 „ „ l. 233 „ 333.
S. 388 Zeile 4 „ „ l. $(1 + 2\lambda^3)$ statt $(1 + 2\lambda^2)$.
S. 395 Zeile 1 „ „ l. $(1 + 2\lambda^3)$ „ $(1 + 2\lambda^2)$.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Bianchi, L., Professor an der Universität Pisa, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von M. Lukat. 2. Aufl. gr. 8. [Erscheint im Frühjahr 1910.]

Bobek, K., weil. Professor an der Universität Prag, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Nach den Vorträgen des Herrn C. Küpper bearbeitet. Mit 96 Figuren. 2., wohlfeile Ausgabe. [VI u. 210 S.] gr. 8. 1897. Geh. n. *M* 2.—

Bonola, R., Professor an der Scuola Normale zu Pavia, die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Liebmann, Professor an der Universität Leipzig. Mit 76 Figuren. [VIII u. 245 S.] 8. 1908. In Leinwand geb. n. *M* 5.—

Borel, E., Professor an der Sorbonne zu Paris, die Elemente der Mathematik. Deutsche Ausgabe besorgt von P. Stäckel, Professor in Karlsruhe i. B. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] 1908. n. *M* 8.60.

II. — Geometrie. Mit 403 Figuren. [XII u. 324 S.] 1909. n. *M* 6.40.

Cesàro, E., weil. Professor an der Universität Neapel, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von G. Kowalewski, Professor an der Universität Bonn. Mit 48 Fig. [VIII u. 341 S.] gr. 8. 1901. In Leinw. geb. n. *M* 12.—

Clebsch, A., weil. Professor an der Universität Göttingen, Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann, Professor an der Universität München. In 2 Bänden. gr. 8.

I. Band: Geometrie der Ebene. 2., vermehrte Auflage. I. Teil: Kegelschnitte und algebraische Formen. Erste Lieferung. [480 S.] 1906. Geh. n. *M* 16.—. Zweite (Schluß-)Lieferung und II. Teil. [U. d. Pr.]

II. — Geometrie des Raumes. I. Teil: Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Komplex. Mit vielen Figuren. [VIII u. 650 S.] 1891. Geh. n. *M* 12.—. [II. Teil in Vorbereitung.]

Czuber, Hofrat E., Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren. [X u. 382 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

v. Dalwigk, Dr. F., Privatdozent an der Universität Marburg, Vorlesungen über darstellende Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb. Mit zahlreichen Figuren und Tafeln.

[Erscheint im April 1910.]

Dette, Wilhelm, Professor am Städt. Realgymnasium zu Elberfeld, analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit 45 Figuren. [VI u. 232 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. n. *M* 4.40.

Dingeldey, F., Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Lehrbuch der analytischen Geometrie. ca. 400 S. gr. 8. Geb. [Erscheint im Herbst 1910.]

Engel, Fr., Professor an der Universität Greifswald, und **P. Stäckel,** Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit vielen Figuren. In 2 Bänden. gr. 8.

I. Band: Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedr. Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnis Lobatschefskijs und 194 Figuren. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben u. Schriften. Register. Mit 67 Figuren. [XVI, IV u. 476 S.] 1898. Geh. n. *M* 14.—, in Halbfranz geb. n. *M* 15.40.

II. — Wolfgang und Johann Bolyai, geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel. Mit einem Bildnis Wolfgang Bolyais. [In Vorbereitung.]

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von Hermann Fleischer in Königsberg i. Pr. Mit einem Einführungswort von F. Klein und 187 Figuren. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. Geh. n. *M* 8.—, in Leinw. geb. n. *M* 9.—

—— Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Caló, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali, gesammelt und zusammengestellt von Federigo Enriques. Deutsche Ausgabe in 2 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Grundlagen der Geometrie. Deutsch von Prof. Dr. H. Thieme in Bromberg. [Erscheint Ostern 1910.]

II. — Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Deutsch von Dr. H. Fleischer in Königsberg i. Pr. Mit 135 Figuren. [XII u. 348 S.] 1907. n. *M* 9.—

Fiedler, W., vorm. Professor am Polytechnikum zu Zürich, die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen und zum Selbststudium. In 3 Teilen. gr. 8.

I. Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4. Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 lithogr. Tafeln. [XXIV u. 431 S.] 1904. Geh. n. *M* 10.—, in Leinwand geb. n. *M* 11.—

II. — Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3. Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 16 lithogr. Tafeln. [XXXIII u. 560 S.] 1885. Geh. n. *M* 14.—, in Leinwand geb. n. *M* 15.40.

III. — Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3. Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [XXX u. 660 S.] 1888. Geh. n. *M* 16.—, in Leinwand geb. n. *M* 17.40.

Fort, O., und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Teile.

I. Teil: Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Dresden. 7. Auflage, besorgt von Dr. R. Heger, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Dresden. Mit Holzschnitten. [XVII u. 268 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. *M* 4.—, in Leinwand geb. n. *M* 4.80.

II. — Analytische Geometrie des Raumes von Dr. O. Schlömilch, weil. Kgl. Sächs. Geh. Rat a. D. 6. Auflage, von R. Heger in Dresden. Mit Holzschnitten. [VIII u. 338 S.] gr. 8. 1898. Geh. n. *M* 5.—, in Leinwand geb. n. *M* 5.80.

Ganter, H., Professor an der Kantonschule zu Aarau, und **F. Rudio,** Professor am Polytechnikum zu Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb. je n. *M.* 3.—

I. Teil: Ganter und Rudio, die analytische Geometrie der Ebene. 7., verbesserte Auflage. Mit 53 Figuren. [VIII u. 190 S.] 1910.

II. — Rudio, die analytische Geometrie des Raumes. 4., verbesserte Auflage. Mit 20 Figuren. [X u. 194 S.] 1908.

Grimsehl, Dr. **E.,** Direktor der Oberrealschule auf der Uhlenhorst zu Hamburg, Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. Mit 1091 Figuren, 2 farbigen Tafeln und einem Anhange, enthaltend Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. [XII u. 1052 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M.* 15.—, in Leinwand geb. n. *M.* 16.—

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Figuren. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra.
1. Band: Arithmetik. Von Professor C. Färber in Berlin. [Erscheint im Sommer 1910.]
2. — Algebra. Von Professor E. Netto in Gießen. [In Vorb.]

II. — Die Grundlehren der Geometrie. 2 Bände.
1. Band: Die Elemente der Geometrie. Von Professor Hermann Thieme, Direktor des Realgymnasiums zu Bromberg. Mit 323 Figuren. [XII u. 394 S.] 1909. n. *M.* 9.—
2. — Von W. Frz. Meyer in Königsberg. [In Vorbereitung.]

Handbuch für Lehrer höherer Schulen. Bearbeitet von A. Auler, O. Boerner, W. Capitaine, K. Fricke, E. Grimsehl, K. Jansen, F. Kuhlmann, F. Lampe, B. Landsberg, O. Lyon, H. Müller, J. Nelson, A. Rausch, B. Schmid, E. Stiehler, H. Vollmer, E. Weede, O. Weißenfels, E. Wernicke, J. Ziehen. [XIV u. 704 S.] Lex.-8. 1906. Geh. n. *M.* 12.—, in Leinwand geb. n. *M.* 13.—

Hilbert, Geheimer Regierungsrat **D.,** Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Dritte, durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen Figuren. [VI u. 279 S.] 8. 1909. In Leinwand geb. n. *M* 6.—

Höfler, A., Professor an der Universität Wien, Didaktik des mathematischen Unterrichts. (A. u. d. T.: Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen. Herausgegeben von A. Höfler und F. Poske. Band I.) Mit 2 Tafeln und 147 Figuren. [XVIII u. 509 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—

Killing, Geheimer Regierungsrat **W.,** Professor an der Universität Münster i. W., und **H. Hovestadt,** Professor am Realgymnasium zu Münster i. W., Handbuch des mathematischen Unterrichts. 2 Bände. gr. 8. In Leinwand geb. I. Band. [VIII u. 448 S.] 1909. n. *M.* 10.—

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.**, Professor an der Universität Göttingen, autographierte Vorlesungshefte. 4. Geh. Höhere Geometrie. Unveränderter Abdruck 1907.

Heft 1 [VI u. 566 S.] (W.-S. 1892/93)
— 2 [IV u. 388 S.] (S.-S. 1893) } zusammen n. *M.* 15.—

—— Nichteuklidische Geometrie.

Heft 1 (W.-S. 1889/90) [364 S.]
— 2 (S.-S. 1890) [238 S.] } zusammen n. *M.* 14.—

—— Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien (S.-S. 1901). Neuer Abdruck 1907. [VIII u. 484 S.] n. *M.* 10.—

Lobatschefskij, N. I., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von H. Liebmann, Professor an der Universität Leipzig. Mit 39 Figuren im Text und auf einer Tafel. [XI u. 187 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. *M.* 8.—

Loria, G., Professor an der Universität Genua, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autoris., nach dem ital. Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Professor Fritz Schütte, Oberlehrer am Stiftischen Gymnasium zu Düren. 2. Auflage. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil: Die algebraischen Kurven. Mit 142 Figuren auf 14 lithographischen Tafeln. [XVIII u. 488 S.] 1910. Geh. n. *M.* 16.50, in Leinwand geb. n. *M.* 18.—

II. — Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven. [Erscheint im Herbst 1910.]

—— Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. In 2 Teilen.

I. Teil: Die Darstellungsmethoden. Mit 163 Figuren. [XI u. 219 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 6.80.

II. — [Unter der Presse.]

Richter, Otto, Professor am König-Albert-Gymnasium zu Leipzig, Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 147 Figuren. [X u. 188 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M.* 4.40, in Leinwand geb. n. *M.* 4.80.

Salmon, G., analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von W. Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. 2 Teile. gr. 8. Geh. n. *M.* 17.—, in Leinwand geb. n. *M.* 19.—

I. Teil: 7., verbesserte Auflage. [XXXIV u. 444 S.] 1907. Geb. n. *M.* 10.—

II. — 6. Auflage. [XXIV u. S. 445—854.] 1903. Geh. n. *M.* 8.—, geb. n. *M.* 9.—

—— analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. 2 Teile. gr. 8. Geh. u. in Leinwand geb.

I. Teil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 4., verbesserte Auflage. Mit Holzschnitten. [XXXIV u. 448 S.] 1898. Geh. n. *M.* 8.—, geb. n. *M.* 9.—

II. — Analytische Geometrie der Kurven im Raume, der Strahlensysteme und der algebraischen Flächen. 3. Auflage. Mit Holzschn. [LXXII u. 686 S.] 1880. Geh. n. *M.* 16.—, geb. n. *M.* 17.40.

Schell, W., weil. Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Mit Holzschnitten. 2., erweiterte Auflage. [VIII u. 163 S.] gr. 8. 1898. Geh. n. *M* 5.—

Schoenflies, A., o. ö. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 2 Teile.

I. Teil. Mit Figuren. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. n. *M* 8.—
II. — Mit 26 Figuren. [X u. 431 S.] gr. 8. 1908. n. *M* 12.—

—— Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Mit 98 Figuren. [V u. 92 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M* 2.20, in Leinw. geb. n. *M* 2.80.

Schotten, H., Direktor der Oberrealschule zu Halle a. S., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. In 3 Bänden. gr. 8.

I. Band: [IV u. 370 S.] 1890. Geh. n. *M* 6.—, geb. n. *M* 7.—
II. — [IV u. 410 S.] 1893. Geh. n. *M* 8.—, geb. n. *M* 9.—
III. — [In Vorbereitung.]

Schur, F., Professor an der Universität Straßburg i. E., Grundlagen der Geometrie. Mit 63 Figuren. [X u. 192 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 6.—, in Leinwand geb. n. *M* 7.—

Simon, Max, Professor am Lyzeum und Honorarprofessor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Mit 28 Fig. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. *M* 8.—, in Leinw. geb. n. *M* 9.—

Staude, Otto, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M* 14.—

—— analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. In 2 Teilen. gr. 8. Geh. u. in Leinwand geb.

I. Teil. Mit 181 Figuren. [X u. 548 S.] 1910. Geh. n. *M* 20.—, geb. n. *M* 22.—
II. — [Erscheint Ostern 1910.]

—— die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit Fig. [VIII u. 186 S.] gr. 8. 1896. Geh. n. *M* 7.—

Study, E., Professor an der Universität Bonn, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit 46 Figuren und 1 Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. Geh. n. *M* 21.—, in Halbfr. geb. n. *M* 23.—

—— Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. ca. 5 Bände von je 10—12 Bogen. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Sturm, Geh. Regierungsrat **Rudolf**, Professor an der Universität Breslau, Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 61 Figuren und 7 lithogr. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. *M.* 5.60.

—— die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Teilen. gr. 8. Geh. n. *M.* 42.—

I. Teil: Der lineare Komplex oder das Strahlengewinde und der tetraedrale Komplex. [XIV u. 386 S.] 1892. n. *M.* 12.—

II. — Die Strahlenkongruenzen erster und zweiter Ordnung. [XIV u. 367 S.] 1893. n. *M.* 12.—

III. — Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] 1897. n. *M.* 18.—

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtl. Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaeß, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von F. Klein und 184 Figuren. [XII u. 339 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M.* 7.—, in Leinwand geb. n. *M.* 8.—

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausgegeben von Felix Auerbach. I. Jahrgang 1909/10. Mit einem Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S.] 8. 1909. In Leinwand geb. n. *M.* 6.—

Vahlen, K. Th., Professor an der Universität Greifswald, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—

Veronese, G., Professor an der Universität Padua, Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verf. übersetzt von A. Schepp. Mit zahlr. Fig. [XLVII u. 710 S.] gr. 8. 1894. Geh. n. *M.* 20.—

Vogt, Dr. **Wolfgang**, synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen u. der linearen Linienörter des elliptischen Raumes. [VIII u. 58 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M.* 2.40.

Weber, H., u. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Figuren. [XVIII u. 539 S.] 1906. n. *M.* 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. n. *M.* 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein u. R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Figuren. [XIII u. 666 S.] 1907. n. *M.* 14.—

QA
37
P32
v. 2

APR 3 1970

RAYMOND H. FOGLER LIBRARY
DATE DUE

UNIV OF MAINE
3 7550 01007328 7